CHANTIERS de Pédagogie Mathématique

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public
Régionale Île-de-France

janvier 2021
n° 187

Édito
Souhaitons-nous une bonne année pour que les projets mathématiques restent foisonnants malgré les nombreuses incertitudes et questions que l'on peut se poser, questions qui sont loin d'être toutes liées à la situation sanitaire actuelle . . .
Lire l'article

Journée de la Régionale 2020
Une Journée de notre Régionale très particulière en ces temps de pandémie. Voici quelques échos des ateliers que nous vous avions proposés. L'atelier du matin fera l'objet d'un article pour le numéro du mois de mars.
Lire l'article

Le travail collaboratif et les séances « Jigsaw »
Deux membres du groupe Léo de l'IREM de Paris nous ont présenté une organisation du travail collaboratif avec, dans un premier temps, la formation d'experts puis, dans un deuxième temps, la résolution d'un problème qui nécessite la mise en commun de différentes compétences chacune d'entre elles étant apportées par chaque expert . . .
Lire l'article

Les Murs Pédagogiques
Mettre du « velleda » sur les murs d'une classe pour en faire des outils qui aident les élèves à travailler l'oral en mathématiques tout en travaillant les notions du programme . . .
Lire l'article

Les classes préparatoires TSI : retour d'expérience d'un confinement mathématique
Un aspect peu connu des classes préparatoires qui n'accueillent pas que des élèves venant de terminales scientifiques. Et la période du premier confinement a été l'occasion de mettre en place et expérimenter des outils pouvant être utiles pour tous les élèves et leurs professeurs.
Lire l'article

Journée « Maths Monde »
Tous les ans, une journée « Maths Monde » est organisée pour présenter les travaux d'équipes de différents pays autour d'un thème de travail issu des programmes de mathématiques dans le but de comparer les éléments didactiques spécifique à chaque pays étudié : place dans les progressions, choix des notions abordées, énoncés, exercices . . .
Lire l'article

Un « labomath » au collège
L'APMEP a, depuis très longtemps, encouragé l'ouverture de laboratoires ou de clubs de mathématiques dans les établissements. Un « labomath » commence à vivre dans un collège de l'Essonne, projet conçu par l'équipe des professeurs de mathématiques de cet établissement.
Lire l'article

Grilles de nombres croisés en Terminale S
Pour rendre ludiques les notions d'arithmétique, quoi de mieux que des grilles de nombres croisés ' Très populaires en primaire, elles peuvent être utilisées à tous les niveaux. Très addictif selon les élèves !
Lire l'article

Le Palais en travaux . . .
Des travaux importants de rénovation de l'ensemble du Grand Palais dans lequel se trouve le Palais de la Découverte ont entraîné sa fermeture. L'équipe des passeurs de mathématiques du Palais nous propose un incubateur, le « labo de la médiation », pour réfléchir au futur du Palais : quels espaces pour quelle offre d'exposés, quelles expositions, quels thèmes, quels objets emblématiques . . .
Lire l'article

Avis de recherche
Un retour sur nos Avis de recherche précédents avec d'autres points de vue, des solutions pour celui du mois d'octobre et un nouvel avis : le plaisir de chercher et de lire les solutions proposées !
Lire l'article

Comment contribuer aux Chantiers ?
Chaque adhérent(e) et lecteur(rice) peut aussi contribuer aux Chantiers en proposant des articles : toutes les idées sont bonnes à prendre et à partager . . .
Lire l'article

Édito

Le Comité de la Régionale

Ce numéro 187 des Chantiers de Pédagogie Mathématique arrive pour la nouvelle année 2021. C'est alors pour nous l'occasion de souhaiter à l'ensemble de la communauté mathématique une année bien remplie, et ce malgré des conditions qui n'y sont pas toujours favorables. L'année qui vient de s'achever a notamment vu nos pratiques professionnelles profondément bouleversées durant le confinement.

Nous savons les sollicitations, qu'elles soient institutionnelles ou non, nombreuses et notre association s'efforce d'accompagner les collègues devant l'évolution de notre métier. Les tâches et les préoccupations s'accumulent parfois et chacun cherche à gérer au mieux cette charge de travail en fonction de sa situation personnelle. Donnons quelques questionnements en cours des membres du comité de la Régionale : comment traiter efficacement les résultats de nos élèves aux évaluations nationales ? Quelle différenciation mettre en place face au retard et aux difficultés de certains élèves depuis la rentrée ? Comment se dégager du temps pour assister aux séminaires en ligne proposés par les corps d'inspection de certaines académies franciliennes ? Ou à des conférences extérieures comme la journée Maths Monde ? Comment gérer les nouvelles mesures sanitaires et la mise en place d'un enseignement par demi-groupes dans certains lycées ? Comment préparer au mieux nos élèves aux épreuves de spécialité du bac 2021 ?

Afin de ne pas rompre ce lien avec vous, la Régionale Île-de-France a souhaité maintenir sa « Journée de la Régionale » en proposant une animation en distanciel. Vous trouverez un compte-rendu dans ce numéro. Nous y donnons aussi la parole à notre collègue, Éric Mercier, qui raconte son expérience et la mise en place d'outils spécifiques avec ses classes pour l'enseignement à distance.

Les initiatives pour faire vivre les mathématiques sont foisonnantes comme en témoigne la naissance du « Labomath » de Briis-sous-Forges, et c'est d'ailleurs l'une des priorités de notre association. Riche de l'expérience des Journées de Bourges en ligne, l'APMEP propose depuis novembre les mercredis de l'APMEP, moment d'échanges et de formation pour tous les collègues.

Les musées sont aujourd'hui tous fermés mais le cas du Palais de la Découverte est à part. Sa fermeture n'est, en effet, pas la conséquence directe de l'épidémie mais celle de la rénovation du Grand Palais dans son ensemble. Si la gestion du musée est passée du ministère de l'Éducation Nationale au ministère de la Culture, nous espérons que cette nouvelle égide ne conduira pas à une opposition entre culture et sciences qui réduirait la place des mathématiques et sa médiation dans la nouvelle version du Palais. Peut-être avez-vous raté la vente aux enchères des décimales de π provenant de la mythique salle au même nom... Pour préparer au mieux sa réouverture, les médiateurs scientifiques du Palais nous proposent ici de réfléchir ensemble aux futurs espaces et contenus.

Enfin, pour s'aérer l'esprit, un retour d'expériences sur les « nombres croisés » en Terminale et la traditionnelle rubrique problème de notre publication proposant des résolutions des deux derniers avis de recherche et, bien sûr, un nouveau problème.

Bonne lecture à tous et bonne année 2021, produit de deux premiers consécutifs ! Il faudra ensuite attendre 3599 pour un produit de deux nombres premiers jumeaux ou bien se consoler avec 2040 somme de deux premiers jumeaux . . .

Journée de la Régionale 2020

Le Comité de la Régionale

Début septembre, nous avions prévu une Journée de la Régionale comme les années passées, avec cependant des aménagements pour éviter de devenir un foyer de propagation de la covid-19 mais, en cours de route et pour tenir compte de l'évolution de la pandémie avec une deuxième vague qui s'annonçait, nous avons complètement changé nos plans pour proposer une Journée intégralement à distance en profitant de la mise en place des serveurs de visioconférence BigBlueButton pour les Journées Nationales.

Nous avons pu garder notre programme initial, chacun des intervenants ayant accepté de maintenir, tout en les adaptant à la situation, leurs présentations.

Dans la matinée, ce sont Stéphan Petitjean et Erwan Adam, animateurs du groupe collège de l'IREM de Paris-Nord qui nous ont présenté leurs travaux et les ressources qu'ils mettent à la disposition de tous à travers Rubricamaths ; le site d'activités informatiques de l'IREM Paris-Nord. Un article concernant ces ressources Rubricamaths est d'ores et déjà prévu pour le prochain numéro des Chantiers à paraître en mars 2021.

En début d'après-midi, notre assemblée générale annuelle a pu se tenir, avec le rapport d'activités de l'année scolaire 2019-2020 et le rapport financier 2019, ainsi que l'élection du Comité de la Régionale pour l'année scolaire 2020-2021. Les documents présentés sont disponibles sur ce site, à la page des Assemblées Générales de la Régionale.

Puis, nos travaux ont repris l'après-midi avec deux exposés autour du travail collaboratif des élèves. Dans un premier temps, Marie Thirion et Christophe Hache du groupe Léo de l'IREM de Paris nous ont présenté leurs travaux autour de Jigsaw puis, dans un deuxième temps, notre collègue Luca Agostino nous a présenté les murs pédagogiques et l'usage qu'il en fait avec ses élèves.

Vous trouverez dans ce numéro des Chantiers de plus amples détails sur ces deux ateliers.

Le travail collaboratif et les séances "Jigsaw"

Christophe Hache, Marie Thirion

Lors de l'atelier de la Journée de la Régionale Île-de-France du 17 octobre 2020, nous avons présenté un type de séance en classe, dite séance "Jigsaw" [1], qui avait été travaillé par le groupe Léo [2] de l'IREM de Paris.

Nous avons donné une présentation générale du principe de ces séances « Jigsaw » : les élèves travaillent d'abord en groupe pour acquérir une certaine expertise (chaque groupe d'expert a un travail spécifique), ils se répartissent ensuite pour réunir autour de la même table des experts différents et doivent alors résoudre une tâche qui nécessite l'expertise de chacun.

Ce travail du groupe Léo a déjà fait l'objet d'un article dans la revue Repères IREM n°121.

Pendant l'atelier, les participants ont vécu la situation « Jigsaw » sur une séquence mise en place par les collègues de Français du groupe Léo : il s'agissait de savoir caractériser le registre fantastique. Nous avons présenté ensuite plusieurs exemples de séances en mathématiques. Les ressources sont sur le site de l'IREM de Paris : séances expérimentées, bibliographie, liens vers le groupe « Jigsaw » de l'IREM de Rennes . . .

Malgré la distance et le travail en visio, la discussion qui a suivi notre présentation lors de cette journée a été très riche et enthousiasmante. Le diaporama que nous avions présenté pourra vous donner les différents aspects de notre atelier.

1. démarche développée par Elliot Aronson
2. Langage, écrit, oral

Les Murs Pédagogiques

Luca Agostino

L'un des thèmes au centre des réflexions de la Journée de la Régionale Île-de-France 2020 a été la place de l'Oral dans l'enseignement des Mathématiques. Quelle meilleure occasion de monter un petit atelier virtuel de débats et d'échanges autour des pratiques dans nos classes ?

Des avis divers

La nécessité d'une réflexion collective sur ce thème s'est faite sentir dès le départ avec un tour de « salle » où chacun devait compléter la phrase « Enseigner l'Oral en Mathématiques c'est … ».

Un véritable moment de vérité où nous avons constaté entre collègues l'extrême diversité des positions sur ce sujet : il y a celui ou celle qui en valorise sa place légitime dans le parcours de l'élève, qui en souligne la difficulté de son enseignement de part le besoin de temps, qui s'interroge sur la façon de l'évaluer pour que les actions pédagogiques entreprises à l'oral aient des retombées positives sur la formation de l'élève.

Voici un nuage de mots créé à partir des réponses des collègues présents.

L'oral est déjà présent dans nos classes

À partir de ce constat, il est intéressant de remarquer que l'oral fait déjà partie intégrante de nos cours de Mathématiques sous différentes formes qu'on pourrait classifier en trois catégories :

— Oral préparé où la prise de parole est conçue par les élèves avec un temps de préparation au préalable sur un sujet donné en amont.

— Oral non préparé vu comme la capacité de verbalisation mathématique par les élèves lors d'un cours ou d'une activité sans qu'il y ait de temps de préparation en amont.

— Travail oral personnel de l'élève qui correspond souvent à des moments de travail à la maison visant la réalisation d'une tâche mathématique avec un rendu complètement oral ou qui en contienne une partie conséquente.

Voici une infographie :

Le dispositif des Murs Pédagogiques

Il est clair que l'entraînement à l'oral non préparé constitue, d'une part, l'enjeu le plus complexe (de part la difficulté d'accompagner tous les élèves dans leur parcours d'apprentissage) et, d'autre part, la part la plus riche car elle permet un développement à la fois langagier des mathématiques et logico-déductif avec une centralité du raisonnement explicité à l'oral et son éventuelle remise à l'écrit successive.

Depuis plusieurs années je pratique l'action pédagogique que j'appelle « Les Murs Pédagogiques ».

L'idée des murs pédagogiques naquit suite à l'achat et l'installation de plusieurs tableaux de type « velleda » collés aux murs d'une salle de cours : imaginer les élèves debout en train de travailler sur un support qui, d'habitude, est propre à l'enseignant, laissa courir l'imagination de plusieurs collègues et, assez rapidement, cette salle devint l'objet de nombreuses convoitises au sein des équipes pédagogiques.

La fascination pour l'aspect « symbolique » et un peu « sacré » que le tableau déclenche dans l'imaginaire des élèves pouvait devenir la porte d'entrée vers la mise en place d'un changement de posture : les apprenants qui deviennent savants et responsables de la transmission de ce savoir. Encore fallait-il identifier quel serait ce savoir et comment le transférer ... et encore en amont les objectifs pédagogiques : motivation, autonomie, différenciation pédagogique, remédiation, climat de classe ?

L'outil apparaissait potentiellement très riche, diversifié et facilement adaptable à plusieurs nécessités. Cette variété était presque gênante : la quantité d'options jouait un rôle de distraction et ne me permettait pas de bien visualiser la direction que je voulais entreprendre. Le seul aspect clair dans cette démarche était le fait que, quelque soit l'objectif, les élèves, tout comme des enseignants, auraient dû s'exprimer à l'oral entre pairs : un constat qui fût comme un « effet d'épiphanie » pour le professeur de Mathématiques que j'étais et qui tentais depuis plusieurs années d'insérer la pratique de l'oral dans ses heures de cours.

L'enjeu de l'oral

Les tableaux sont installés tout au long des murs « libres » et permettent de réaliser des « mini-classes » en organisant les tables des élèves en fer à cheval autour de chaque tableau. Bien évidemment, le tableau « de l'enseignant » peut jouer le rôle d'un ou deux tableaux supplémentaires, ce qui permet d'animer le dispositif pour une classe entière : cinq groupes de cinq ou six élèves chacun.

La composition des groupes de travail peut se faire suivant les préconisations classiques du travail de groupe, en les organisant de façon homogène ou hétérogène, notamment en fonction d'une différenciation pédagogique des énoncés ou non. Je tiens à souligner que la mise en place « matérielle » rappelle de très près la conception de la « classe mutuelle » définie par Vincent Faillet dans son ouvrage « La métamorphose de l'école quand les élèves font la classe ».

En revanche, si la situation de salle de cours assume le contour « liquide » évoqué par Faillet (grâce notamment à l'utilisation des tableaux collés aux murs, une disposition de plusieurs groupes de tables en fer à cheval et le déplacement des élèves), celle-ci est, dans cette démarche, au service d'un protocole pédagogique strict . En effet, une séance de murs pédagogiques vise une cible bien spécifique : le développement des compétences « Oral préparé et non préparé » en Mathématiques dans une démarche d'amélioration de la compréhension des notions au programme et de prise de conscience de leur construction formelle.

D'où la nécessité de mise en place d'un scénario pédagogique aux contours bien définis permettant de canaliser la production orale des élèves dans la direction souhaitée par l'enseignant et de s'assurer, ainsi, que les élèves soient confrontés aux situations didactiques qui permettent explicitement un travail de la compétence orale.

Scénario et déroulement

En début de séance, les élèves sont répartis en groupes de quatre ou cinq. Ainsi, chaque groupe constitue une « mini-classe » et s'installe devant l'un des tableaux.

Chaque groupe a un temps imparti pour résoudre un exercice ou un problème en notant au tableau toute trace de recherche ou de résolution que les élèves jugent pertinente ou utile à leur propre compréhension. Concernant les sujets travaillés : l'énoncé donné pour chaque groupe est différent de celui du groupe suivant, ce qui permet, à minima, de réaliser deux énoncés différents.

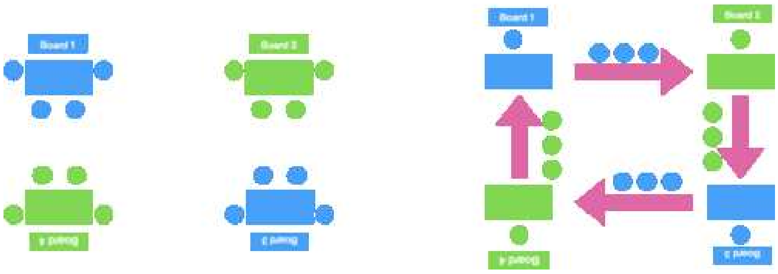
À la fin du temps imparti les groupes tournent, et les élèves s'installent face au tableau suivant. Cependant, un élève par groupe reste à sa place et aura la mission d'accueillir ses camarades et de leur expliquer à l'oral le problème que son propre groupe a résolu auparavant. Les élèves qui écoutent prennent note de la résolution et posent des questions, voire corrigent la solution proposée s'ils pensent qu'elle présente des erreurs.

Une variante qui engage moins l'aspect de l'oralité, mais davantage celui du travail collaboratif est la suivante :

même fonctionnement que le déroulé ci-dessus, mais à la fin du premier temps imparti, tout le groupe se déplace et corrige, avec une couleur différente de celle utilisée avant, le travail des camarades qui apparaît au mur.

Le déroulé de cette activité rappelle le dispositif « World Café » initié en formation d'entreprise dans les années 90. Si l'aspect dynamique qui se manifeste avec les déplacements des élèves lui correspond exactement, l'idée de réaliser une tâche précise et de la transmettre en tant qu'expert au groupe suivant amène la réflexion pédagogique sur un plan différent de celui plus égalitaire et libre de l'équipe d'entreprise.

Ici, « l'hôte » du groupe n'est pas maître de la question : il est élu expert suite au travail qui a été conçu par l'enseignant, qu'il a réalisé avec les autres et donc, à fortiori, qu'il vient d'apprendre. C'est l'enseignant le véritable chef d'orchestre, celui qui décide les objectifs pédagogiques et les tâches pour les atteindre. En revanche, l'élève garde un profil d'acteur, mais l'aspect créatif du « World Café » reste limité par la précision de la tâche qui, on le rappelle, répond à un besoin de travail spécifique : l'oral en Mathématiques.



Le besoin d'une analyse didactique

L'atelier de notre journée s'est prolongé dans une analyse a priori et a posteriori avec l'observation de quelques photos de tableaux d'élèves. Plusieurs questions ont été soulevées par les collègues présents.

— Quels retours en classe après ? Y a-t il une place pour l'institutionnalisation ?

— Comment évaluer le dispositif ? Autrement dit : comment s'assurer que ce type de travail apporte une réelle amélioration des compétences orales en Mathématiques ? Et comment être certain que ces compétences orales aient un réel impact positif dans l'apprentissage des Mathématiques ?

— Quels énoncés ? Comment choisir des tâches qui favorisent les échanges ?

— Quelle place pour l'évaluation ? S'agit-il d'une évaluation par compétences ?

Ces retours interrogatifs expriment fortement le besoin de légitimer des actions pédagogiques qu'on définit souvent comme « innovantes ». Travaillant depuis plusieurs années sur cette animation de classe j'ai trouvé quelques réponses à ces questions, mais certaines restent encore trop ambitieuses.

Certes, la crise du Covid a forcément ralenti les expérimentations de ce type et contraint les enseignants à s'astreindre à des configurations de classes à « échiquier », mais l'enjeu de savoir évaluer les retombées positives sur l'apprentissage n'a jamais cessé de me travailler et m'a donné des idées que j'ai hâte de tester une fois qu'on pourra réduire les distances.

Une de ces idées consisterait à donner des « missions secrètes » à certains élèves du groupe qui seraient alors écouteurs en plus qu'acteurs et qui devraient par exemple donner le nombre de fois où un certain mot ou expression mathématique a été utilisé par le groupe (coefficient directeur ? nombre dérivé ? . . .), mais il ne s'agit que d'une idée pas encore mûre.

Le lecteur trouvera une analyse didactique plus détaillée et des réponses aux questions pédagogiques précédentes dans le numéro 538 de la revue « Au fil des Maths » de l'APMEP, revue que nos collègues connaissent bien puisqu'elle est incluse dans l'adhésion à notre Association.

Les classes préparatoires TSI : retour d'expérience d'un confinement mathématique

Éric Mercier

Les classes préparatoires TSI

Les classes préparatoires aux grandes écoles (CPGE), cette « spécificité française », sont souvent décriées dans la presse. On leur reproche d'être trop élitistes, réservées à une classe sociale qui n'a pas besoin de cet avantage supplémentaire, d'insister sur la masse des connaissances à ingurgiter en deux ans plutôt que sur le recul nécessaire pour assimiler des notions abstraites.

J'enseigne les mathématiques dans une classe préparatoire depuis dix ans et s'il est une filière qui contredit et dépasse tous ces clichés, c'est bien la filière TSI (Technologie et Sciences Industrielles).

La classe préparatoire TSI est exclusivement réservée aux élèves issus de STI2D [3] et de STL [4], des « bacs technos », dans lesquels les profils sont très variés. On y trouve des élèves considérés en échec scolaire au collège ou en seconde et orientés en « techno» parce que la filière générale « n'était pas pour eux», mais aussi des enfants d'ingénieurs et de profs qui connaissent cette filière et qui savent, eux, qu'elle est riche.

Riche, cette filière ne l'est pas que par la diversité des étudiants, elle l'est aussi par la diversité des enseignements qui y sont dispensés. Ces classes sont souvent choyées dans les lycées, avec des effectifs légers, contrairement à ce que l'on peut constater dans d'autres CPGE. Les établissements proposent souvent des dédoublements en cours d'anglais par exemple, au-delà de ce que demandent les textes officiels.

Chaque année, les professeurs de CPGE TSI prennent leur bâton de pèlerin pour aller présenter cette orientation dans les lycées de leur bassin de recrutement. Les obstacles les plus fréquemment rencontrés sont la méconnaissance de cette poursuite d'étude et l'autocensure. Beaucoup d'élèves des premières et terminales STI2D et STL ignorent en effet jusqu'à l'existence de cette classe préparatoire qui leur est réservée et lorsqu'ils en connaissent l'existence, ces jeunes pensent que ce n'est « pas pour eux ».

La proportion d'élèves boursiers dans ces classes est du même ordre, voire supérieure à ce que l'on constate à l'université, dépassant par exemple les 30 % dans ma classe en règle générale. Cette CPGE TSI est donc un réel ascenseur social trop peu connu.

Ma carrière dans cette filière passionnante est parsemée d'étudiants généreux et reconnaissants. Certains sont passés par une année de bac professionnel puis ont été réorientés en STI2D, ce sont souvent des parcours atypiques et réjouissants. Nombre de ces jeunes étudiants ou jeunes salariés viennent chaque année nous présenter leurs parcours après la prépa, et une réussite qu'ils n'auraient pas espérée quelques années plus tôt. Si les professeurs se donnent beaucoup, avec passion, dans cette formation, il faut aussi reconnaître qu'ils reçoivent beaucoup de ces étudiants en retour.

Le confinement et la mise en place d'outils de travail à distance

C'est dans ce contexte que dans mon établissement, le lycée Jean Perrin de Saint-Ouen-l'Aumône, nous avons vécu le premier confinement. Ce lycée est géographiquement excentré, dans la zone industrielle du Vert Galant. Les élèves et étudiants qui y travaillent ont, pour la plupart, des temps de transports importants. C'est un lycée de bonne taille, avec son millier d'élèves, des étudiants en BTS en Bac Pro et en CPGE TSI.

Dans cet établissement, j'ai aussi la charge du réseau informatique pédagogique depuis une vingtaine d'années. Dès mes débuts dans cette fonction, j'ai utilisé la solution SambaÉdu et participé ensuite à son développement

3. STI2D : Sciences et Technologies de l'Industrie et du Développement Durable
4. STL : Sciences et Technologies de Laboratoire

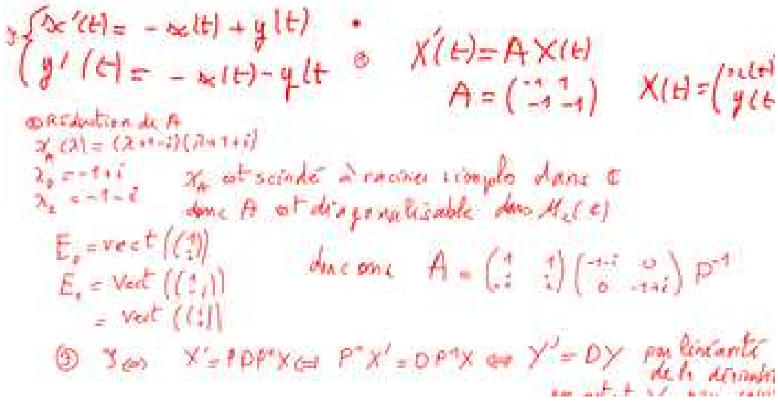
avec une joyeuse équipe. Cette solution de serveurs pédagogiques a été créée par notre collègue Olivier Lécluse, dont la disparition brutale en septembre 2020 nous a tous laissés orphelins.

Pour faire face au confinement et mettre en place des solutions pour les utilisateurs des serveurs SambaÉdu, nous avons intégré deux services majeurs qui nous ont permis d'organiser, autant que faire se peut, un suivi de nos classes « à distance ».

Un serveur de visioconférence

L'équipe de développement de SambaÉdu s'est rapprochée de la solution BigBlueButton qui propose une solution de serveur de visioconférence sous licence libre. Nous avons travaillé à la gestion de salons de visioconférences depuis les serveurs SambaÉdu, gestion basée sur des serveurs BigBlueButton. Cette solution nous permet d'organiser, de façon déconcentrée et totalement sécurisée, des rendez-vous avec nos classes pour assurer un suivi à distance. Déployée aujourd'hui dans plusieurs établissements, l'intégration de BBB à SambaÉdu permet l'équilibrage de charge entre plusieurs serveurs de visioconférences et l'Association SambaÉdu propose d'accompagner les établissements dans leur mise en place.

La problématique des cours à distance, tout particulièrement en mathématiques, est pointue. S'il est facile de diffuser des documents, de les commenter, de répondre aux questions des élèves, il est difficile d'écrire des maths dans une zone de texte, et encore plus difficile d'y faire écrire les élèves ! Pour qui s'est risqué à utiliser un tableau blanc numérique à la souris, inutile de préciser son aspect laborieux et son résultat décevant. C'est uniquement muni d'une petite tablette graphique que cela est concevable et reste malgré tout un pis-aller.



Un serveur d'accès aux ordinateurs du lycée

Le deuxième service mis en place et qui a permis aux étudiants de travailler, est la possibilité de prendre en main, à distance, des ordinateurs du lycée.

En effet, aucun étudiant ne dispose chez lui des licences d'utilisation des logiciels commerciaux qu'ils utilisent au lycée et qui sont souvent très chers. Parmi ces logiciels, on compte Solidworks et MatLab par exemple, mais aussi des ordinateurs connectés à des machines numériques et dotés de logiciels spécifiques.

L'équipe de SambaÉdu a donc intégré la solution Apache Guacamole à SambaÉdu, ainsi et uniquement à l'aide d'un navigateur web, un utilisateur peut allumer un poste de l'établissement, y ouvrir sa session et utiliser les logiciels qui y sont installés.

Du côté des étudiants

Quelles que soient les qualités et la puissance des solutions proposées, le confinement a été pour nos étudiants une période extrêmement difficile. Certes, certains jeunes se sont révélés derrière leur écran, plus qu'ils ne l'auraient peut-être fait au tableau, mais rien ne remplace l'échange en direct, le contact que nous avons avec nos élèves. Beaucoup de leurs incompréhensions nous échappent à distance.

Les résultats des concours 2020 pour ma classe ont été plutôt décevants, outre le temps perdu, le stress généré par la crise sanitaire ajouté aux complications de l'organisation des concours (changement de lieux des écrits, annulation des oraux . . .) a pesé lourd.

Cependant, au pays de Descartes et Voltaire, il ne faut renoncer ni au doute, ni à l'analyse, ni à la recherche. S'il faut bien sûr souhaiter que l'enseignement en présentiel reprenne toute sa place et son humaniste façon de transmettre un savoir, il faut aussi anticiper les prochaines crises afin de permettre à tous d'accéder à cette filière et d'y réussir.

Journée Maths Monde

Luca Agostino

Une journée Maths Monde

Comme tous les ans, à l'occasion de la semaine des Mathématiques, le groupe « Maths Monde » de l'IREM de Paris, organise une journée d'études sur l'enseignement des Mathématiques dans plusieurs pays du Monde.

Le thème retenu cette année sera : **les transformations géométriques**.

Un groupe IREM de « veille et recherche »

Le groupe « Maths Monde – Enseigner les mathématiques dans le monde » a trois activités principales :

— Préparation de la journée annuelle « Maths Monde ».

— Conception d'un document comparatif sur les différents systèmes scolaires dans le monde, et de fiches plus détaillées par pays sur la formation des enseignant · e · s, les carrières, l'organisation de l'enseignement des mathématiques, etc.

— Conception et animation du stage « Enseigner les mathématiques en anglais ».

Les participants au groupe de travail sont des enseignants, des formateurs, des universitaires ayant une expérience avérée de l'enseignement de leur discipline à l'étranger de part le fait d'y avoir vécu, d'y avoir travaillé, d'en connaître particulièrement bien la culture et la langue.

Tous les ans, le groupe se donne un thème de travail autour d'un ou plusieurs chapitres au programme de Mathématiques (suites, arithmétique, les triangles etc.) et travaille en cherchant les éléments didactiques spécifiques à chaque pays étudié : place dans les progressions, choix des notions abordées, énoncés, exercices . . .

Les résultats de ces recherches sont présentés lors de la Journée « Maths Monde » programmée le mercredi de la Semaine des Mathématiques.

Un tour du Monde 2021 à travers les transformations géométriques

La Journée Maths Monde 2021 aura lieu le mercredi 17 mars à l'université Paris Diderot (bâtiment Sophie Germain, amphi Turing) si les conditions sanitaires le permettront, pendant la Semaine des Mathématiques. En cas d'impossibilité d'être en présenciel, la journée se déroulera en ligne.

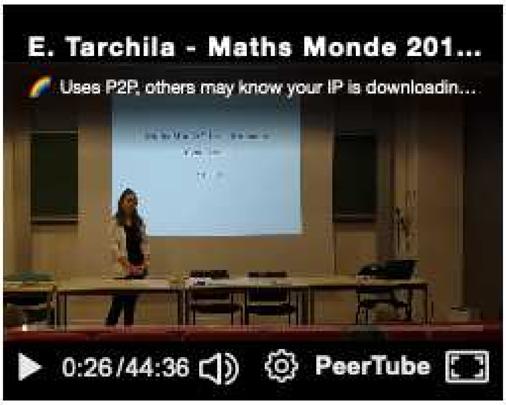
Le thème retenu est : « Transformations géométriques ».

Il y aura 7 exposés (Espagne et Amérique Latine, Russie, Italie, Allemagne, Royaume-Uni, Roumanie, Langue des signes, France). Chaque intervention sera filmée et les vidéos publiées sur le site officiel du groupe avec celles des années passées.

Chaque exposé présente un court résumé des caractéristiques principales des différents systèmes scolaires, des programmes de Mathématiques et un approfondissement sur le thème de l'année avec des extraits de manuels, des exercices résolus en direct dont au moins un dans la langue du pays et sans sous-titres !

Le dernier exposé, celui qui représente la France, est donné par une personnalité de pointe de la recherche mathématique et didactique française : cette année nous aurons l'honneur de clôre la journée par un exposé de Daniel Perrin.

La participation à la Journée « Maths Monde » est libre. Cette journée est proposée en inscription au PAF [5] des Académie de Paris et Versailles et pour information au PAF de l'Académie de Créteil.



Colloque « Mathématiques et langues vivantes »

En plus de ses trois activités principales, le groupe Maths Monde a entamé la préparation du colloque de mai 2020 « Mathématiques et langues vivantes: Sections européennes et autres dispositifs », organisé par l'IREM de Clermont-Ferrand et soutenu par l'ADIREM qui a été reporté à l'année 2021 (17 et 18 mai).

Ce colloque sera l'occasion d'aborder des thématiques variées autour de l'apprentissage des mathématiques dans une langue autre que le français, et de présenter les dispositifs existants permettant de mettre en oeuvre cet apprentissage.

5. Plan Académique de Formation

Un « labomath » au collège

Abdelwahab Touati, Stéphanie Caporali, Aurore Féries, Michel Suquet

Le projet « labomath »

Depuis deux ans, nous [6] avions envie de mettre en place un laboratoire de mathématiques comme cela nous a été recommandé par le rapport Villani-Torossian, ou encouragé par l'académie de Versailles, en allant plus loin qu'un simple club et offrir à nos élèves un temps pour pratiquer des mathématiques hors des cours classiques, que ce soit dans un but de remédiation, d'aide à faire un devoir ou un exercice, de préparation à des concours, de culture mathématique, de jeux mathématiques, ou tout simplement pour le plaisir.

Ce projet a été inclus dans le projet d'établissement en juin dernier et a été mis en oeuvre, enfin, au début du mois de novembre, tous les jeudis entre 12 h et 14 h dans la salle de permanence. Notre « labomath » était né !

Pour le financement du temps passé au « labomath », nous sommes rémunérés par le collège en HSE [7] : nous nous répartissons le temps passé par quinzaine, chaque professeur assurant l'encadrement d'une heure.

Dans les objectifs de ce projet « labomath », il est prévu de proposer aux élèves divers modules encadrés par les professeurs de mathématiques (remédiation, résolution d'énigmes et de problèmes, programmation, entraînement au concours Kangourou, aux Olympiades 3^{e} proposées par l'Académie de Versailles, préparation du Brevet, animations pour tous, jeux mathématiques . . .).

Ainsi, durant la période entre les vacances de la Toussaint et les vacances de Noël, nous avons commencé un module « remédiation » pour le lancement de notre projet : tous les élèves, sans inscription préalable, peuvent venir poser leurs questions, demander de l'aide pour faire un exercice ou un devoir, recevoir une explication supplémentaire, corriger une évaluation . . . Une affiche a été créée pour inciter les élèves à s'y rendre.

6. nous sommes quatre professeurs titulaires dans notre collège, avec certaines années l'accompagnement professionnel d'un professeur-stagiaire

7. Heures Supplémentaires Effectives

Les débuts ont été timides mais le « bouche à oreille » fait son travail souterrain et les suggestions aux parents lors de nos différentes réunions parents/professeurs commencent à porter leurs fruits : des élèves viennent maintenant régulièrement au « labomath ».

Mais nous n'étions pas satisfaits du nombre d'élèves qui étaient peu nombreux à profiter de notre projet. Comment faire passer notre message auprès des élèves et des familles ? Nous avons eu alors l'idée de mettre en oeuvre une animation sous forme de challenges.

La course aux nombres

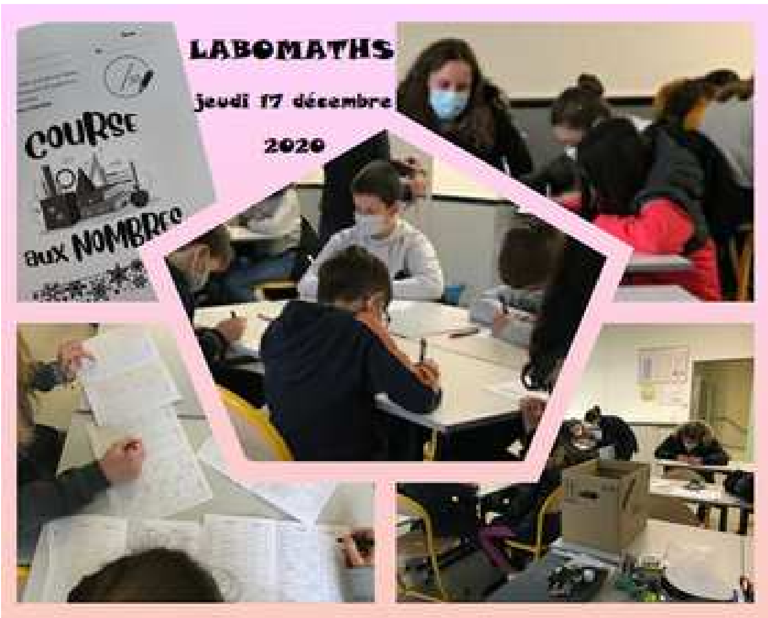
Le jeudi 17 décembre entre 12 h et 14 h durant le « labomath », nous avons proposé une 1^{re} animation et plus de 40 élèves de 6^e et 5^e ont répondu présent pour participer au challenge de la Course aux Nombres – la remédiation quant à elle avait aussi lieu pour les élèves demandeurs.

La course aux nombres est un concours créé par le service pédagogique de l'AEFE (Agence pour l'Enseignement Français à l'Étranger). Plusieurs académies, dont celle de Versailles participent à l'élaboration des sujets du concours officiel. Pour notre animation, nous nous sommes inspirés de ce concours, que nous avions proposé à nos élèves les années passées.

L'épreuve consistait à répondre à 30 questions d'activités mentales en 7 minutes. Les calculs écrits intermédiaires n'étaient pas autorisés. Automatismes géométriques et numériques . . . Les méninges en pleine action !

Les élèves convoqués à différents créneaux (groupe de 4 – 5) étaient impatients de commencer. La tension était palpable, les calculatrices cérébrales « en mode on », stylo à la main prêts à en découdre. Les professeurs donnaient le top départ. Incroyable, c'est avec une grande rapidité que les dix premières questions étaient résolues, mais les mathématiques sont parfois impitoyables ! En effet, la suite devenait plus difficile, traduite par les mouvements du stylo de moins en moins actifs. Les hochements de tête montraient les hésitations sur les dernières questions, mais le temps lui était fluide, continu et les minutes passaient. Le moment était venu de connaître son score.

Pour cela, une dizaine d'élèves de 4^e s'étaient portés volontaires pour tutorer un groupe et corriger les copies. Quelques minutes plus tard, ils annonçaient les scores et les champions de chaque groupe. On entendait, « mince je le savais » ou « purée je me suis trompé de signe » ou encore « pourquoi je n'ai pas répondu à celle-là, j'ai passé trop de temps sur la fin ! ».



Les élèves sont tous repartis avec un grand sourire et un petit cadeau de remerciement pour leur participation et leur enthousiasme. Et depuis, nous avons reçu des messages d'élèves et parents pour participer aux prochains challenges et venir les jeudis midi pour la remédiation ; inciter un plus grand nombre d'élèves à venir au « labomath » était d'ailleurs un des objectifs de cette animation.

Autres projets

De janvier à mars, un autre cycle va débuter avec la préparation à des concours que nous proposons à nos élèves (Olympiades, Kangourou) mais aussi l'accueil d'élèves pratiquant le Rubik's Cube ou d'autres jeux ayant de fortes affinités avec les mathématiques.

Bien entendu, nous continuerons en parallèle la remédiation pour les élèves demandeurs.

Nous proposerons aussi des animations comme celle de décembre, à la veille de chaque vacances, pour le plaisir de se retrouver à faire des mathématiques.

Grilles de nombres croisés en Terminale S

Serge Seguin

Un simple jeu au départ ...

Enseignant les mathématiques jusqu'à l'an dernier, en particulier en Spécialité de Terminale S, j'avais fabriqué des grilles de Nombres Croisés, en m'appuyant sur les notions d'arithmétique du programme. Les définitions se réfèrent plus particulièrement aux puissances d'entiers.

Ces grilles étaient proposées au départ comme un simple jeu de fin de cours, mais j'ai eu l'agréable surprise d'un retour très positif de la part de nombreux élèves, qui me demandaient ensuite par message de vérifier leurs solutions et me réclamaient d'autres grilles ...

Une approche ludique de l'arithmétique

Les Nombres Croisés sont fréquemment utilisés en Primaire pour permettre aux écoliers une approche ludique des nombres, mais ici les définitions étaient plus dirigées vers le niveau Lycée avec peu ou pas de cases noires.

Les grilles existantes vues sur Internet (en particulier en anglais sous le nom de Cross Numbers Puzzle) sont le plus souvent de grands tableaux contenant de très nombreuses cases noires et sont ainsi souvent des questions indépendantes, n'utilisant pas les riches possibilités de raisonnement que les grilles de nombres croisés sans cases noires permettent.

Dès que le « joueur » a envie de compléter une grille, il va être appelé à (re)voir et approfondir certaines notions d'arithmétique : critère de divisibilité, division euclidienne, nombre de diviseurs, nombre premier, puissances, nombres premiers entre eux, et aussi anagrammes et palindromes ...

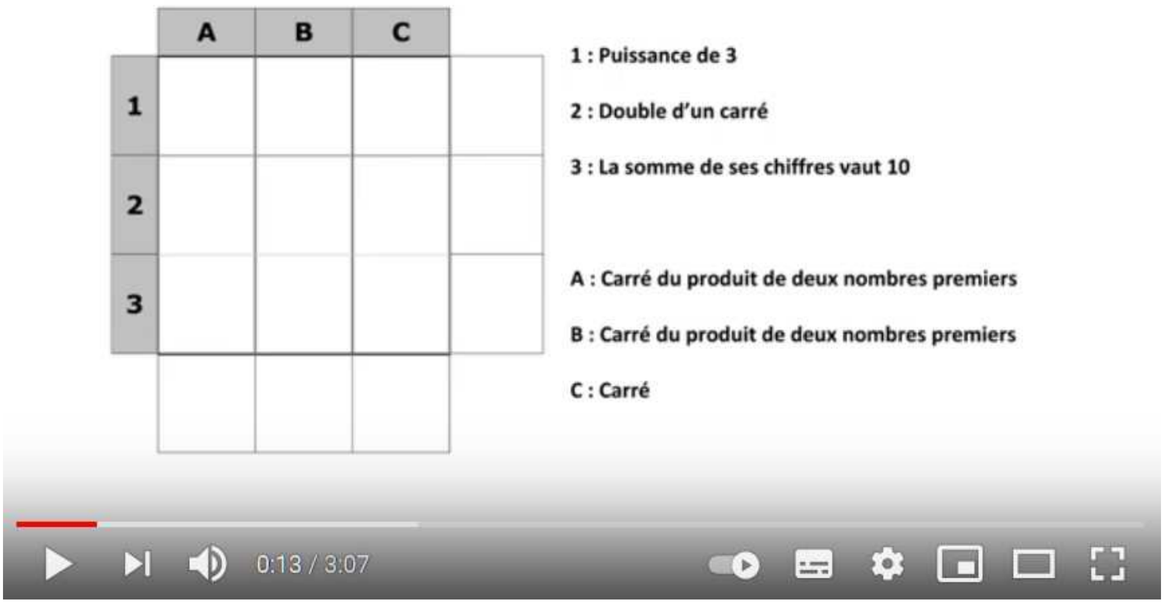
Ainsi, il progresse sur le sujet « sans s'en rendre compte », non pas seulement parce qu'il doit apprendre son cours, mais parce qu'il veut compléter les grilles de nombres croisés, ce « jeu » étant, aux dires même des élèves, très addictif !

L'arithmétique est un chapitre riche en raisonnements originaux, mais qui parfois peut surprendre les élèves par les méthodes inhabituelles mises en oeuvre. Ainsi, aborder l'arithmétique sous forme de jeu ne peut être que bénéfique pour une bonne compréhension des notions abordées. La réforme du Lycée permet de continuer cette activité avec les élèves de l'Option mathématiques expertes.

Une chaîne YouTube

Je me suis donc lancé, la retraite aidant, dans la constitution de nombreuses grilles (environ 400), avec ou sans cases noires, avec des « contraintes » diverses.

En attendant une hypothétique publication, j'ai importé quelques grilles sur ma chaîne YouTube, avec solutions commentées. Des tableaux de puissances sont proposés, équivalents du dictionnaire pour les mots croisés ...



Grille de Nombres Croisés n°1 par Nombres Croisés et Puissances

Voici les premières grilles proposées : pour chaque grille, la ligne en dessous et la colonne à droite permettent de noter les possibilités intermédiaires.

N'hésitez pas à me faire toutes remarques que vous jugerez utiles.

Le Palais en travaux . . .

Robin Jamet

Des travaux indispensables

Le Palais de la découverte (ainsi que l'intégralité du Grand Palais) a fermé ses portes pour travaux fin octobre.

salle pi

À ce jour, sa réouverture dans un Grand Palais rénové est prévue pour le printemps 2025. Ces travaux ne sont pas sans faire peser quelques incertitudes sur l'avenir de l'établissement, et suscitent beaucoup d'inquiétudes de la part de ses personnels. Mais ils apparaissent indispensables vu l'état de vétusté du bâtiment.

Continuer à accueillir du public

Pendant la fermeture, une offre très restreinte en quantité sera proposée à côté du parc André Citroën, dans le 15e arrondissement. Les trois salles d'exposés et le planétarium devraient commencer à recevoir du public en mai 2021. En ce qui concerne les mathématiques, des créneaux seront proposés à la réservation un jour par semaine pour les scolaires, ainsi qu'un week-end sur deux et un jour par semaine pendant les vacances scolaires pour le grand public.

Réfléchir à une nouvelle offre

Pendant cette longue période de fermeture, les médiateurs, situés dans des bureaux à côté de la Cité des Sciences et de l'Industrie, travailleront sur le futur Palais de la découverte : quels espaces pour quelle offre d'exposés, quelles expositions, quels thèmes, quels objets emblématiques ? Ce travail de longue haleine ne peut se faire qu'en collaboration avec des personnes extérieures, dont des enseignants qui seront, nous l'espérons, parmi les futurs visiteurs et usagers de ce nouveau palais.

Pendant le confinement, l'équipe de mathématiques a commencé à collecter et présenter des idées, soumises aux avis de personnes expertes ou non du domaine. Par exemple, nous aimerions que la salle d'exposés de mathématiques du Palais 2025 soit organisée autour d'un "cabinet de curiosités", que les visiteurs puissent explorer en autonomie et que les médiateurs puissent utiliser comme support pendant leurs exposés. Une collecte de « curiosités » a ainsi commencé, notamment via la chaîne du "Myriogon", et elle continue activement !

[17h !] Cabinet de curiosités mathématiques avec Robin, Laure et Guillaume - Myriogon #15
par Mickaël Launay

Un « labo de la médiation »

Par ailleurs, une nouvelle structure s'est créée au sein des équipes du Palais de la découverte pour travailler à son futur : le « labo de la médiation », pour tester et co-concevoir.

L'objectif est d'intégrer des publics, experts ou non, dans la conception de nouvelles médiations de toutes sortes. Simple retour critique sur une offre en construction de la part d'un public « cobaye » et volontaire, réflexion très en amont sur une idée de manipe ou de thème que nous aimerions présenter, plutôt avec des connaisseurs du contenu scientifique concerné, ou encore réflexions à des solutions pratiques avec un public de techniciens, de programmeurs, de bidouilleurs en tous genres.

Avant la Covid, nous avions en tête un lieu permettant des rencontres autour de prototypes, ce qui semble aujourd'hui bien difficile à organiser. D'où le glissement actuel vers une proposition en ligne, en attendant mieux, qui devrait être lancée prochainement. Soyez attentifs à notre site Internet si vous êtes intéressés, et n'hésitez pas à nous contacter à l'adresse du labo de médiation !

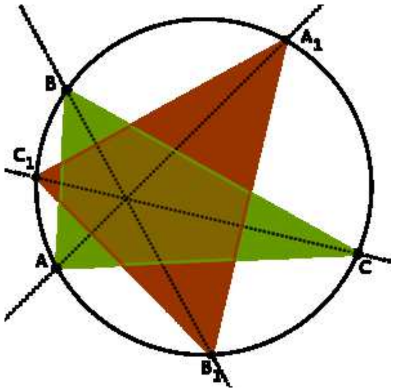
Et à bientôt « en vrai » pour des rencontres festives et instructives autour du projet du futur Palais !

Avis de recherche

Alain Bougeard

Dans le numéro 185 des *Chantiers* de juin 2020, Georges Camguilhem avait proposé une « Itération dans le triangle » dont voici l'énoncé :

> Soit un triangle ABC inscrit dans un cercle.
> La bissectrice de l'angle $\widehat{A}$ coupe le cercle en A_1, celle de l'angle $\widehat{B}$ en B_1 et celle de l'angle $\widehat{C}$ en C_1.
> On réitère sur le triangle $A_1B_1C_1$et on obtient ainsi une suite de triangles $(A_nB_nC_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ayant comme forme limite un triangle. . . ? équilatéral . . . ?



Après une première étude à l'aide de GeoGebra et une résolution matricielle parues dans le n° 186 d'octobre 2020, voici un nouvel éclairage sur cet avis de recherche :

Solution de Pierre Delezoide :

Soient A, B, C formant un triangle direct sur le cercle, avec des angles polaires a, b, c où $a < b < c$ et $(c-a) < 2\pi$.

La bissectrice intérieure en A recoupe le cercle en A' dont un angle polaire est $\dfrac{b+c}{2}$, la bissectrice intérieure en C recoupe le cercle en C' dont un angle polaire est $\dfrac{a+b}{2}$. Pour obtenir le point B', il faut prendre la moitié de l'arc entre A et C qui ne contient pas B. On ne va pas de C d'angle polaire c à A d'angle polaire a, mais à A d'angle polaire $a+2\pi$ et B' est au milieu du parcours, avec un angle polaire $\dfrac{(a+2\pi)+c}{2}$.

En procédant de même pour les bissectrices extérieures, ou en considérant que les angles polaires des points sont les symétriques de A', B' et C' par rapport au centre, on obtient les points A_1, B_1 et C_1 d'angles polaires qu'on peut, modulo 2π, fixer à :

$$a_1 = \frac{b+c}{2} - \pi \qquad b_1 = \frac{a+c}{2} \qquad c_1 = \frac{a+b}{2} + \pi$$

On vérifie facilement $a_1 < b_1 < c_1$ et $c_1 - a_1 < 2\pi$.

Quand on itère, on définit trois suites a_n, b_n et c_n telles que $a_n < b_n < c_n$, $c_n - a_n < 2\pi$, vérifiant :

$$a_{n+1} = \frac{b_n+c_n}{2} - \pi \qquad b_{n+1} = \frac{a_n+c_n}{2} \qquad c_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} + \pi$$

Par conséquent, la somme $a_n + b_n + c_n$ est constante – soit s cette somme – et on obtient :

$$c_{n+1} - b_{n+1} = \pi - \frac{c_n - b_n}{2} \qquad b_{n+1} - a_{n+1} = \pi - \frac{b_n - a_n}{2}$$

Les suites $(c_n - b_n)$ et $(b_n - a_n)$ sont convergentes vers le point fixe $\frac{2\pi}{3}$.

Donc, comme : $3b_n = (a_n + b_n + c_n) + (b_n - a_n) - (c_n - b_n)$, on en déduit :

$$b_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{s}{3} \qquad a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{s}{3} - \frac{2\pi}{3} \qquad c_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{s}{3} + \frac{2\pi}{3}$$

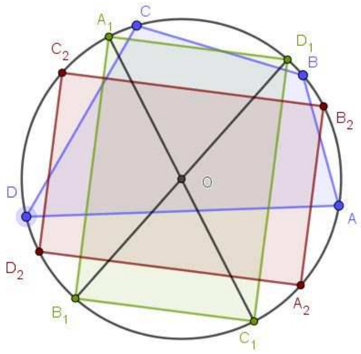
Le triangle correspondant converge vers un triangle équilatéral direct, le point B_n converge vers le point d'angle polaire $\frac{a+b+c}{3}$.

Le triangle obtenu avec les bissectrices intérieures va pour les indices pairs converger vers ce triangle équilatéral, et pour les indices impairs vers son symétrique par rapport au centre.

Et ensuite ...

Parmi les nombreuses généralisations proposées par Georges Camguilhem, que se passe-t-il si l'on remplace le triangle par un polygone à n côtés ?

Le cas $n = 4$ est particulièrement intéressant.

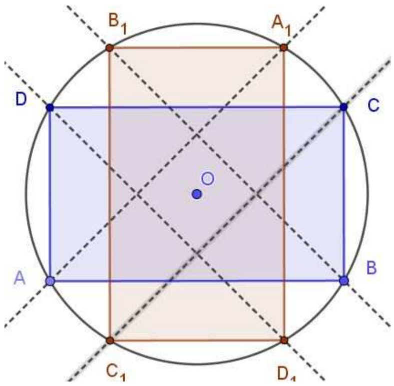


Soit le quadrilatère (inscriptible) $ABCD$ dont les sommets ont pour angles polaires a, b, c et d vérifiant $a < b < c < d$ et $(d - a) < 2\pi$.

En reprenant le raisonnement de Pierre Delezoide nous allons avoir un problème car, dans le quadrilatère $ABCD$ par exemple, le point A_1 dont un angle polaire est $\frac{b+d}{2}$ représentera l'intersection du cercle avec la bissectrice intérieure ou extérieure selon que l'angle $\widehat{BAD}$ est aigu ou obtus.

Mais cet inconvénient devient un avantage si l'on remarque que les angles $\widehat{BAD}$ et $\widehat{BCD}$ sont supplémentaires et par conséquent les points A_1 et C_1 sont symétriques par rapport à O le centre du cercle. Il en est de même pour les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ADC}$ donc les points B_1 et D_1 sont également symétriques par rapport à O.

Ainsi, le quadrilatère $A_1B_1C_1D_1$ est un parallélogramme et, comme ses diagonales ont même longueur (le diamètre du cercle), c'est un rectangle.



Si l'on continue à partir de ce rectangle, l'abondance d'angles droits, d'angles de 45° et de droites parallèles permet de prouver que l'image est un rectangle par une transformation conforme avec un point O invariant, qui conserve globalement les dimensions du rectangle mais qui n'est pas une isométrie (sauf dans le cas du carré) puisque la longueur AB n'est pas égale à la longueur A_1B_1 !

Mais qu'est-ce alors ?

Nous continuerons dans le prochain numéro les généralisations proposées par Georges.

Avis de recherche d'octobre 2020

Dans le numéro 186 des Chantiers d'octobre 2020, nous avions proposé :

> Sur les développements décimaux de quelques inverses ...
>
> $\dfrac{1}{9^2} = \dfrac{1}{81} = 0,\overline{012345679}$
>
> $\dfrac{1}{99^2} = \dfrac{1}{9\,801} = 0,\overline{000102\ldots9799}$
>
> $\dfrac{1}{999^2} = \cdots$
>
> Et ensuite ?

Pierre Delezoide nous propose la démonstration suivante :

Si n est premier avec 10, la périodicité du développement décimal de $\dfrac{1}{n}$ est l'ordre multiplicatif de 10 modulo n ; de plus la périodicité commence au premier rang.

Si : $\dfrac{1}{n} = 0,\overline{a_1\ldots a_p}\ldots$ alors $\dfrac{10^p}{n} = \overline{a_1\ldots a_p} + 0,\overline{a_1\ldots a_p}\ldots = \overline{a_1\ldots a_p} + \dfrac{1}{n}$, on obtient ainsi la séquence répétée comme écriture de $Q_p = \dfrac{10^p - 1}{n} = \overline{a_1\ldots a_p}$.

Pour résumer, la période est le premier entier p tel que Q_p soit entier et la séquence de chiffres répétée est l'écriture de l'entier Q_p. Cette écriture doit avoir pour longueur p et doit donc être complétée par des 0 en tête le cas échéant, c'est-à-dire si $n > 10$.

Ici $n = (10^s - 1)^2$ est bien premier avec 10. On cherche les entiers k tels que$(10^s - 1)^2$ divise $(10^k - 1)$. Une CN (condition nécessaire) est que $10^s - 1$ divise $10^k - 1$.

Si $k = qs + r$ (division euclidienne par s) alors : $10^k - 1 = (10^{qs} - 1)10^r + 10^r - 1$

Comme $10^{qs} = (10^s)^q \equiv 1^q$ modulo $10^s - 1$, la CN est vérifiée ssi $10^s - 1$ divise $10^r - 1$. Cela n'est possible que si$r = 0$ car $r < s$ donc $10^r - 1 < 10^s - 1$.

La CN est donc vérifiée si et seulement si $k = sh$. Dans ce cas, en posant $n_s = 10^s - 1$:

$$10^k - 1 = (10^s)^h - 1 = (n_s + 1)^h - 1 = \sum_{q=1}^{h} \binom{h}{q} n_s^q = n_s^2 \sum_{q=2}^{h} \binom{h}{q-2} + h n_s$$

Par conséquent n_s^2 divise $10^k - 1$ ssi n_s divise h. La période cherchée est donc sn_s.

Pour obtenir la séquence répétée, on calcule le quotient $Q = \dfrac{10^{sn_s} - 1}{n_s^2}$ en utilisant l'identité remarquable :

$$x^m - 1 = (x - 1)\left(x^{m-1} + \ldots + 1\right) \quad \text{où} \quad x = 10^s, \quad x - 1 = n_s, \quad m = n_s$$

ce qui donne :

$$Q = \frac{(10^s)^{n_s} - 1}{n_s^2} = \frac{n_s \sum\limits_{h=0}^{n_s-1} (n_s + 1)^h}{n_s^2} = \frac{\sum\limits_{h=0}^{n_s-1} (n_s + 1)^h}{n_s}$$

Le numérateur est une somme de n_s termes donc :

$$Q = 1 + \frac{\sum\limits_{h=0}^{n_s-1} (n_s + 1)^h - 1}{n_s} = 1 + \frac{\sum\limits_{h=1}^{n_s-1} (n_s + 1)^h - 1}{n_s}$$

En procédant comme dans la première simplification :

$$Q = 1 + \sum_{h=1}^{n_s-1} \sum_{k=0}^{h-1} (n_s + 1)\, k = 1 + \sum_{0 \leqslant k < h < n_s} (10^s)^k = 1 + \sum_{k=0}^{n_s-1} (n_s - k - 1)\,(10^s)\, k$$

L'écriture de Q doit être de longueur sn_s ; les chiffres peuvent être regroupés en n_s paquets de longueur s, ce qui correspond à la somme qui donne Q. Si on lit cette écriture de gauche à droite, il faut faire décroître k de $n_s - 1$ à 0. Le premier paquet ne contient que des 0, ce qui est attendu, le second est l'écriture de 1 mais précédée de $p - 1$ zéros, etc. l'avant dernier correspondant à $k = 1$ est l'écriture de $n_s - 2 = 10^s - 3 = 9\ldots97$ et le dernier, correspondant à $k = 0$, est l'écriture de $n_s - 1$ mais à laquelle il faut ajouter le 1, ce qui donne $9\ldots98 + 1 = 9\ldots99$.

Généralisation :

développement de $\dfrac{1}{(10^s - 1)^k}$?

Daniel Perrin nous propose une démonstration plus structurée en lemme, théorème et des esquisses de corollaires :

Le théorème

> Le développement décimal de l'inverse du nombre $x_n = (99\ldots9)^2$, avec n chiffres 9, est de la forme $0,AA\ldots A\ldots$ où la période A est la suite de chiffres :
> $00\ldots00, 00\ldots01, 00\ldots02, \quad \ldots \quad 99\ldots96, 99\ldots97, 99\ldots99$
> c'est-à-dire la suite de tous les $10^n - 1$ paquets de n chiffres allant de $00\ldots000$ à $99\ldots999$ à l'unique exception de $99\ldots998$.

La preuve

Notons déjà que l'on a $99\ldots9 = 10^n - 1$ si le premier membre admet n chiffres 9.

On appelle a l'entier qui correspond à l'écriture A en système décimal :

$$a = \sum_{p=1}^{10^n-3} p10^{n\times(10^n-p-2)} + 10^n - 1$$

La différence entre a et A est la présence de $2^n - 1$ zéros en tête de A.

Le point crucial est de montrer le lemme :

$$\boxed{\text{On a la formule : } a \times (10^n - 1) = \sum_{k=0}^{10^n-2} 10^{nk} := S.}$$

Le premier membre s'écrit : $a \times (10^n - 1) = \sum_{p=1}^{10^n-3} \left(p10^{n(10^n-p-1)} - p10^{n(10^n-p-2)}\right) + (10^n - 1)^2$.

Le premier terme du premier membre ($p = 1$) donne le terme $10^n\,(10^n - 2)$ de S.

Ensuite, dans les termes correspondant à p et $p+1$, le terme en $10^n\,(10^n - p - 2)$ a pour coefficient $p+1-p$, donc 1. Avec tous les termes de $p = 1$ à $10^n - 3$, à l'exception de la deuxième moitié du dernier terme, on obtient la somme $\sum_{k=2}^{10^n-2} 10^{nk}$.

Il reste à regarder les termes de la fin. Le seul terme restant de la somme est $-(10^n - 3)\,10^n$. Avec le terme supplémentaire $(10^n - 1)^2 = 10^{2n} - 2 \times 10^n + 1$, on obtient $10^n + 1$ et on a le résultat.

On peut alors prouver le théorème.

Considérons le nombre y_n donné par le développement décimal périodique $0, AA\ldots A\ldots$. Il s'agit de montrer qu'on a $y_n = \dfrac{1}{x_n}$. La période A comporte $N = n \times (10^n - 1)$ chiffres. En multipliant le développement par 10^N (voir par exemple[8] Remarques 2.29) on sort une période et on a : $10^N y_n = a, AA\ldots A\ldots = a + y_n$, autrement dit $\left(10^N - 1\right) y_n = a$ et on aura le résultat si l'on montre que l'on a : $10^N - 1 = ax_n$.

Mais l'identité $u^r - 1 = (u-1)\left(1 + u + \cdots + u^{r-1}\right)$, appliquée avec $u = 10^n$ et $r = 10^n - 1$ donne :

$$10^N - 1 = (10^n - 1)\left(1 + 10^n + 10^{2n} + \cdots + 10^{n\times(10^n-2)}\right) = (10^n - 1)\,S$$

et le lemme donne le résultat, après simplification du facteur $10^n - 1$.

Remarques

— Pour d'autres résultats amusants sur les quatre-vingt-unièmes, voir la page « Un joli problème d'arithmétique »

— L'avis de recherche demandait de proposer d'éventuelles généralisations : je n'en ai pas trouvé de pertinentes (hormis la variante du théorème dans une autre base, mais elle n'est pas très exaltante). Ainsi, le développement de $\dfrac{1}{9^3}$ admet une période de longueur 81 dont la régularité ne saute pas aux yeux.

8. Perrin Daniel, Mathématiques d'école, Cassini, 2011

Et un nouvel Avis de Recherche pour Noël...

En l'an de grâce deux-mil-dix-neuf, avant le couronnement du virus, 2019 mathématiciens tenaient congrès.
Mathématiquement ils s'appelaient $M_1, M_2, \dots M_{2019}$.
N'étant pas tenus de garder les distances sociales, ils s'étaient serrés la main à la façon des mathématiciens c'est-à-dire que M_1 avait serré une main, M_2 deux, M_3 trois, $\dots$ et M_{2018} deux-mille-dix-huit.
Mais combien M_{2019} avait-il serré de mains ?

Pour cet avis de recherche, ainsi que des compléments sur des avis précédents, écrivez-nous à l'adresse des problèmes des Chantiers.

Comment contribuer aux Chantiers ?

Le Comité de la Régionale

Pour contribuer aux Chantiers de Pédagogie Mathématique, c'est très simple : vous nous faites parvenir un texte avec des liens et des images sur un thème de votre choix.

Cela doit concerner évidemment les mathématiques, de la maternelle à l'université, que ce soit d'un point de vue pédagogique ou culturel. Une consultation des différents numéros publiés vous montrera la richesse et la diversité des thèmes abordés.

Partager, échanger, informer, susciter des réflexions et des débats font partie des objectifs des Chantiers ; et il n'est pas nécessaire d'être adhérent à l'APMEP pour contribuer.

À vos plumes numériques !