
JOURNÉE 2023
tangente
au Musée des arts et métiers
Dimanche 3 décembre
de 10 h à 18 h

Dans le journal Le Monde, le 21 novembre 2023 :

Gilles Cohen, créateur d’énigmes et infatigable passeur de mathématiques, est mort

Le triangle de Pascal et l'arbre de Stern-Brocot

Jean-Paul Delahaye
Professeur émérite à l'Université de Lille
CRISTAL : Centre de recherche en informatique, signal et automatique de Lille,
UMR 9189 **CNRS**

Journée Tangente du 3 décembre 2023

La suite de Stern-Brocot possède une définition simple
tout en présentant une structure complexe.
Elle est le nœud central d'un vaste réseau de relations
dont on découvre chaque année de nouveaux prolongements

Un meilleur titre à mon exposé aurait pu être :

Suite de Stern-Brocot, suite de Fibonacci, triangle de Pascal, numération binaire, et énumération des nombres rationnels, ...

Tout le monde connaît la suite de Leonardo Fibonacci, définie par :

$$f_0 = 0 \qquad f_1 = 1 \qquad f_{n+2} = f_n + f_{n+1} \quad \text{pour } n \geq 0$$

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...

Elle apparaît dans des contextes variés et possède une multitude de propriétés remarquables au point qu'une revue de mathématiques s'occupe uniquement d'elle :

http://www.fq.math.ca/

Cette merveille arithmétique a **une sœur**, moins célèbre :

la suite de Stern-Brocot ,

ou ***série diatomique de Stern*** ou ***fonction fusc***.

Sa définition ressemble à Fibonacci :

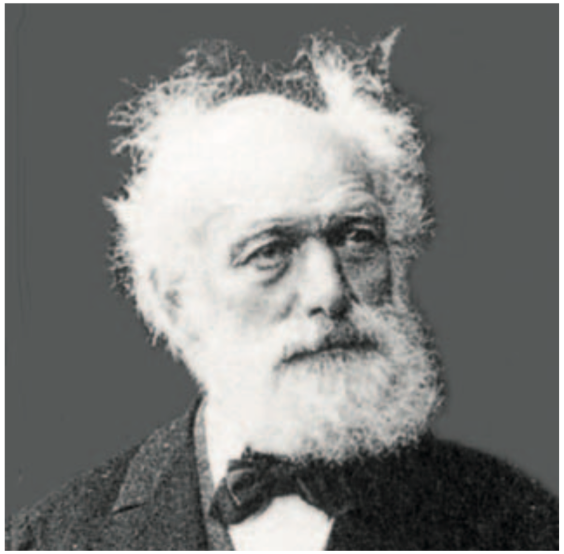
$$s_0 = 0 \qquad s_1 = 1 \qquad s_{2n} = s_n \qquad s_{2n+1} = s_n + s_{n+1} \quad \text{pour } n \geq 1$$

- si *m* est pair, on regarde sa valeur en *m* /2,

- et si *m* est impair, on coupe *m* en deux parties presque égales,
  on regarde ce qui s'y passe, et on additionne.

L'adjectif *diatomique* provient de la formule $s_{2n+1} = s_n + s_{n+1}$ qui signifie que les termes de la suite naissent de la somme de deux termes — ou atomes — précédents.

Son nom provient du mathématicien allemand Moritz Stern qui est le premier à l'avoir étudiée dans un article de 1858.



Moritz Stern (1807-1894)

Achille Brocot (1817-1878) était horloger et mathématicien. Il a indirectement considéré cette suite (et en particulier l'arbre associé) au sujet du calcul des engrenages.

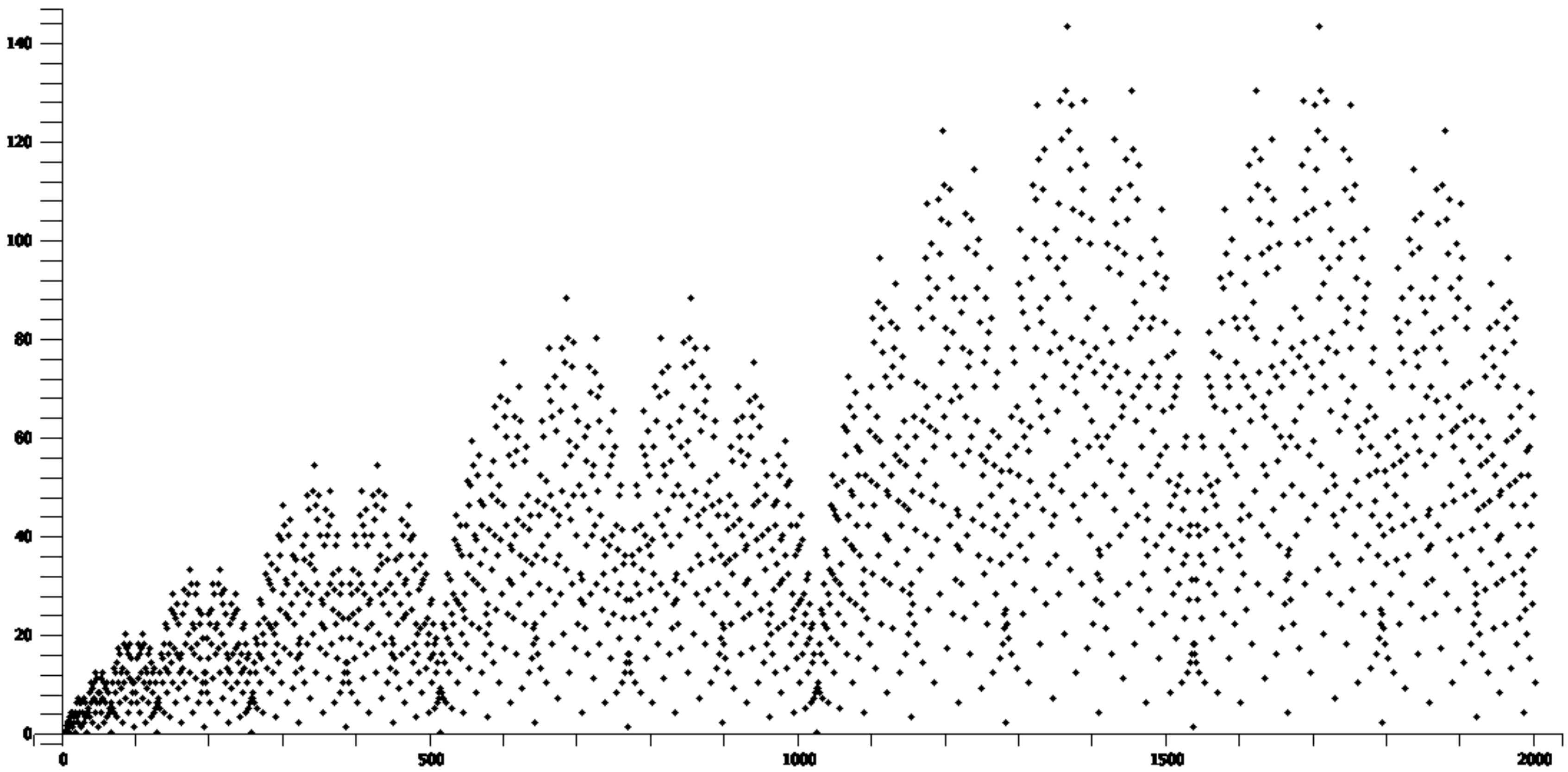
0	1	1	2	1	3	2	3	1	4
3	5	2	5	3	4	1	5	4	7
3	8	5	7	2	7	5	8	3	7
4	5	1	6	5	9	4	11	7	10
3	11	8	13	5	12	7	9	2	9
7	12	5	13	8	11	3	10	7	11
4	9	5	6	1	7	6	11	5	14
9	13	4	15	11	18	7	17	10	13
3	14	11	19	8	21	13	18	5	17
12	19	7	16	9	11	2	11	9	16

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	1	2	1	3	2	3	1	4
1	3	5	2	5	3	4	1	5	4	7
2	3	8	5	7	2	7	5	8	3	7
3	4	5	1	6	5	9	4	11	7	10
4	3	11	8	13	5	12	7	9	2	9
5	7	12	5	13	8	11	3	10	7	11
6	4	9	5	6	1	7	6	11	5	14
7	9	13	4	15	11	18	7	17	10	13
8	3	14	11	19	8	21	13	18	5	17
9	12	19	7	16	9	11	2	11	9	16
10	7	19	12	17	5	18	13	21	8	19
11	11	14	3	13	10	17	7	18	11	15
12	4	13	9	14	5	11	6	7	1	8
13	7	13	6	17	11	16	5	19	14	23
14	9	22	13	17	4	19	15	26	11	29
15	18	25	7	24	17	27	10	23	13	16
16	3	17	14	25	11	30	19	27	8	29
17	21	34	13	31	18	23	5	22	17	29
18	12	31	19	26	7	23	16	25	9	20
19	11	13	2	13	11	20	9	25	16	23

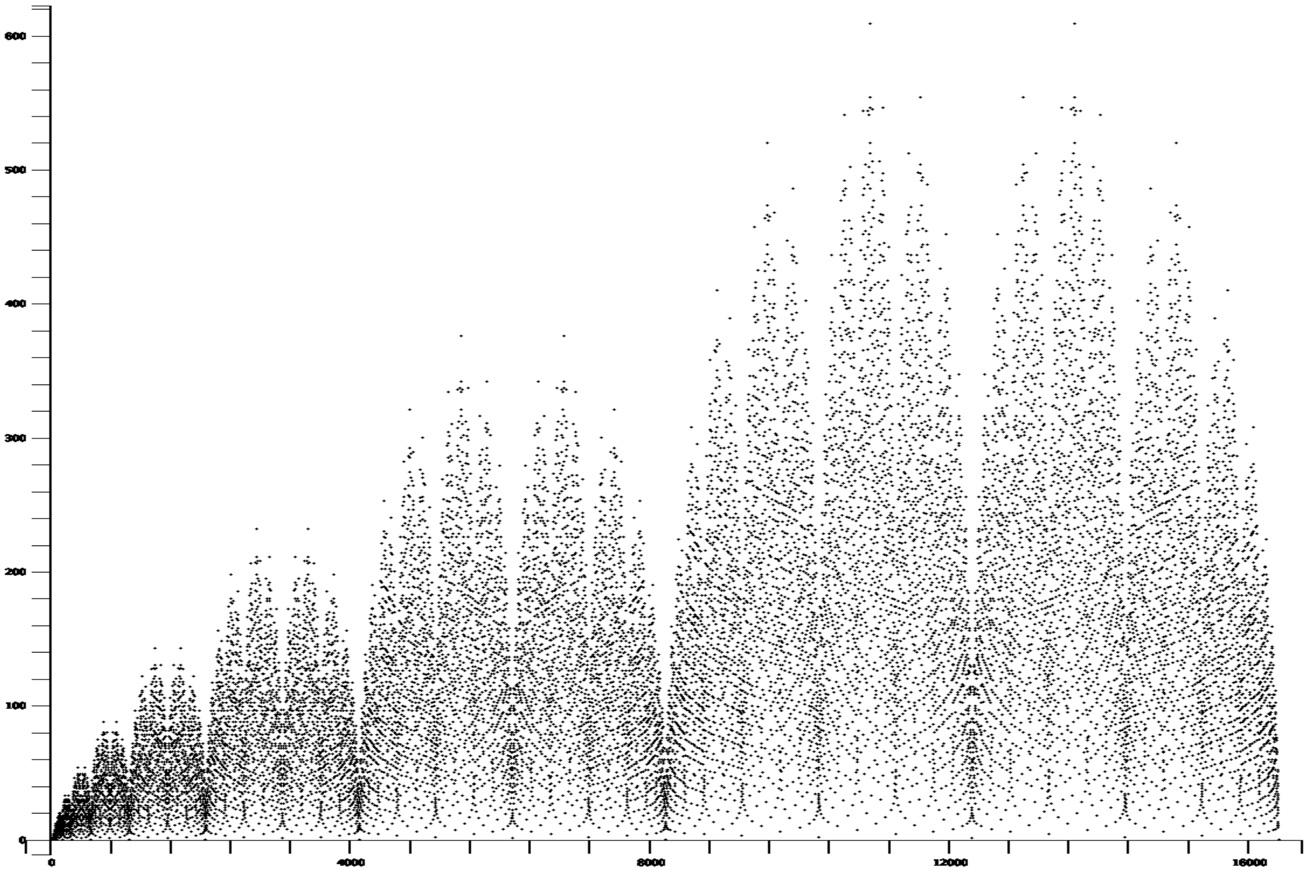
Encyclopédie des suites numériques de Neil Sloane : A002487

Le graphe est un peu plus parlant.

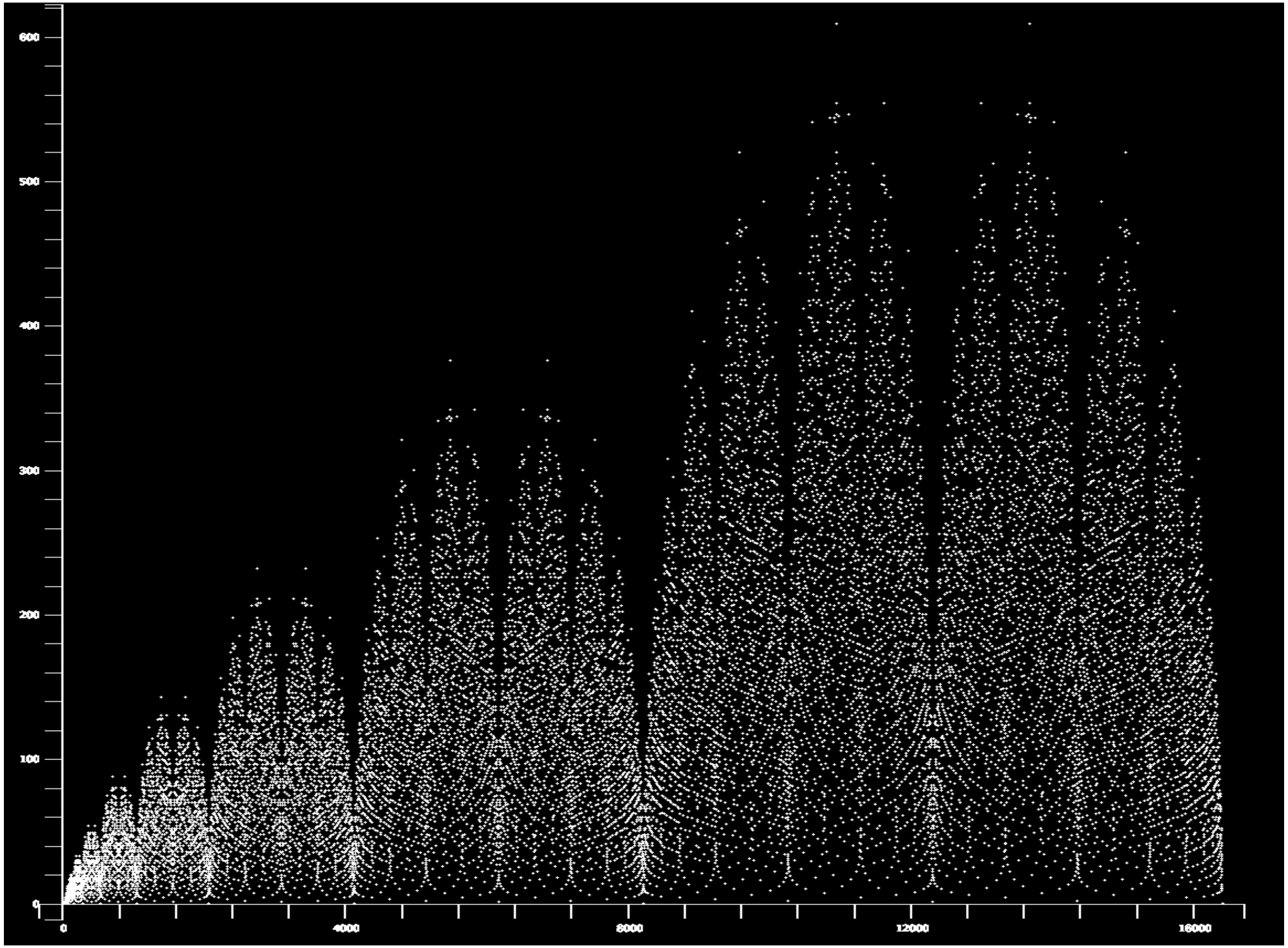
On y perçoit des régularités et un même un aspect fractal.



Jusqu'à 2000



Jusqu'à 20000


600
500
400
300
200
100
0
0
4000
8000
12000
16000

Plusieurs méthodes pour en disposer les termes.

Première disposition ***Tableau tassé de Stern***

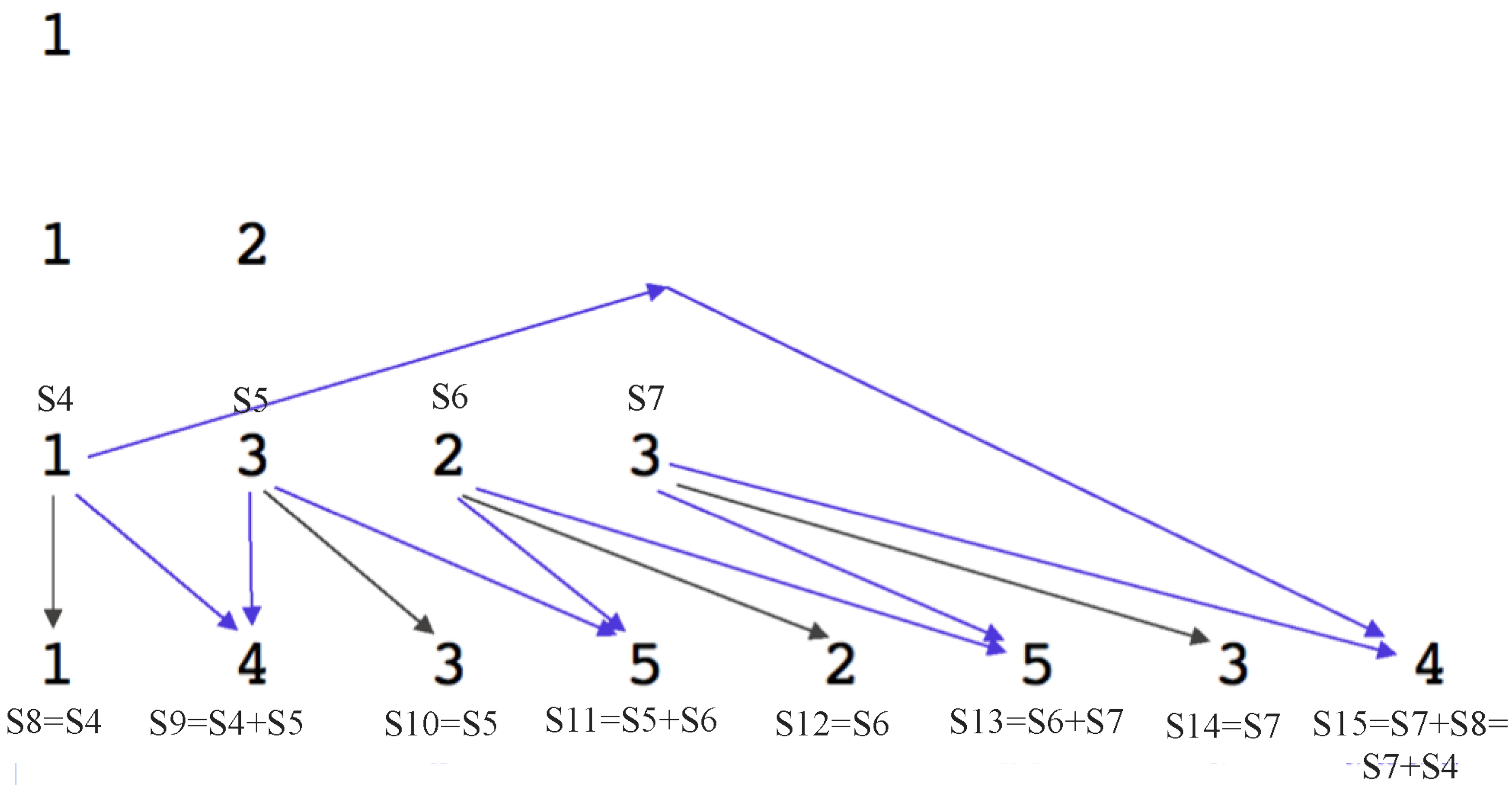
- on oublie le 0 du début ;

- on fait des retours à la ligne après 1 terme, 2 termes, 4 termes, 8 termes, etc.

```
1
1  2     somme = 3
1  3  2  3           somme = 9
1  4  3  5  2  5  3  4           somme = 27
1  5  4  7  3  8  5  7  2  7  5  8  3  7  4  5     somme 81
1  6  5  9  4 11  7 10  3 11  8 13  5 12  7  9  2  9  7 12  5 13 ...
1  7  6 11  5 14  9 13  4 15 11 18  7 17 10 13  3 14 11 19  8 21 ...
1  8  7 13  6 17 11 16  5 19 14 23  9 22 13 17  4 19 15 26 11 29 ...
1  9  8 15  7 20 13 19  6 23 17 28 11 27 16 21  5 24 19 33 14 37 ...
1 10  9 17  8 23 15 22  7 27 20 33 13 32 19 25  6 29 23 40 17 45 ...
1 11 10 19  9 26 17 25  8 31 23 38 15 37 22 29  7 34 27 47 20 53 ...
                     ...   ...   ...   ...   ...   ...
```

La somme des éléments de la ligne *n* est exactement 3^n

Jean-Paul Delahaye CRISTAL



Tout ce que nous allons mentionner à propos de cette suite a été démontré.

• **Sam Northshield, *Stern's Diatomic Sequence* 0, 1, 1, 2, 1, 3, 2, 3, 1, 4, ...**
***The American Mathematical Monthly, 117, 581-598,* 2010.**

Les démonstrations ne sont pas toujours faciles, mais elles ne présentent pas de difficultés exceptionnelles :

• lorsqu'une propriété est identifiée, la démontrer n'est qu'une affaire d'effort.

Le jeu de la recherche se situe ici dans la découverte des propriétés.

Une seconde propriété du tableau tassé de Stern est que

Chaque colonne est une suite arithmétique.

1																						
1	2																					
1	3	2	3																			
1	4	3	5	2	5	3	4															
1	5	4	7	3	8	5	7	2	7	5	8	3	7	4	5							
1	6	5	9	4	11	7	10	3	11	8	13	5	12	7	9	2	9	7	12	5	13	...
1	7	6	11	5	14	9	13	4	15	11	18	7	17	10	13	3	14	11	19	8	21	...
1	8	7	13	6	17	11	16	5	19	14	23	9	22	13	17	4	19	15	26	11	29	...
1	9	8	15	7	20	13	19	6	23	17	28	11	27	16	21	5	24	19	33	14	37	...
1	10	9	17	8	23	15	22	7	27	20	33	13	32	19	25	6	29	23	40	17	45	...
1	11	10	19	9	26	17	25	8	31	23	38	15	37	22	29	7	34	27	47	20	53	...
0	**1**	**1**	**2**	**1**	**3**	**2**	**3**	**1**	**4**	**3**	**5**	**2**	**5**	**3**	**4**	**1**	**5**	**4**	**7**	**3**	**8**	**...**

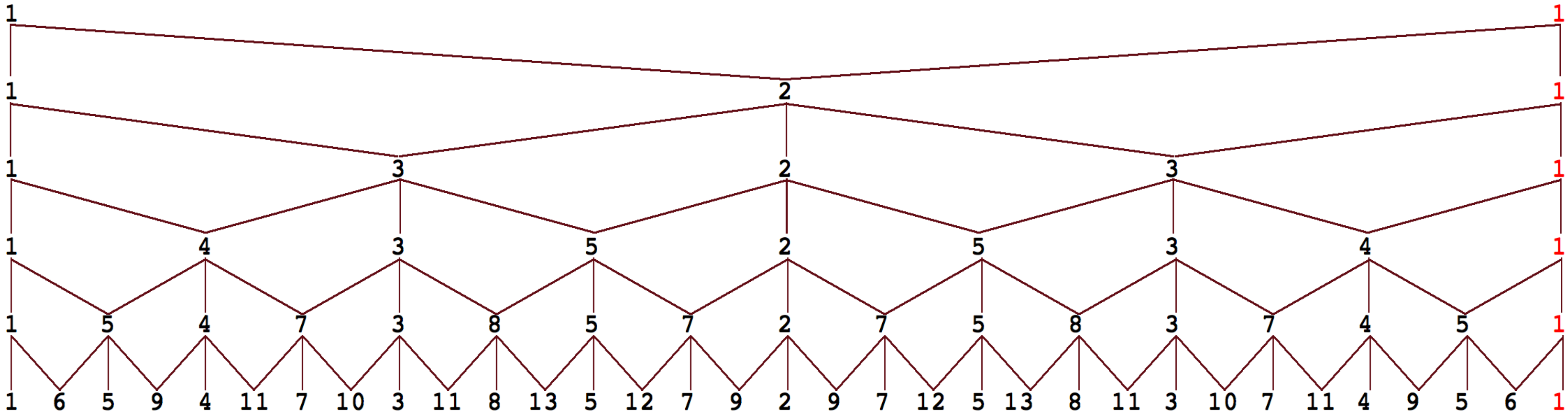
N'est-ce pas miraculeux !

Seconde disposition possible en tableau :

L'arbre diatomique de Stern

On étale les nombres de chaque ligne et en ajoutant un 1 (en rouge) au bout de chacune.

1																1
1								2								1
1				3				2				3				1
1		4		3		5		2		5		3		4		1
1	5	4	7	3	8	5	7	2	7	5	8	3	7	4	5	1



Chaque ligne est un palindrome.

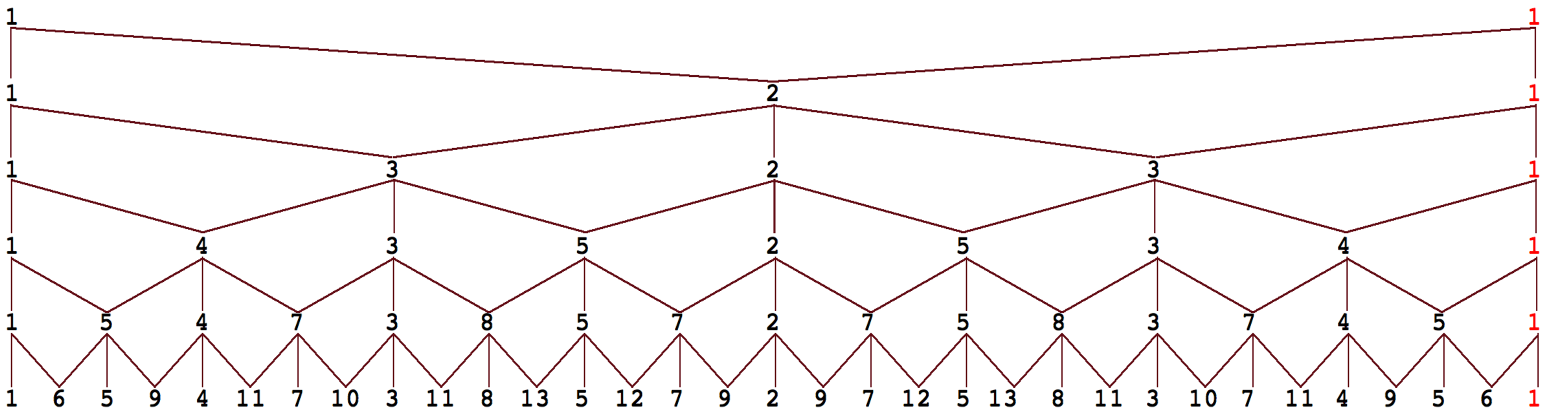
L'*arbre diatomique de Stern* se construit indépendamment des formules données.

On l'obtient en utilisant un procédé proche de celui du **triangle de Pascal**.

L'arbre diatomique de Stern

1																1
1								**2**								1
1				**3**				2				3				1
1		**4**		3		5		2		**5**		**3**		4		1
1	**5**	4	7	3	8	5	7	2	7	5	**8**	3	7	4	5	1

On copie la ligne précédente : entre deux nombres, on insère leur **somme.**



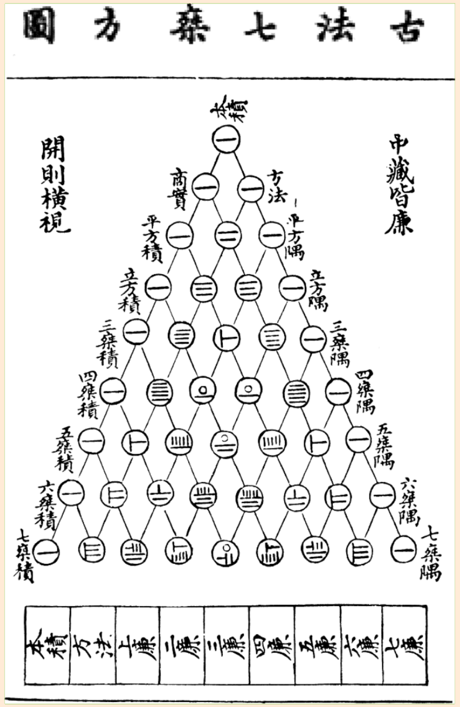
Triangle de Pascal

Même si cela doit nous décevoir, **ce n'est pas Blaise Pascal qui l'a découvert**.
Ce qui fait que parfois on préfère l'appeler "triangle arithmétique".
On ne sait pas vraiment qui est le premier à l'avoir introduit (ou vu ?)

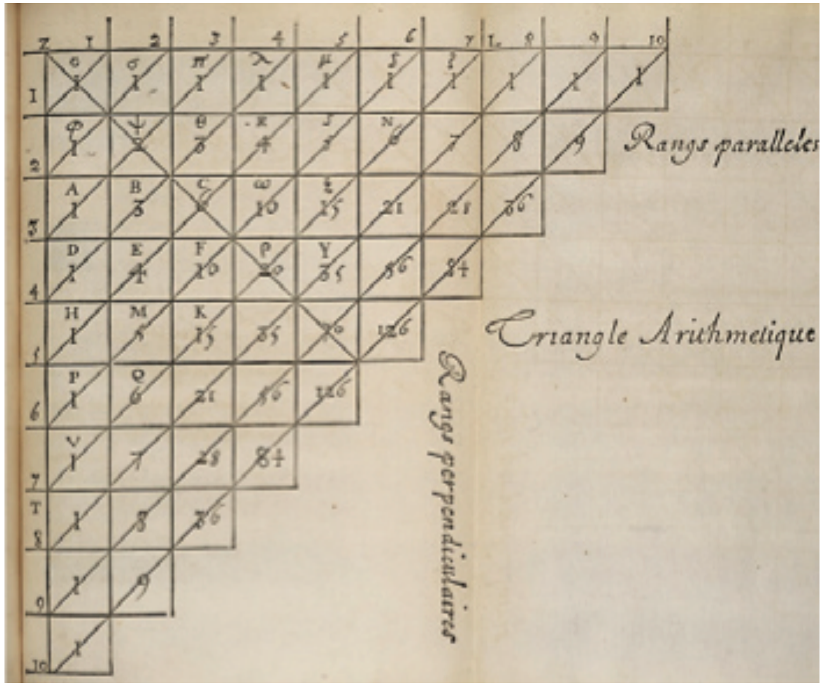
L'un des premiers tableaux arithmétiques connus se trouve dans les écrits du savant indien **Pingala** du **IIe siècle avant notre ère**.

Des mathématiciens arabes et chinois l'utilisaient déjà vers l'an 1000.

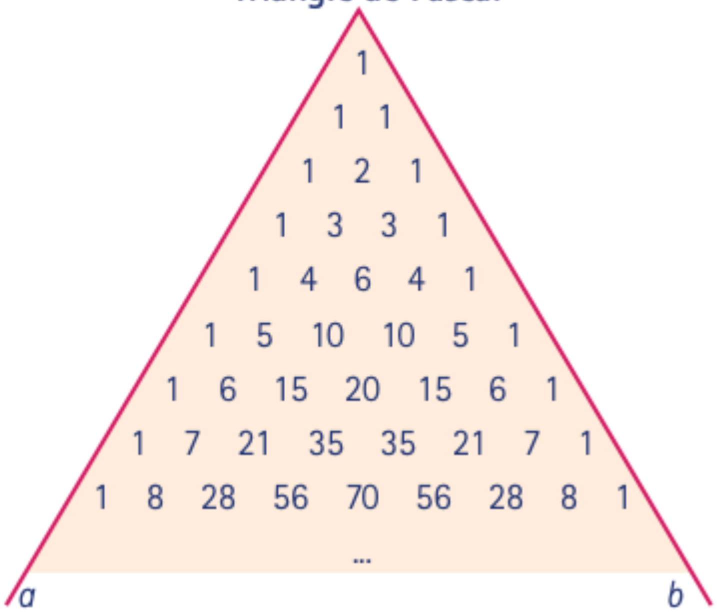
Yang Hui (1238-1298) l'utilise pour extraire les racines *n*-ièmes.



Yáng Huī (楊輝), ca. 1238-1298)



Triangle de Pascal



Binôme de Newton

$$(a+b)^0 = 1$$
$$(a+b)^1 = a + b$$
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$
$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$
$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$
$$(a+b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$$
$$(a+b)^8 = a^8 + 8a^7b + 28a^6b^2 + 56a^5b^3 + 70a^4b^4 + 56a^3b^5 + 28a^2b^6 + 8ab^7 + b^8$$

...

$$n!/(n - k)!k!$$

Chaque élément est la somme de ses deux voisins sur la ligne au-dessus

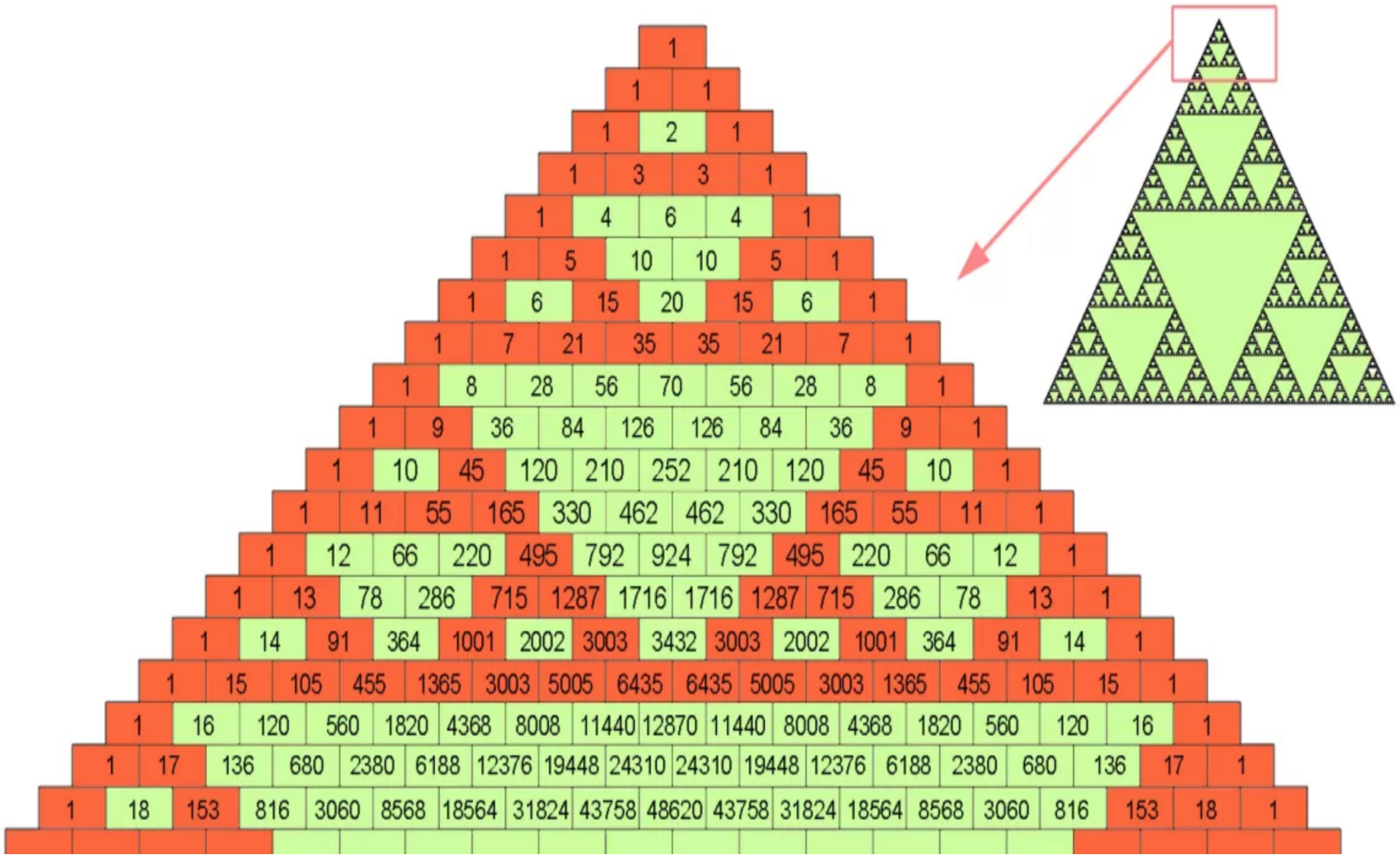
									1									
								1		1								
							1		2		1							
						1		3		3		1						
					1		4		6		4		1					
				1		5		10		**10**		**5**		1				
			1		6		15		20		**15**		6		1			
		1		7		21		35		35		21		7		1		
	1		8		28		56		70		56		28		8		1	
1		9		36		84		126		126		84		36		9		1

Triangle de Pascal sous forme isocèle

1									
1	1								
1	2	1							
1	3	3	1						
1	4	6	4	1					
1	5	10	**10**	**5**	1				
1	6	15	20	**15**	6	1			
1	7	21	35	35	21	7	1		
1	8	28	56	70	56	28	8	1	
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1

Sous forme de triangle rectangle

La somme des termes de la ligne n est 2^n


1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1
1 11 55 165 330 462 462 330 165 55 11 1
1 12 66 220 495 792 924 792 495 220 66 12 1
1 13 78 286 715 1287 1716 1716 1287 715 286 78 13 1
1 14 91 364 1001 2002 3003 3432 3003 2002 1001 364 91 14 1
1 15 105 455 1365 3003 5005 6435 6435 5005 3003 1365 455 105 15 1
1 16 120 560 1820 4368 8008 11440 12870 11440 8008 4368 1820 560 120 16 1
1 17 136 680 2380 6188 12376 19448 24310 24310 19448 12376 6188 2380 680 136 17 1
1 18 153 816 3060 8568 18564 31824 43758 48620 43758 31824 18564 8568 3060 816 153 18 1

Quatre liens entre la suite de Stern-Brocot, le triangle de Pascal et la suite de Fibonacci.

•1•

Les maximums des lignes du tableau tassé de Stern sont les termes de la suite de Fibonacci 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...

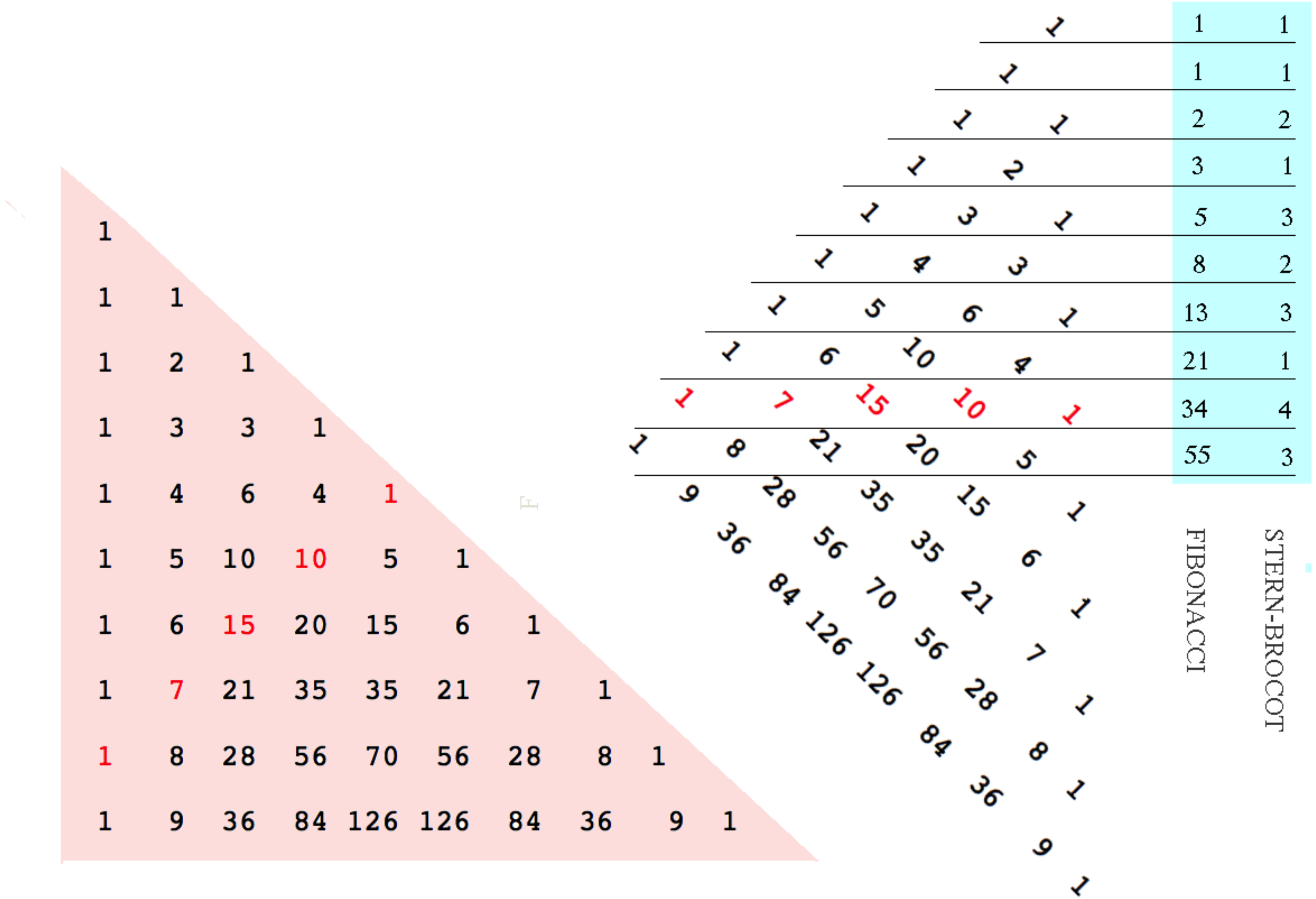
```
1
1   2
1   3   2   3
1   4   3   5   2   5   3   4
1   5   4   7   3   8   5   7   2   7   5   8   3   7   4   5
1   6   5   9   4  11   7  10   3  11   8  13   5  12   7   9   2   9   7  12   5  13  ...
1   7   6  11   5  14   9  13   4  15  11  18   7  17  10  13   3  14  11  19   8  21  ...
1   8   7  13   6  17  11  16   5  19  14  23   9  22  13  17   4  19  15  26  11  29  ...
...  ...  ...  ...  ...  ...
```

•2•

La somme des coefficients du **triangle de Pascal** situés sur les **obliques montantes**, donne **la suite de Fibonacci** 1, 1, 2, 3, 5, 13, ...

•3•

Le **nombre de nombres impairs** sur les **obliques montantes** du triangle de Pascal donne **la suite de Stern Brocot** 1, 1, 2, 1, 3, 2, 3, 1 ...


FIBONACCI
STERN-BROCOT

Cela donne une formule pour les termes de la suite de Stern-Brocot.

C'est une nouvelle définition à partir des coefficients de binôme :

$$s_n = \sum_{2i+j=n-1} \left[\binom{i+j}{i} \bmod 2 \right]$$

• 4•

Pour Fibonacci : un terme est la somme des deux précédents.

La même relation convient presque pour la suite de Stern-Brocot.

Il suffit de **soustraire** un terme correctif $2(s_n \bmod s_{n+1})$

$$s_0 = 0 \qquad s_1 = 1 \qquad s_{n+2} = s_n + s_{n+1} - 2(s_n \bmod s_{n+1})$$

Utile pour le calcul pratique des s_n.

On obtient les termes les uns après les autres dans l'ordre

sans complications, re-calculs ou mémorisations.

La numération binaire

Trois liens entre la suite de Stern-Brocot et la numération binaire.

s_n = nombre de représentations de n-1 en notation binaire généralisée.

Notation binaire généralisée : on écrit n comme somme de 2^i pris 0, 1 ou 2 fois

Exemple : 8 (= 9 - 1) s'écrit de 4 façons en notation binaire généralisée :

- 8 = 8 notation binaire 1000_2,
- 8 = 4 + 4 une notation binaire généralisée 200_2;
- 8 = 4 + 2 + 2 une autre 120_2 ;
- 8 = 4 + 2 + 1 + 1 une autre 112_2.

Il y a 4 façons d'écrire 8 = 9-1 en notation binaire généralisée : $s_9 = 4.$

n	s_n	**Décompositions binaires généralisées de n-1**
1	1	0 = 0
2	1	1 = 1
3	2	2 = 2 = 1+1
4	1	3 = 2+1
5	3	4 = 4 = 2+2 = 2+1+1
6	2	5 = 1+2+2 = 1+4
7	3	6 = 4+2 = 4+1+1 = 2+2+1+1
8	1	7 = 4+2+1
9	4	8 = 8 = 4+4 = 4+2+2 = 4+2+1+1

Suite extraite alternée de la notation binaire

Dans son livre de 2003, consacré aux constantes mathématiques, Stevens Finch note :

s_n est le nombre de façons d'extraire de l'écriture binaire de n une suite alternée de 1 et de 0 commençant et se terminant par 1.

Exemple : 17 s'écrit 10001_2 en base 2.

On extrait de cette notation 5 sous-suites alternées commençant et finissant par 1 :

10001 10001 10001 10001 10001

Donc $s_{17} = 5$.

n	s_n	Binaire	Suites extraites alternées (en rouge)
1	1	1_2	
2	1	10_2	10
3	2	11_2	11 11
4	1	100_2	100
5	3	101_2	101 101 101
6	2	110_2	110 110
7	3	111_2	111 111 111
8	1	1000_2	1000
9	4	1001_2	1001 1001 1001 1001
10	3	1010_2	1010 1010 1010
11	5	1011_2	1011 1011 1011 1011 1011
12	2	1100_2	1100 1100
13	5	1101_2	1101 1101 1101 1101 1101
14	3	1110_2	1110 1110 1110
15	4	1111_2	1111 1111 1111 1111
16	1	10000_2	10000
17	5	10001_2	10001 10001 10001 10001 10001

$$77 = 64+8+4+1 = 1001101_2$$

Il y a 17 suites alternées extraites

1001101 1001101 1001101 1001101 1001101

1001101 1001101 1001101 1001101 1001101

1001101 1001101 1001101 1001101 1001101

1001101 1001101

Effectivement : $s_{77} = 17$

Calcul direct de s_n

À partir de n écrit en binaire on trouve immédiatement s_n

Partant de n, par exemple 98, on l'écrit en base 2 : $98 = 1100010_2$.

On compte le nombre de 1 qui commence la suite 1100010_2, il y en a 2, $\mathbf{a_0 = 2}$;
On compte le nombre de 0 qui suivent, $\mathbf{a_1 = 3}$
Puis le nombre de 1 qui suivent, $\mathbf{a_2 = 1}$
Puis le nombre de 0 qui suivent, $\mathbf{a_3 = 1}$
Puis enfin le nombre de 1 qui suivent, $\mathbf{a_4 = 0}$.

$$\underbrace{111..111}_{a_0}\ \underbrace{000...000}_{a_1}\ \underbrace{111...111}_{a_2}\ \underbrace{000...000}_{a_3}\ \underbrace{111...111}_{...}\ \underbrace{...}_{...}$$

On considère alors la fraction :

$$\boldsymbol{a_4} + 1/(\ \boldsymbol{a_3} + 1/(\ \boldsymbol{a_2} + 1/(\ \boldsymbol{a_1} + 1/\boldsymbol{a_0}))) = 0 + 1/(1 + 1/(1 + 1/(3 + 1/2))) = \mathbf{9/16}$$

Cette fraction donne $s_{98} = \mathbf{9}$ et $s_{99} = \mathbf{16}$.

$$\overbrace{1\cdots1}^{a_0}\ \overbrace{0\cdots0}^{a_1}\overbrace{1\cdots1}^{a_2}\ \cdots\overbrace{0\cdots0}^{a_{k-1}}\overbrace{1\cdots1}^{a_k}$$

$$a_k + \cfrac{1}{a_{k-1} + \cfrac{1}{+\cdots\cfrac{1}{a_0}}}$$

L'énumération parfaite des nombres rationnels !

Nombres rationnels = quotients de deux nombres entiers.

En écrivant les fractions **positives** dans un tableau à double entrée et en parcourant successivement les diagonales montantes, on a une énumération des rationnels.

	1	2	3	4	5	6 ...
1	1/1	1/2	1/3	1/4	1/5	1/6 ...
2	2/1	2/2	2/3	2/4	2/5	2/6 ...
3	3/1	3/2	3/3	3/4	3/5	3/6 ...
4	4/1	4/2	4/3	4/4	4/5	4/6 ...
5	5/1	5/2	5/3	5/4	5/5	5/6 ...
6	6/1	6/2	6/3	6/4	6/5	7/6 ...
...	...	...	...	...	...	...

	1	2	3	4	5	6	...
1	1/1	1/2	1/3	1/4	1/5	1/6	...
2	2/1	2/2	2/3	2/4	2/5	2/6	...
3	3/1	3/2	3/3	3/4	3/5	3/6	...
4	4/1	4/2	4/3	4/4	4/5	4/6	...
5	5/1	5/2	5/3	5/4	5/5	5/6	...
6	6/1	6/2	6/3	6/4	6/5	7/6	...
	...	...	...	...	...	...	

Im.5 Tableau des rationnels avec répétitions

L'énumération commence par :

1/1 2/1 1/2 3/1 2/2 1/3 4/1 3/2 2/3 1/4 5/1 4/2 3/3 2/4 1/5 ...

Dans cette liste, du fait des simplifications possibles, **certains nombres sont répétés**.

On peut supprimer les répétitions

1/1 2/1 1/2 3/1 1/3 4/1 3/2 2/3 1/4 5/1 1/5 ...

On a une **bijection** entre les entiers positifs et les nombres rationnels positifs.

Il n'y a ni oubli, ni répétition.

Défauts de la méthode :

Il semble difficile de connaître le nombre rationnel qui vient en position n.

Pas de formule simple donnant le n-ième terme de l'énumération.

La suite de Stern-Brocot donne une solution parfaite au problème.

On énumère les rationnels en prenant successivement :

s_1/s_2	s_2/s_3	s_3/s_4	s_4/s_5	s_5/s_6	s_6/s_7	s_7/s_8	s_8/s_9,	, ...
1/1	1/2	2/1	1/3	3/2	2/3	3/1	1/4	, ...

Il n'y a ni oubli, ni répétition et pas de fractions simplifiables.

C'est une mise en ordre idéal de l'infinité des nombres rationnels.

Le n-ième élément est s_n/s_{n+1} dont on connaît des moyens rapides de calcul.

C'est cette liste qui motiva Stern en 1858 pour l'introduction de sa série.

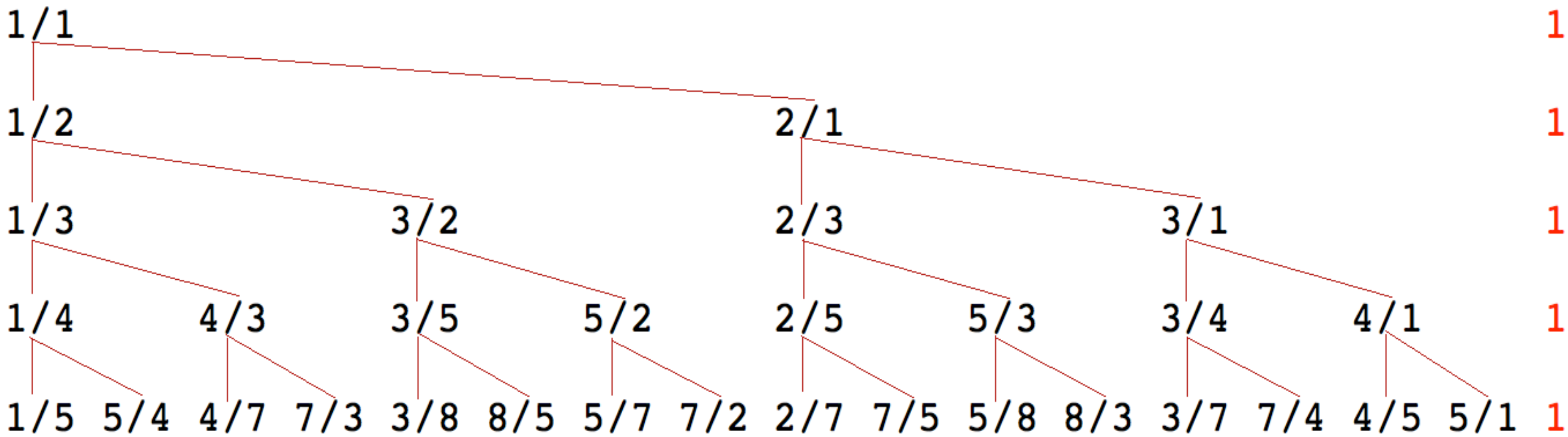
On en tire des représentations des nombres rationnels positifs.

Partant de l'arbre diatomique de Stern (sans sa dernière colonne de 1) en divisant chaque élément par le suivant, on obtient un tableau infini listant tous les nombres rationnels.

Ce tableau est dénommé **arbre de Calking-Wilf** .

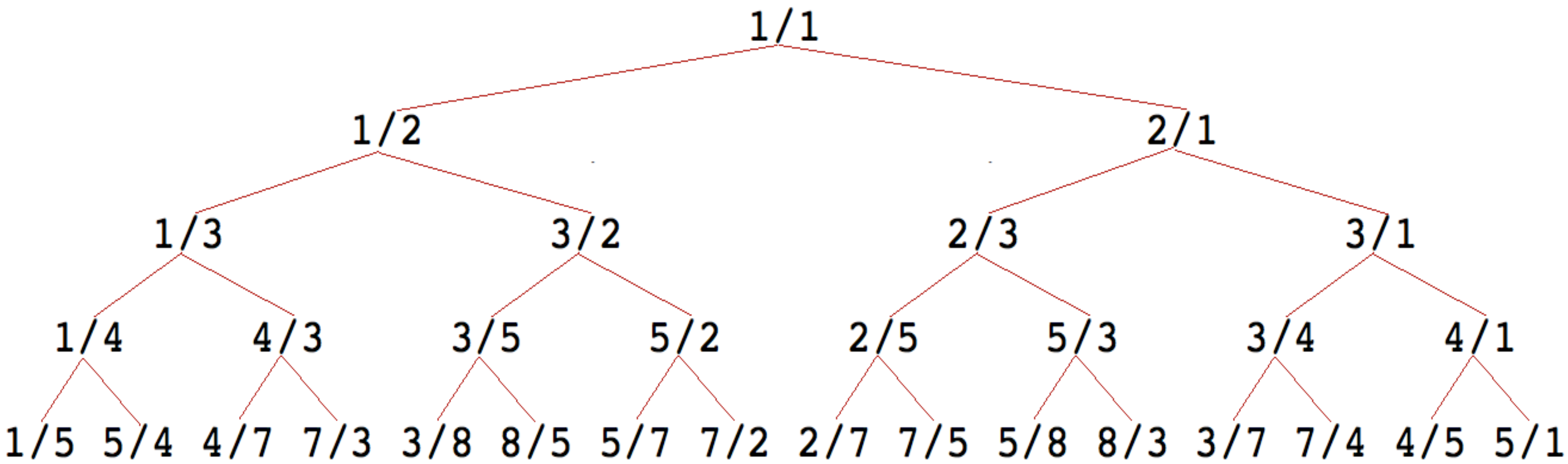
(Neil Calking et Herbert Wilf l'ont étudié en 2000)

1/1																1
1/2								2/1								1
1/3				3/2				2/3				3/1				1
1/4		4/3		3/5		5/2		2/5		5/3		3/4		4/1		1
1/5	5/4	4/7	7/3	3/8	8/5	5/7	7/2	2/7	7/5	5/8	8/3	3/7	7/4	4/5	5/1	1



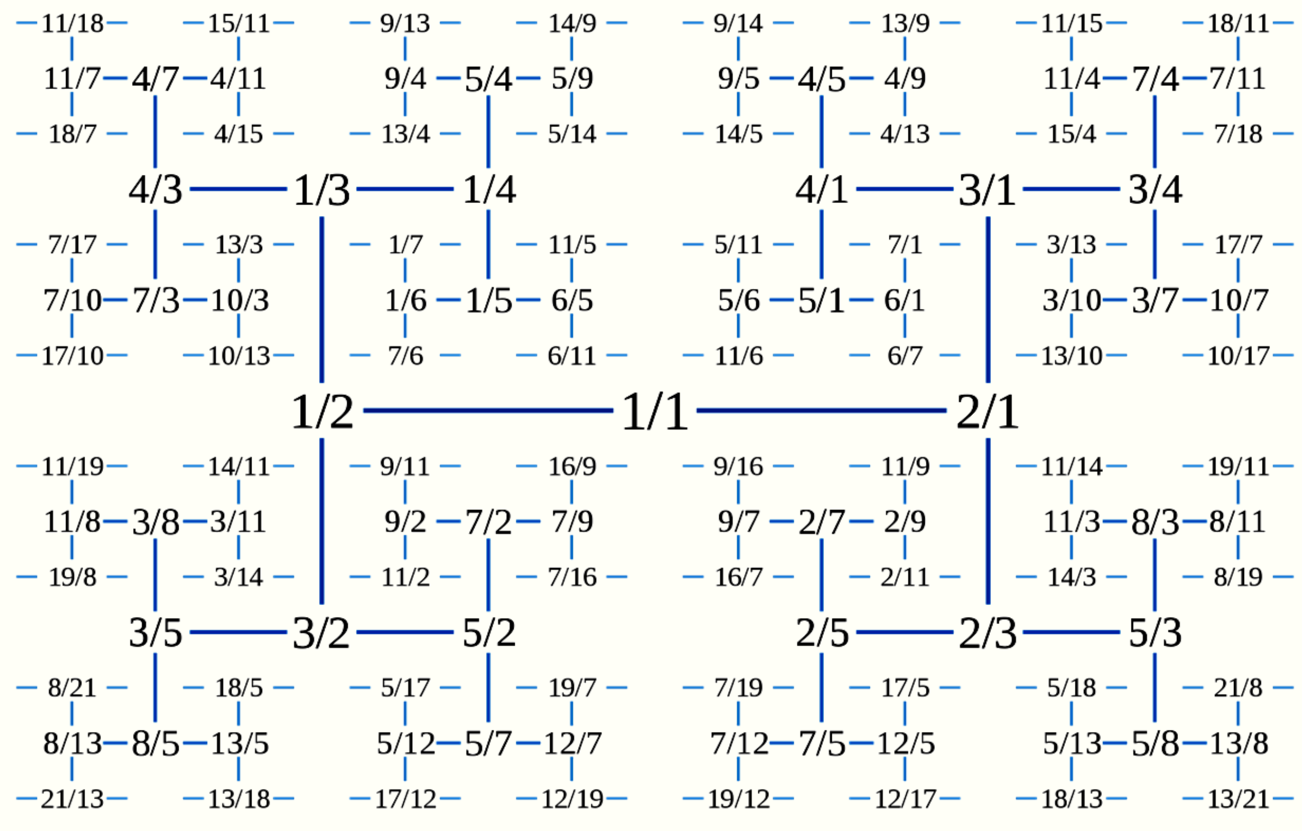
Arbre de Calking-Wilf

La disposition centrée est plus jolie :



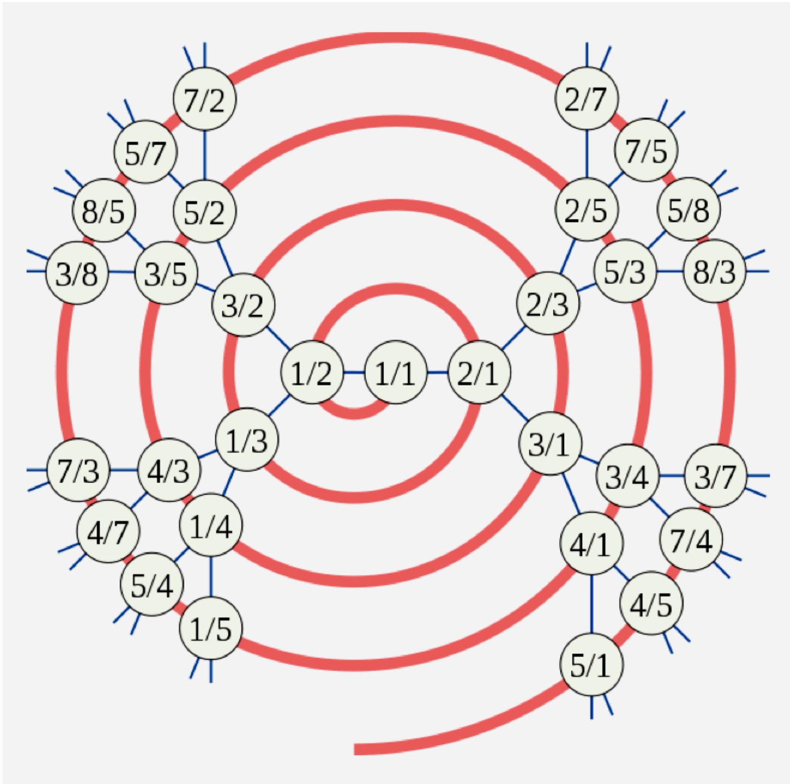
Arbre de Calking-Wilf

Représentation fractale :



Arbre de Calking-Wilf

La disposition en spirale montre à la fois l'arbre, et l'énumération de tous les rationnels :



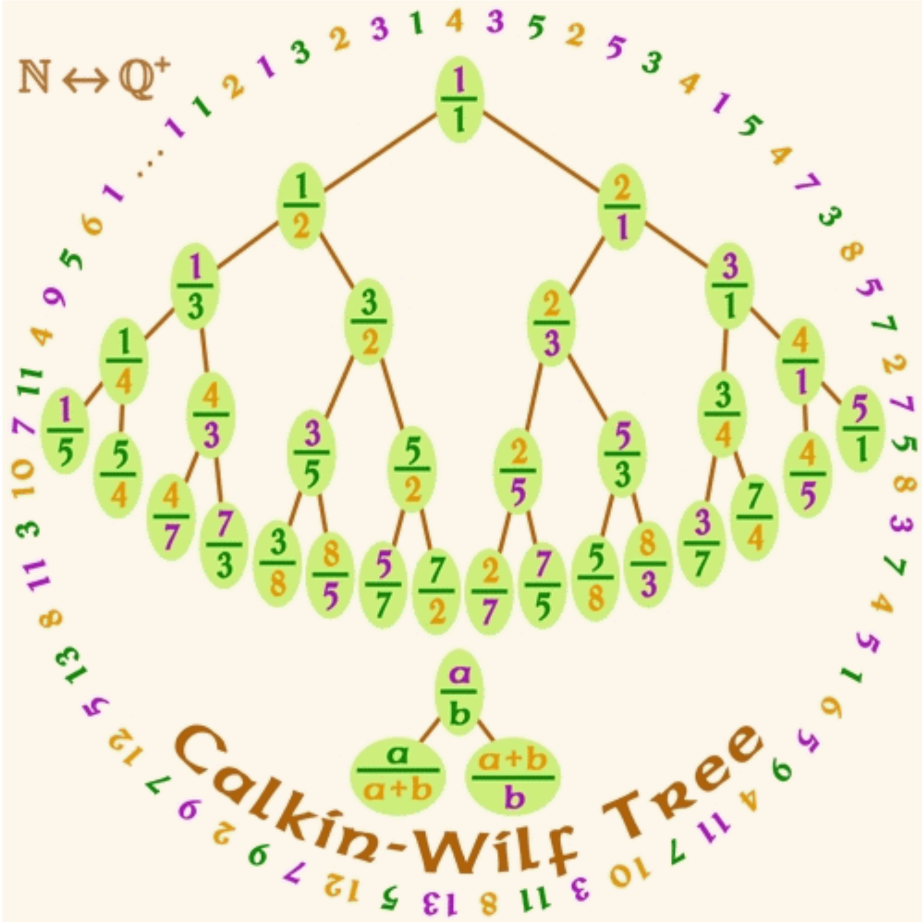
Spirale des rationnels et arbre de Calking-Wilf

L'arbre de Calking-Wilf possède une propriété qui suffit à l'engendrer.

les deux descendants d'une fraction *a*/*b* sont

dans l'ordre *a*/(*a*+*b*) et (*a*+*b*)/*b*.

Une nouvelle méthode pour engendrer la suite des Stern-Brocot



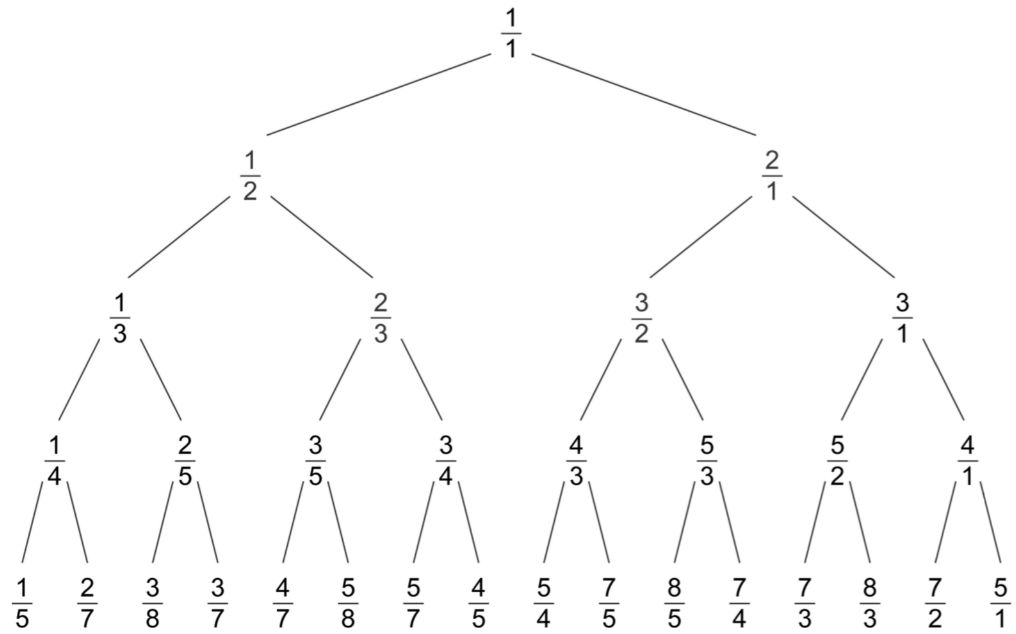
http://thenerdiestshirts.com/site/math-shirt-cw
https://thenerdiestshirts.ecrater.com/c/135046169/calkin-wilf-tree 16,5 €

Arbre de Stern-Brocot.

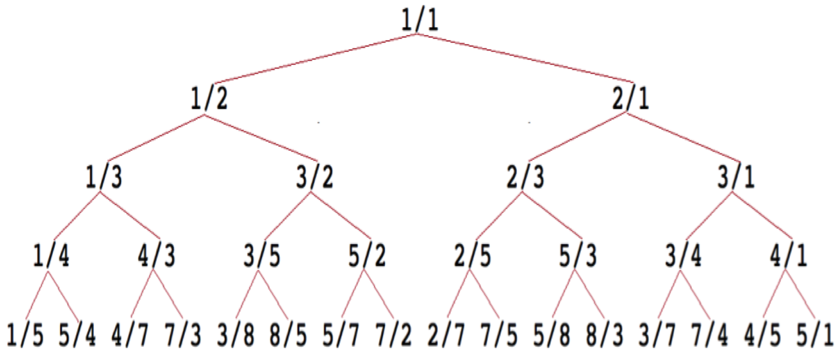
Pour passer d'une ligne **à celle au-dessus** [a/b , c/d] ---> (a+c)/(b+d)

Mêmes nombres sur chaque ligne que Calking-Wilf , mais dans un ordre différent.

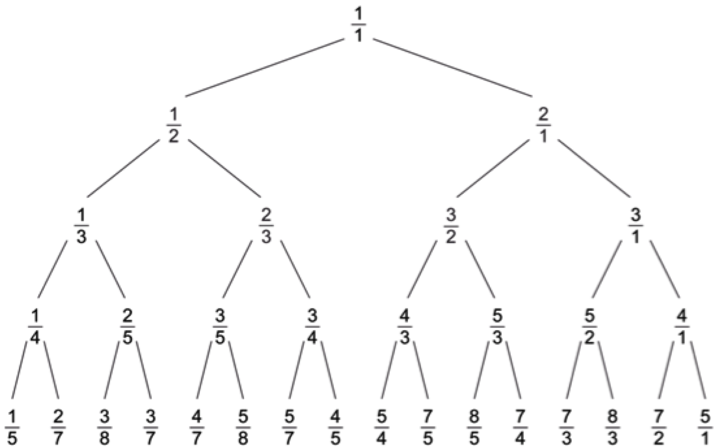
Donc donne aussi énumération des rationnels.



Arbre de Calking-Wilf



Arbre de Stern- Brocot



Une formule inattendue par sa grande simplicité permet directement de passer d'un élément de l'énumération magique des rationnels au suivant :

$$f(x) = 1/(1 + 2[x] - x)$$

(où $[x]$ désigne la partie entière de x).

En partant de 1/1 et en appliquant f, on obtient d'abord 1/2, puis on a 2/1,

puis 1/3 3/2 2/3 3/1 1/4 4/3 3/5 5/2 ...

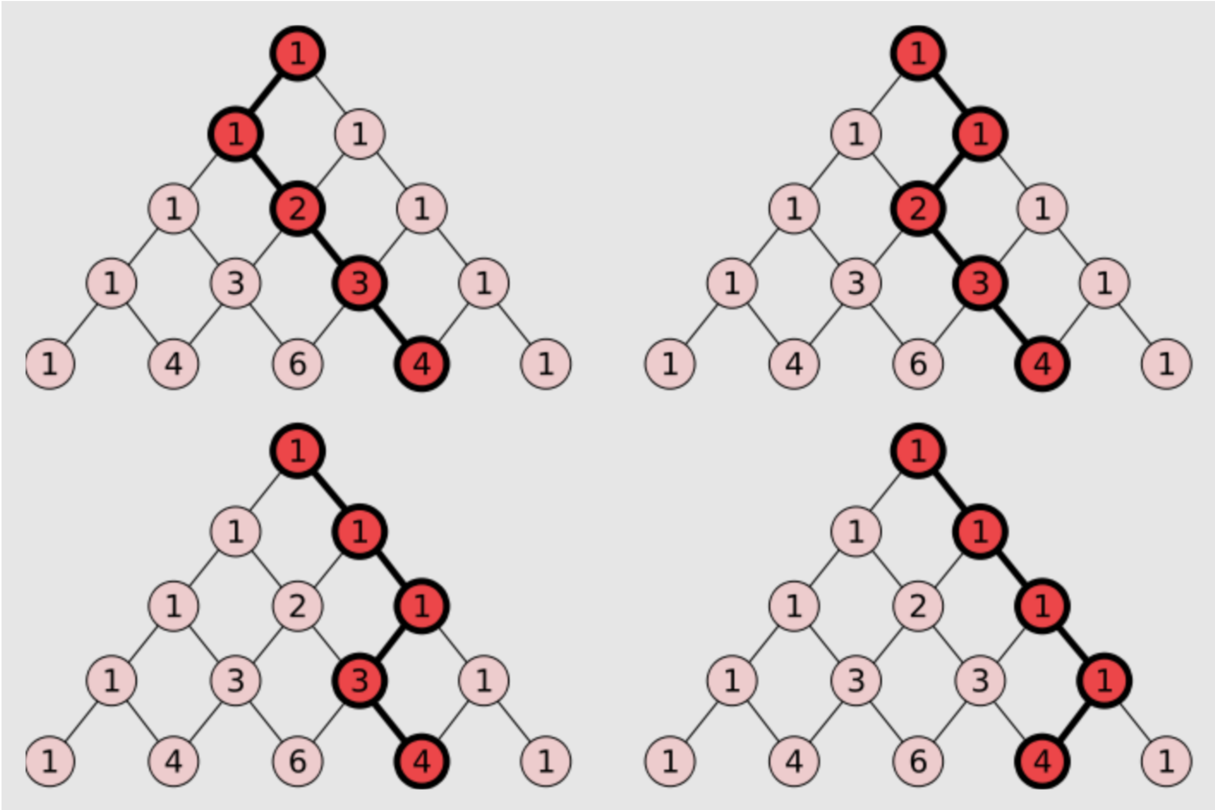
$$1/1 \quad \rightarrow \quad 1/(1+2[1]-1) = 1/2 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad 1/(1+2[1/2]-1/2) = 2 \quad \rightarrow \quad 1/(1+2[2]-2) = 1/3 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad 1/(1+2[1/3]-1/3)=3/2 \quad \rightarrow \quad \ldots$$

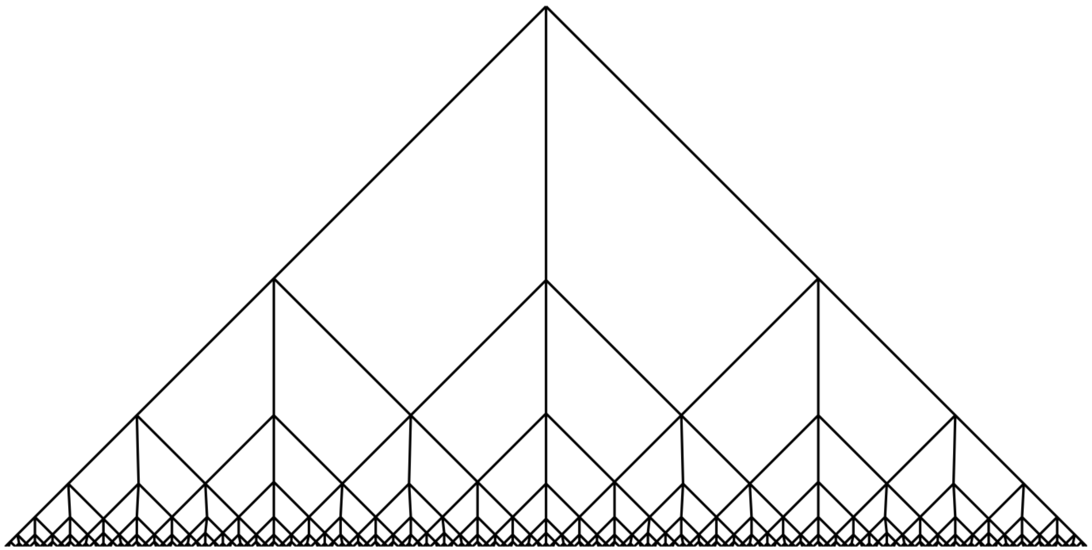
Visions géométriques : nombres des chemins

Triangle de Pascal



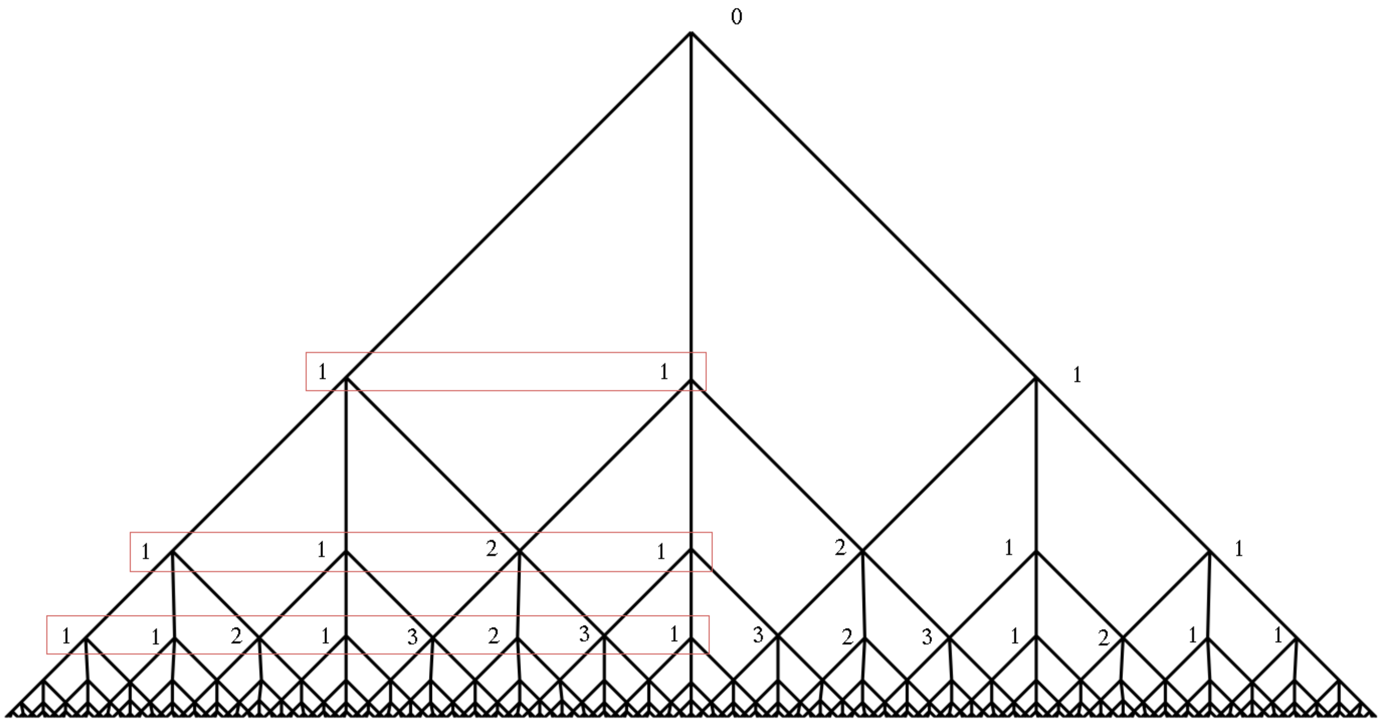
Suite de Stern-Brocot.

Pavage d'un triangle isocèle rectangle par des trapèzes rectangles semblables



La suite de Stern-Brocot y est cachée.

Nombre de chemins joignant le sommet à un nœud du graphe.
Chaque ligne lue jusqu'à la moitié est le début de la suite de Stern-Brocot



Il est impossible de présenter toutes les propriétés de la suite de Stern-Brocot, ou ses généralisations.

Il est étonnant qu'il ait fallu attendre le XXe et parfois le XXIe siècle pour que se dévoilent à nous les merveilleuses propriétés de cette suite.

Nous sommes parfois tenté de croire que nous connaissons tout ce qui est simple et fondamental.

Nous nous trompons.

Il reste sans doute encore de nombreuses vérités mathématiques élémentaires à découvrir que mystérieusement nous ne voyons pas.

Bibliographie

A.A. Kirillov, A tale of two fractals, University of Pennsylvania, Philadelphia, 2013.

Bruce Bates, Martin Bunder, Keith Tognetti, Child's addition in the Stern–Brocot tree, European Journal of Combinatorics 33, 148–167, 2012.

Michael Coonsa, Jeffrey Shallit A pattern sequence approach to Stern's sequence, Discrete Mathematics 311, 2630–2633, 2011.

Stephen Glasby, Enumerating the rationals from left to right, Amer. Math. Monthly 118, 830-835, 2011

Sam Northshield, Stern's Diatomic Sequence 0, 1, 1, 2, 1, 3, 2, 3, 1, 4, . . . The American Mathematical Monthly, 117, 581-598, 2010.

Bruce Bates, Martin Bunder, Keith Tognetti, Locating terms in the Stern–Brocot tree, European Journal of Combinatorics 31, 1020–1033, 2010.

Steven Finch, Mathematical Constants, Encylopedia of Mathematics and its Applications, vol. 94, Cambridge, University Press, Cambridge, 2003.

Neil Calking, Herbert Wilf, Recounting the Rational, The American Mathematical Monthly, 107, 360-363, 2000.

Moritz Stern, Uber eine zahlentheoretische Funktion, *J. Reine Agnew. Math.* **55**; 193–220, 1858

Théorème de Paul Erdös et George Szekeres de 1935

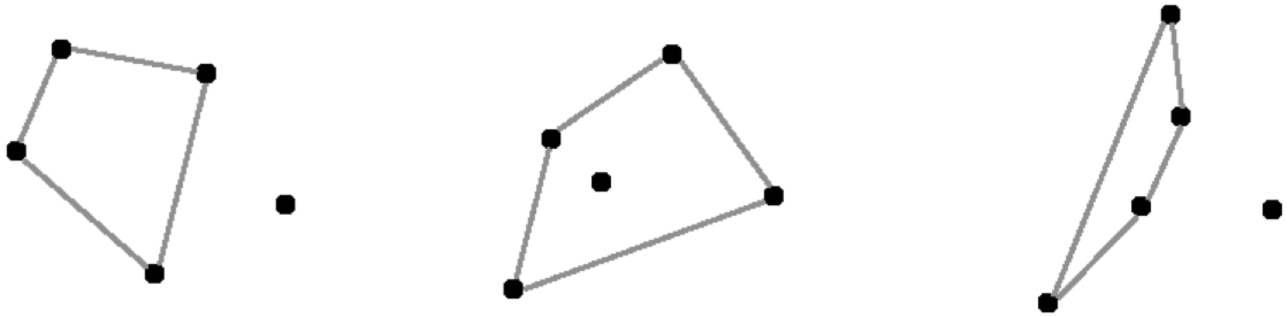
Pour tout entier $k \geq 3$, il existe un nombre minimal $f(k)$ tel que tout ensemble de $f(k)$ points ou plus, en position générale, contient k points formant les sommets d'un polygone convexe à k sommets.

On sait que $f(4) = 5$ $f(5) = 9$ $f(6) = 17$

$f(5) = 9$ signifie :

- on peut placer 8 points sans que 5 forment les sommets d'un quadrilatère convexe.
- si on prend 9 points (en position générale) ou plus, ce sera impossible
  (il y en aura toujours 5 formant les sommets d'un quadrilatère convexe)

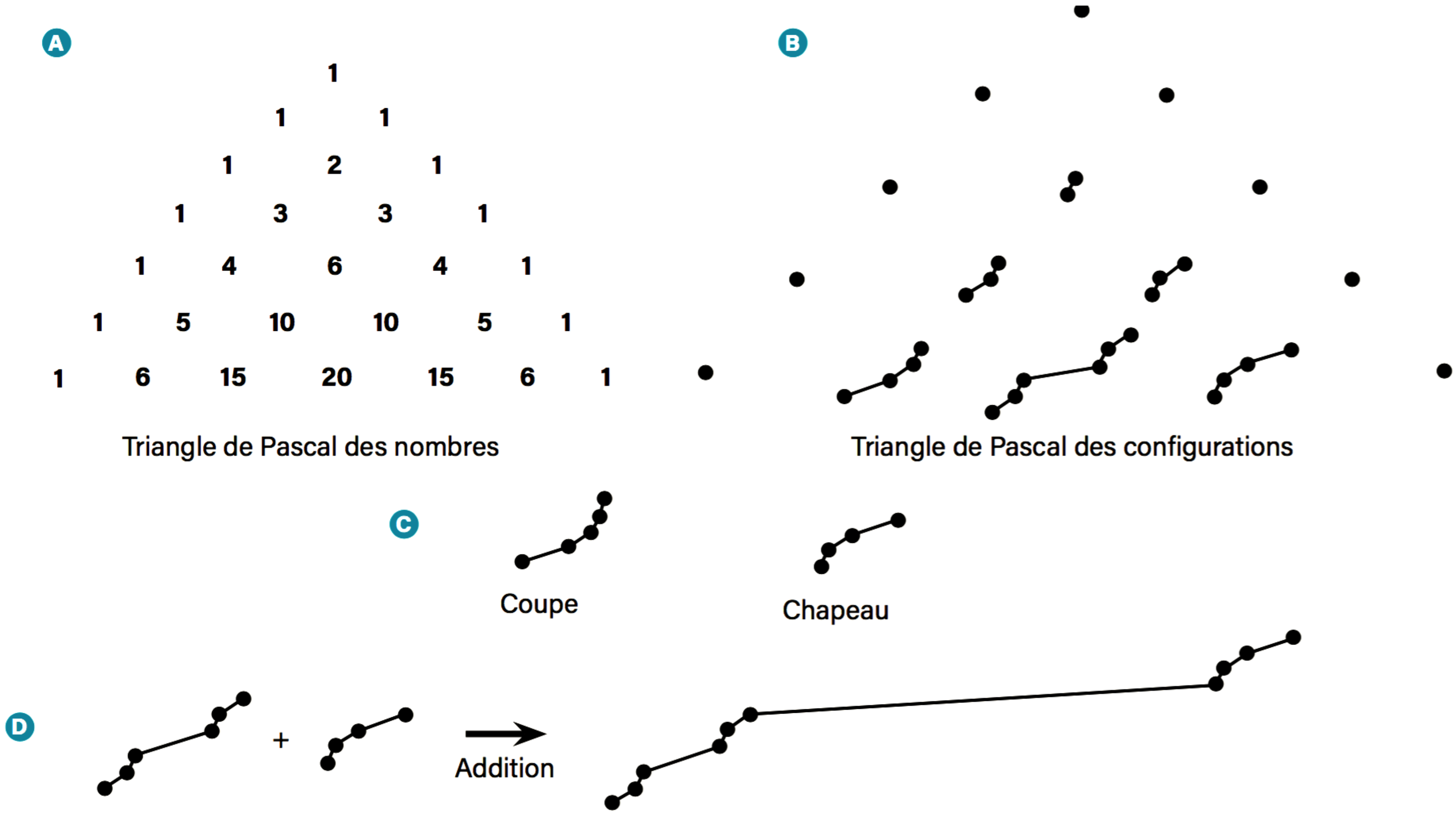
$$f(4) = 5 \quad \text{et} \quad f(5) > 8$$

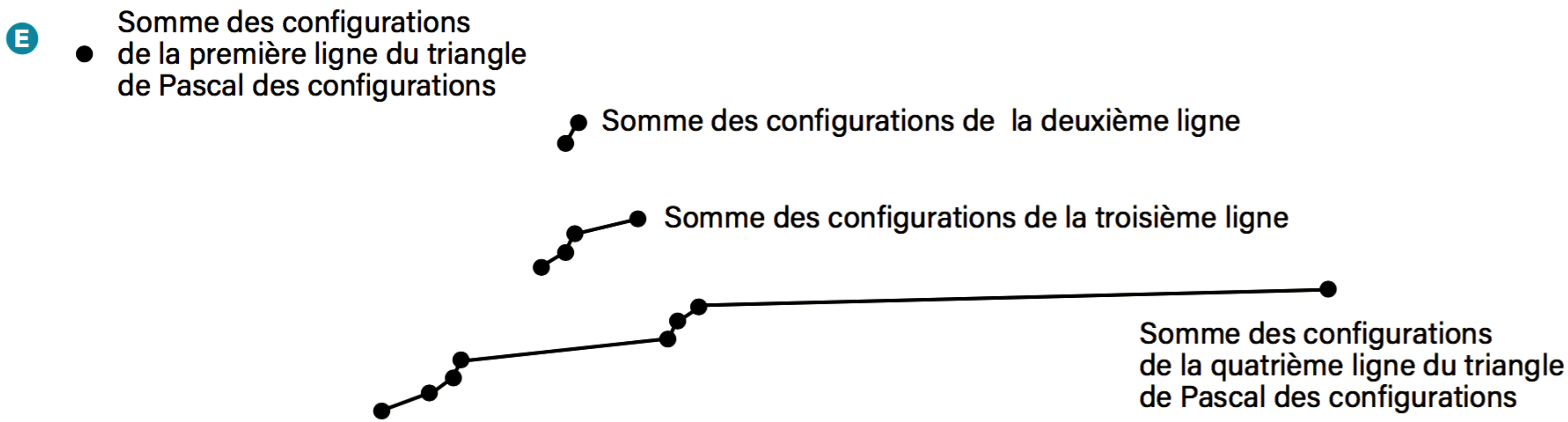


On conjecture que : $f(k) = 2^{k\text{-}2} + 1$

On démontre seulement que : $f(k) > 2^{k\text{-}2}$

Pour cela, on construit pour tout k une configuration de $2^{k\text{-}2}$ points sans que k d'entre eux forment les sommets d'un polygone convexe.


A
1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
Triangle de Pascal des nombres
B
Triangle de Pascal des configurations
C
Coupe
Chapeau
D
+
Addition



L'addition des configurations de la ligne k contient 2^{k-1} points et on ne peut pas en trouver k+1 formant les sommets d'un polygone convexe.

Exemple : La somme de la quatrième ligne donne une configuration de 8 points sans que 5 points soient les sommets d'un polygone convexe. ($k = 5$; $f(5) > 8$)

Plus généralement $f(k) > 2^{k-2}$

La fonction de Minkowski

Le mathématicien allemand Hermann Minkowski (dont les travaux de géométrie jouent un rôle important en théorie de la relativité) introduisit en 1904 une fonction étrange... et étrangement notée $?(x)$

("question mark function", "fonction point d'interrogation").

Sa définition utilise l'écriture de *x* sous la forme d'une *fraction continue* :

$$x = 1/(c_1 + 1/(c_2 + 1/(c_3 + \cdots))) \longrightarrow ?(x) = \sum_k \frac{(-1)^{k-1}}{2^{c_1+\cdots+c_k-1}}$$

Graphiquement cela donne :

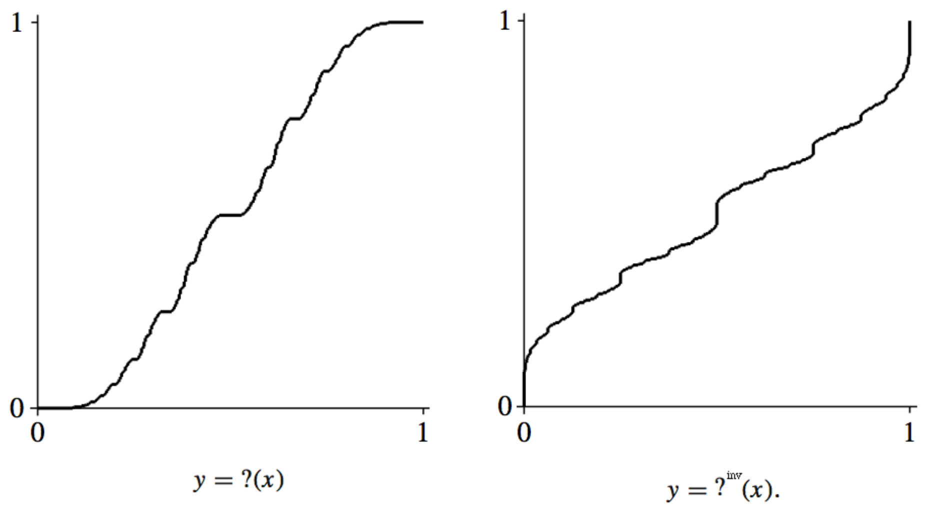


Fig 6A

La fonction $?(x)$ possède une dérivée nulle en tout point de l'intervalle [0, 1] sauf sur un ensemble de mesure zéro.

(C'est aussi le cas de la fonction associée à **l'escalier de Cantor**)

Cette fonction est croissante et donc, il en existe une fonction inverse, notée $?^{\mathrm{inv}}(x)$:

si x par la fonction $?(x)$ donne y, alors y par la fonction inverse donne x.

On vient de découvrir que $?^{\mathrm{inv}}(x)$ s'obtient à partir de la suite de Stern-Brocot.

• Pour les nombres de la forme $k/2^n$ (k, n entiers) on pose :

$$?^{\mathrm{inv}}(k/2^n) = s_k / s_{2^n+k}$$

• On prolonge par continuité.

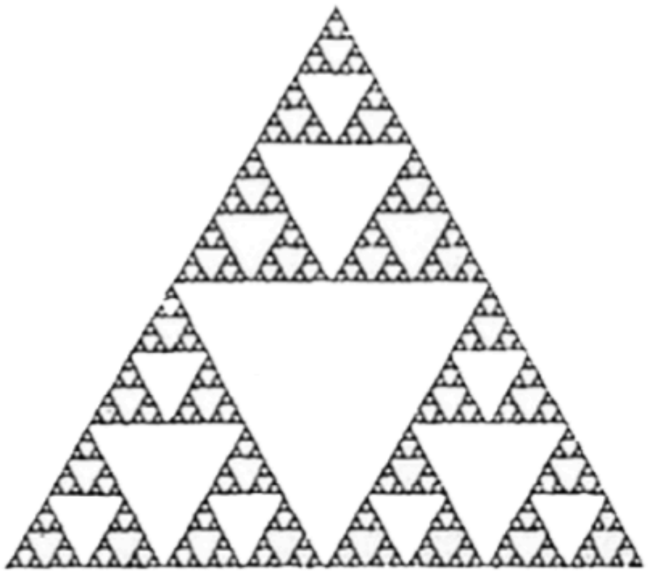
La fonction ?(x) n'est pas aussi abstraites qu'elle en a l'air.

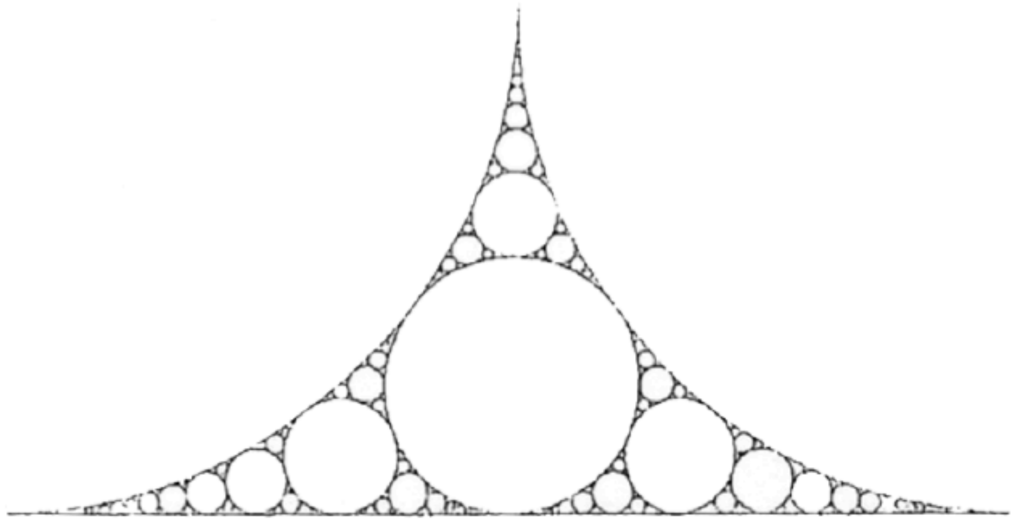
Elle met en relation deux célèbres fractales :

le **triangle de Sierpinski** et la **baderne d'Apollonius**.

Ces deux fractales sont « homéomorphes » :

il existe une fonction bijective continue qui transforme l'une en l'autre.





$$(x, y) \text{ -> } (?^{\text{inv}}(x), y)$$

A.A. Kirillov, A tale of two fractals, University of Pennsylvania, Philadelphia, 2013.