

Où se cachent les maths derrière les images...
...numériques ?

Sylvie Alayrangues
Université de Poitiers
XLIM

25 novembre 2023

Régionale de l'APMEP- Chauny

Images numériques : un carrefour

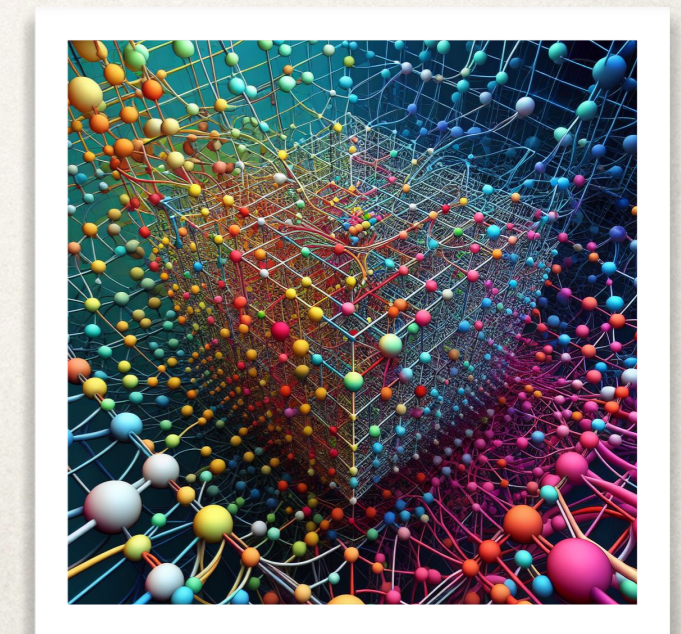
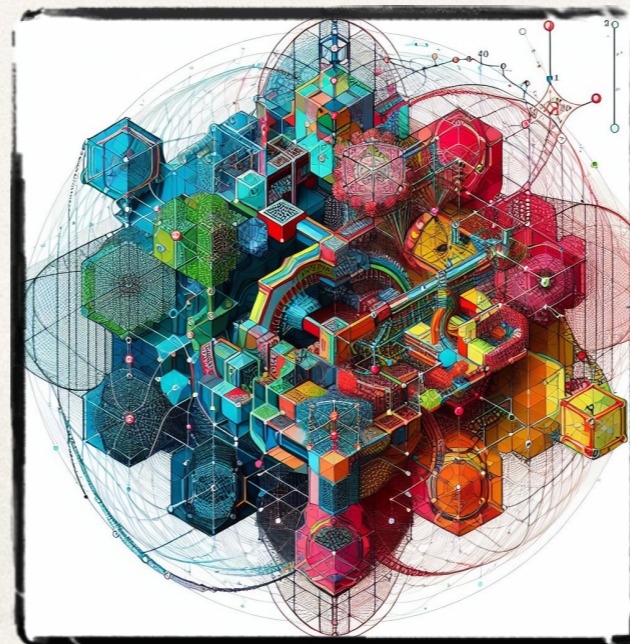
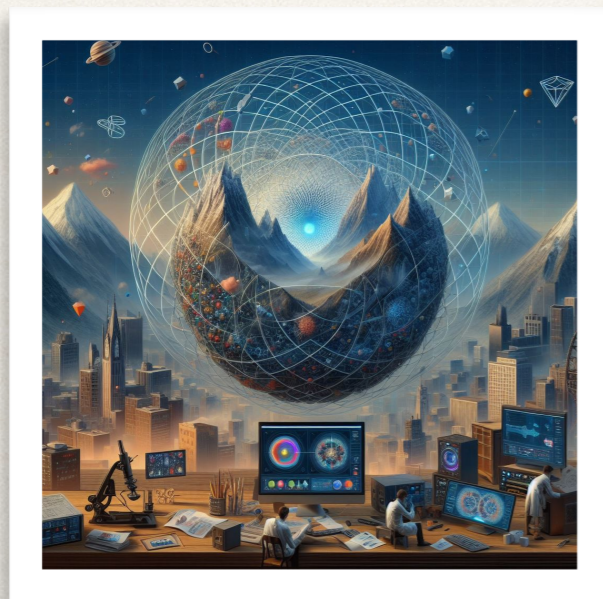


Et tous les domaines d'application



Fil rouge

- ❖ Où se cachent les images numériques ?
- ❖ ... et les maths là-dedans ?
- ❖ des maths, oui... mais des maths « discrètes » !



Où se cachent...

... les images numériques ?

Pré-informatique

Presse

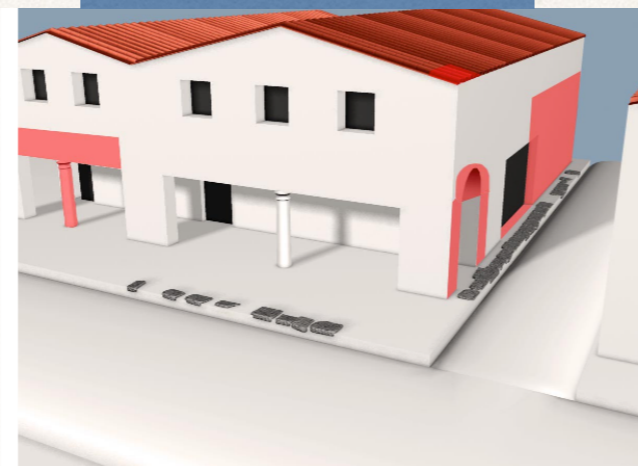


Bélinographe (1914)

Transmission



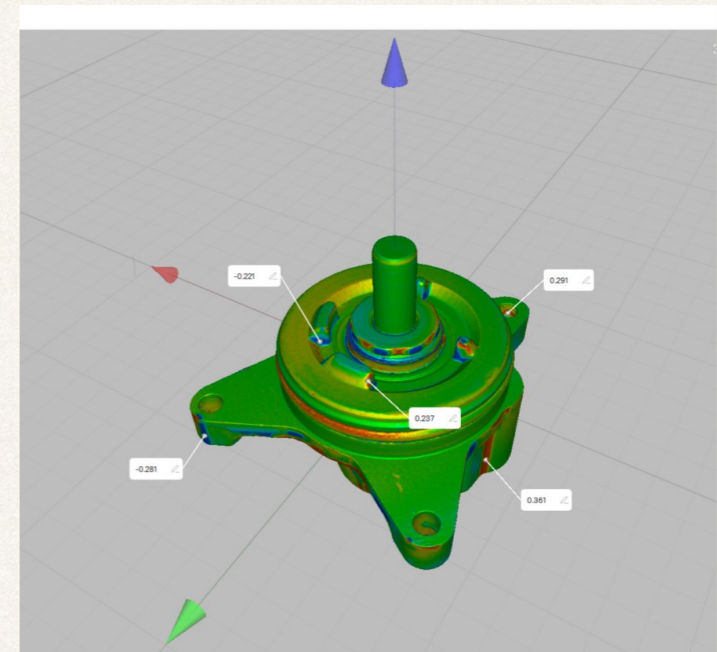
Archéologie



Reconstruction d'un bâtiment à partir de vestiges

Visualiser des hypothèses
Valorisation

CAO



Pièce mécanique

Usinage / Impression 3D

Où se cachent...

... les images numériques ?

Divers domaines



Reproduire la réalité (axe ASALI - XLIM)

Produire des images réalistes

Santé



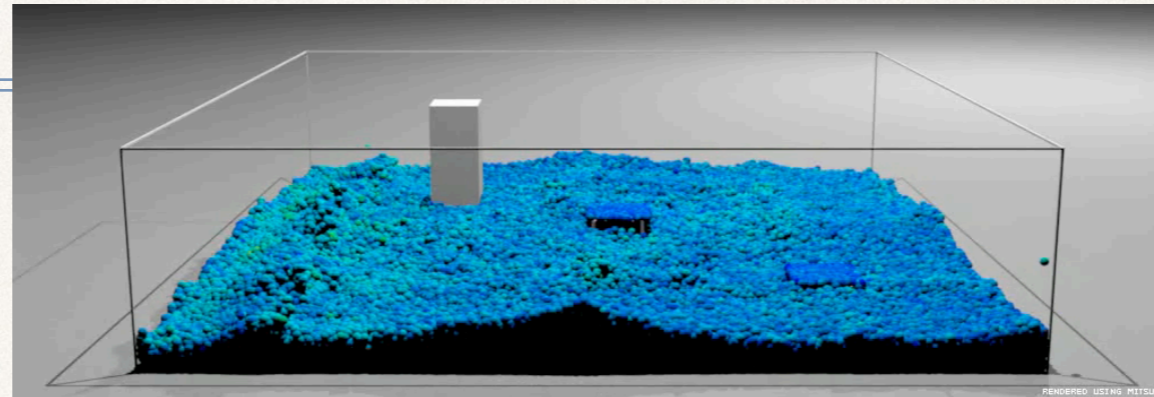
IRM (©Hellerhoff)

Aide au diagnostic
Aide au soin

Où se cachent...

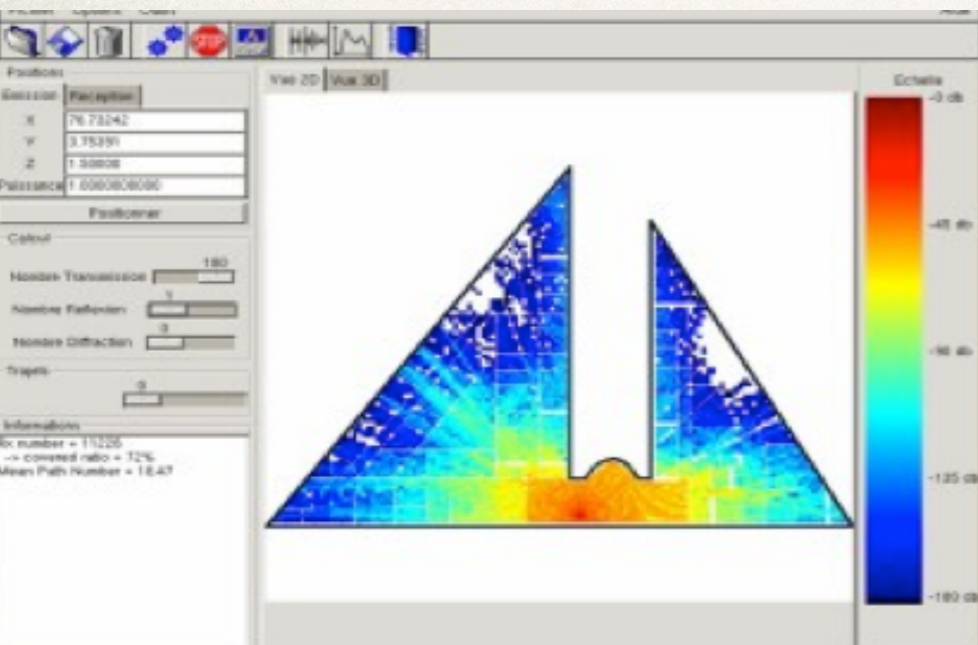
... les images numériques ?

XLIM

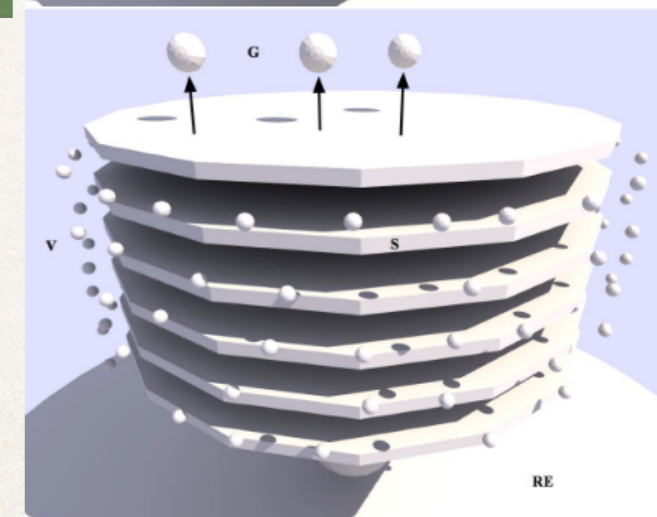
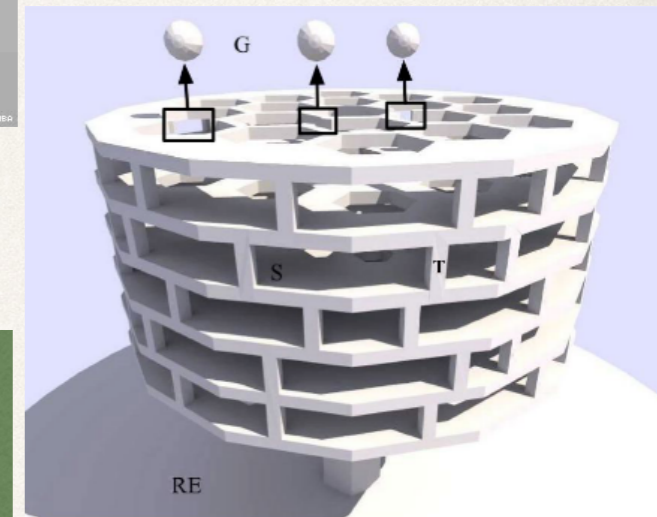
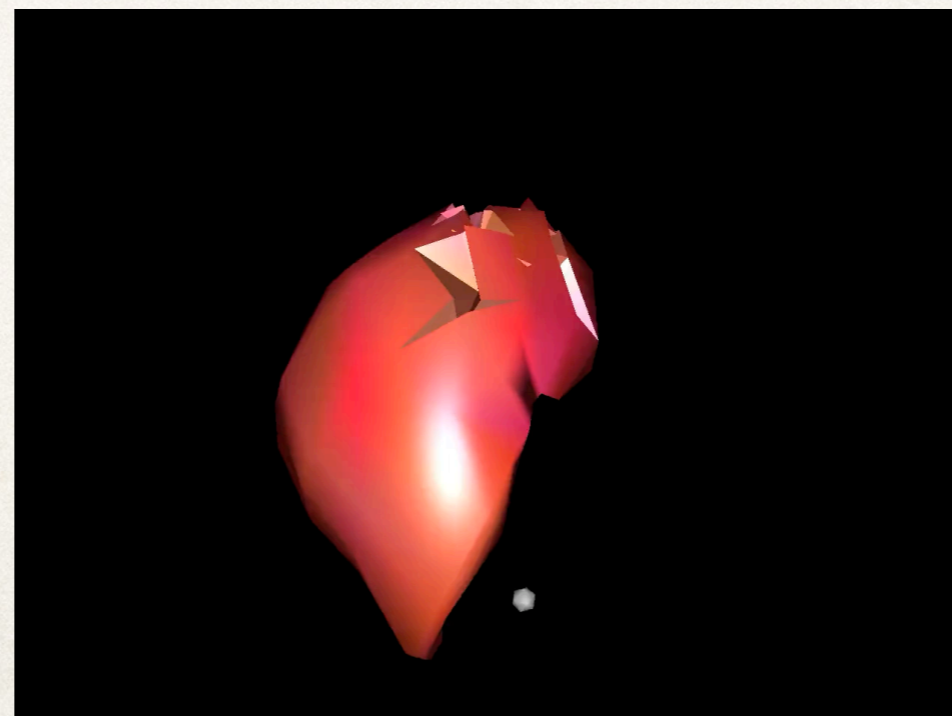


Simulation

Comprendre des phénomènes
Tester



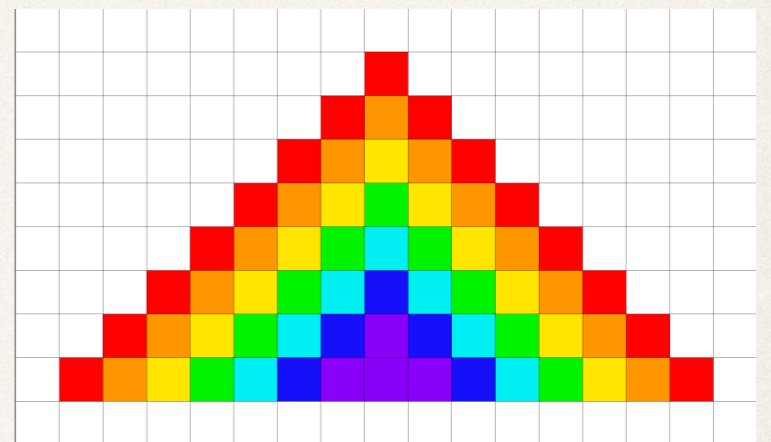
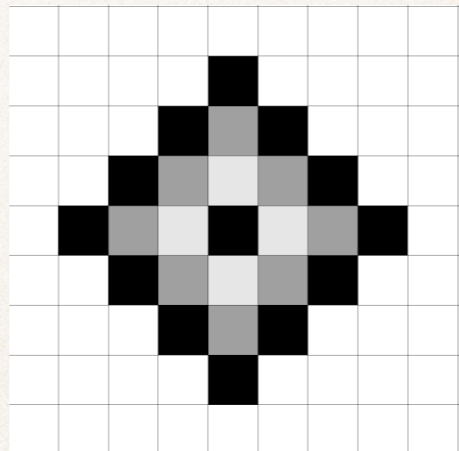
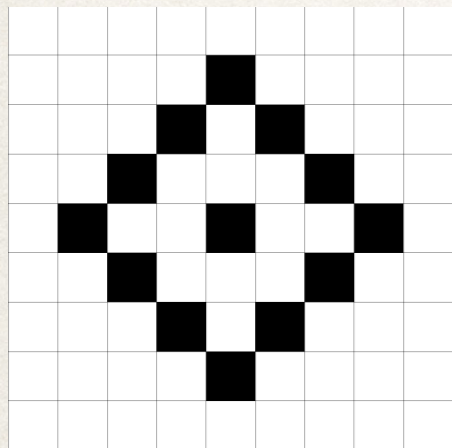
Simulation de la diffusion d'ondes dans un bâtiment



Deux hypothèses sur la topologie d'une structure biologique : l'appareil de golgi

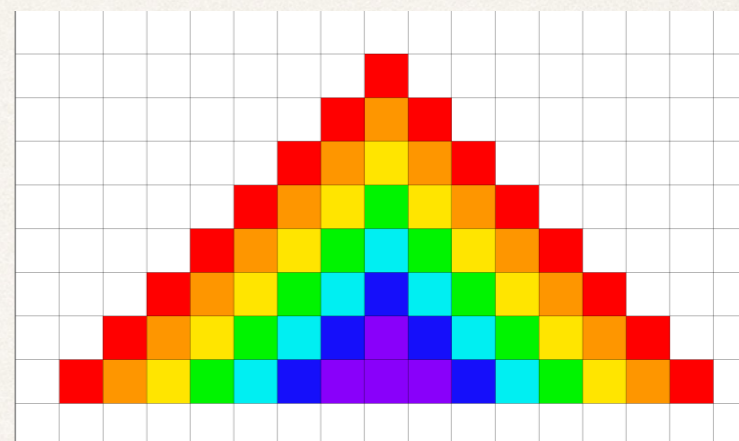
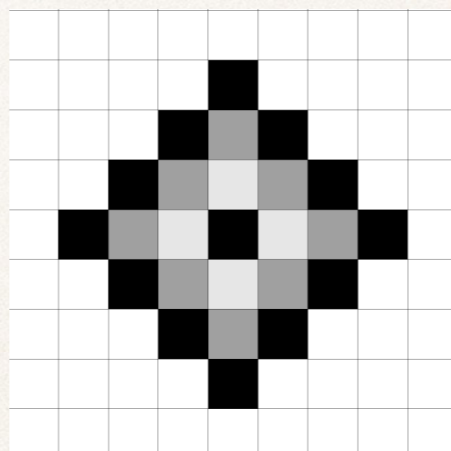
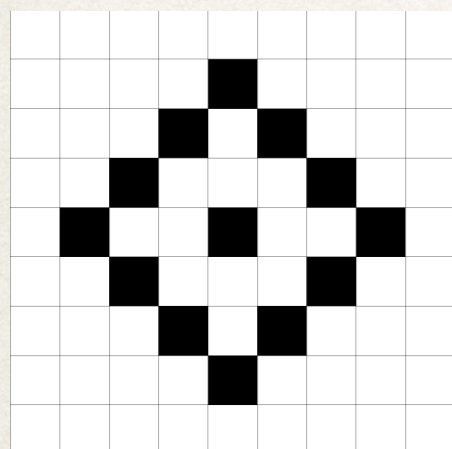
et les maths ? ... dans les images numériques

Image numérique



et les maths ? ... dans les images numériques

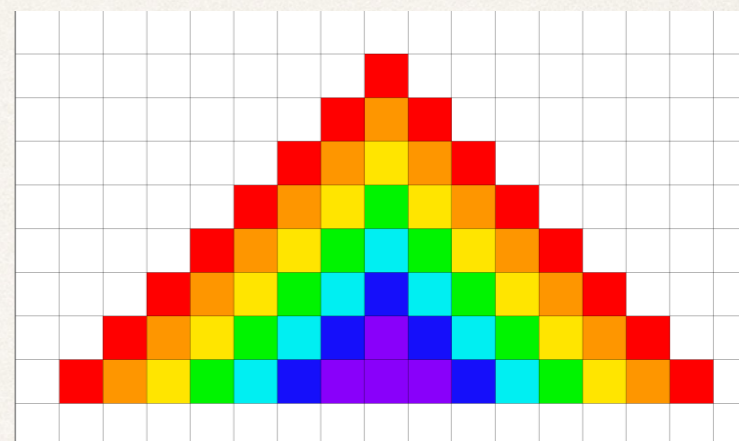
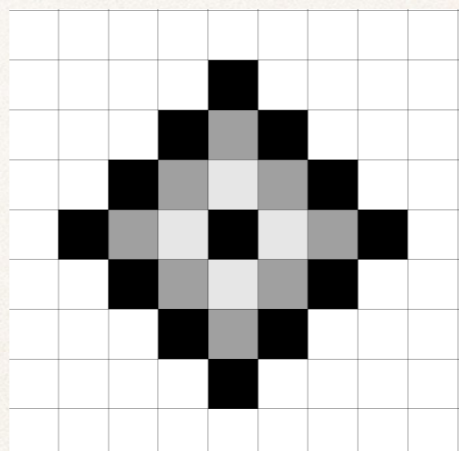
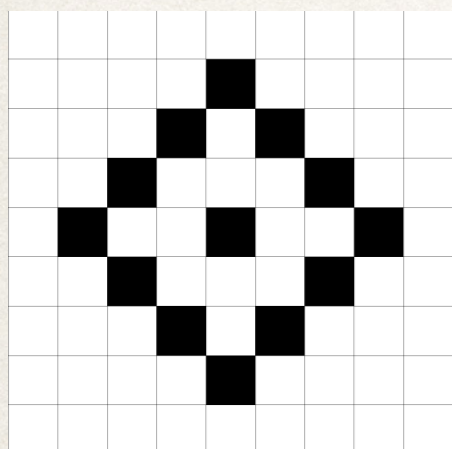
Image numérique



Une grille carrée 2D dont chaque élément ou pixel est associé à une valeur

et les maths ? ... dans les images numériques

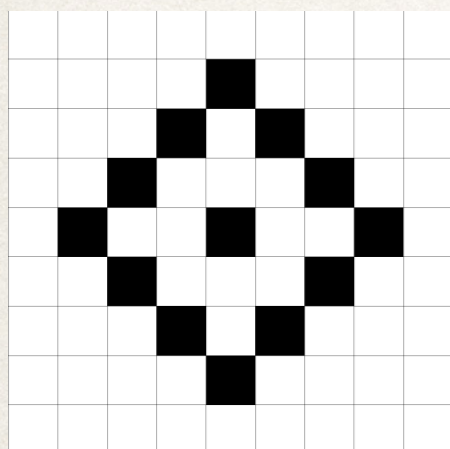
Image numérique



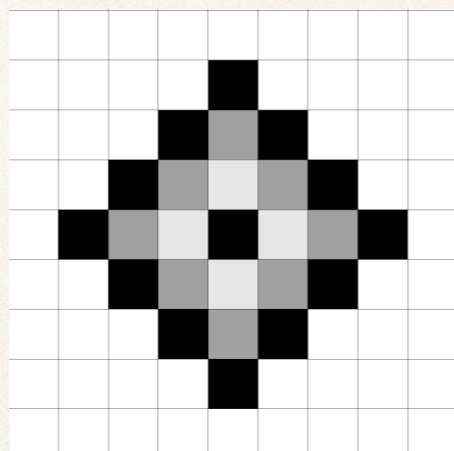
Une grille carrée 2D dont chaque élément ou pixel est associé à une valeur

et les maths ? ... dans les images numériques

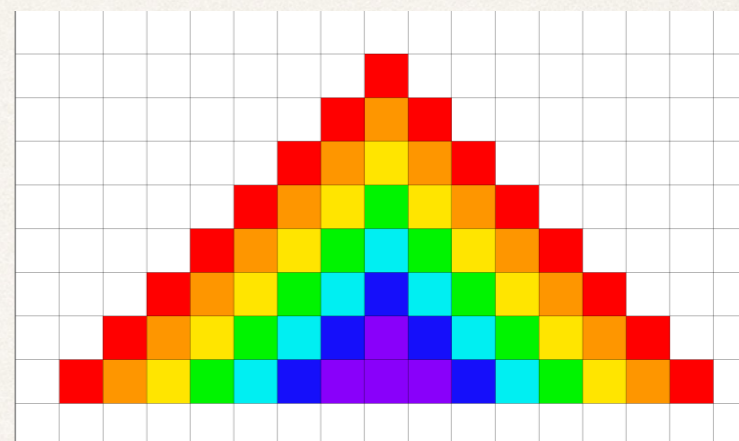
Image numérique



$$(\mathbb{Z}^2, \mathbb{Z}^2 \rightarrow \{0,1\})$$



$$(\mathbb{Z}^2, \mathbb{Z}^2 \rightarrow [0,255])$$

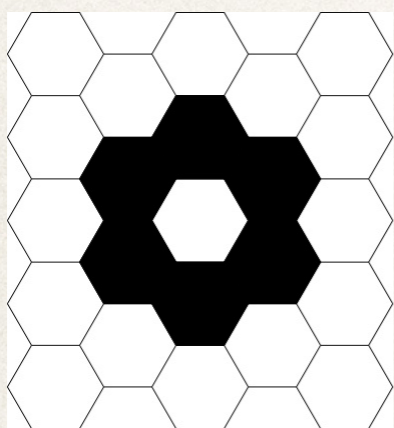


$$(\mathbb{Z}^2, \mathbb{Z}^2 \rightarrow [0,255] \times [0,255] \times [0,255])$$

- « Définition » (image numérique) : un couple (S,I) avec
- ❖ S un ensemble structuré appelé support ou domaine
 - ❖ I une fonction qui associe à chaque élément de S une quantité

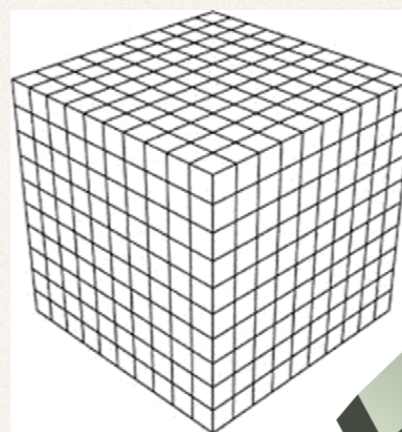
et les maths ? ... dans les images numériques

Image numérique

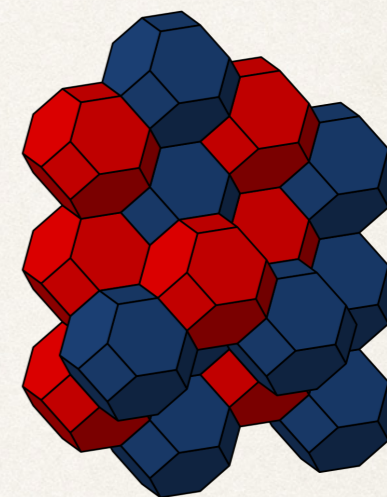


grille hexagonale

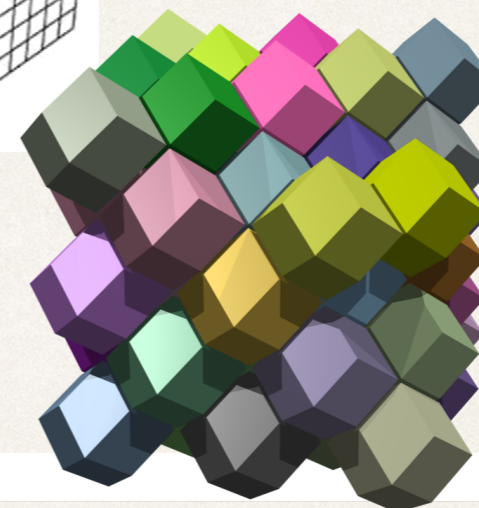
et en 3D ?



cubes



octaèdre
tronqué



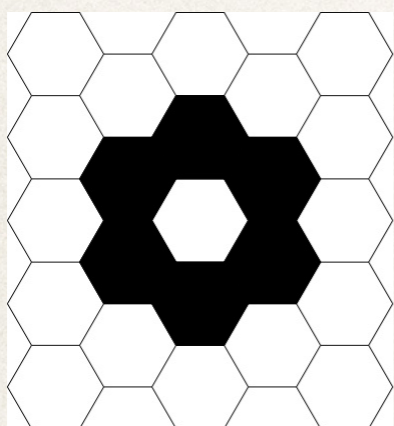
dodécaèdre
rhombique

« Définition » (image numérique) : un couple (S, I) avec

- ❖ S un ensemble structuré appelé support ou domaine
- ❖ I une fonction qui associe à chaque élément de S une quantité

et les maths ? ... dans les images numériques

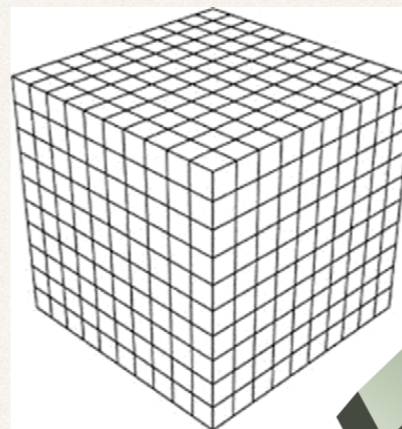
Image numérique



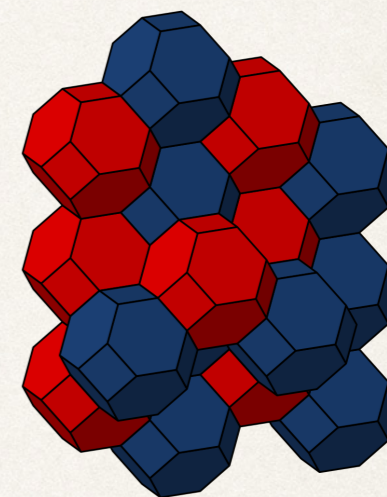
grille hexagonale

Pavage de l'espace

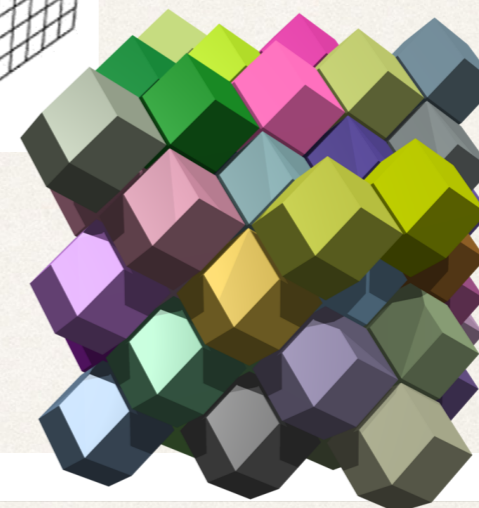
et en 3D ?



cubes



octaèdre tronqué

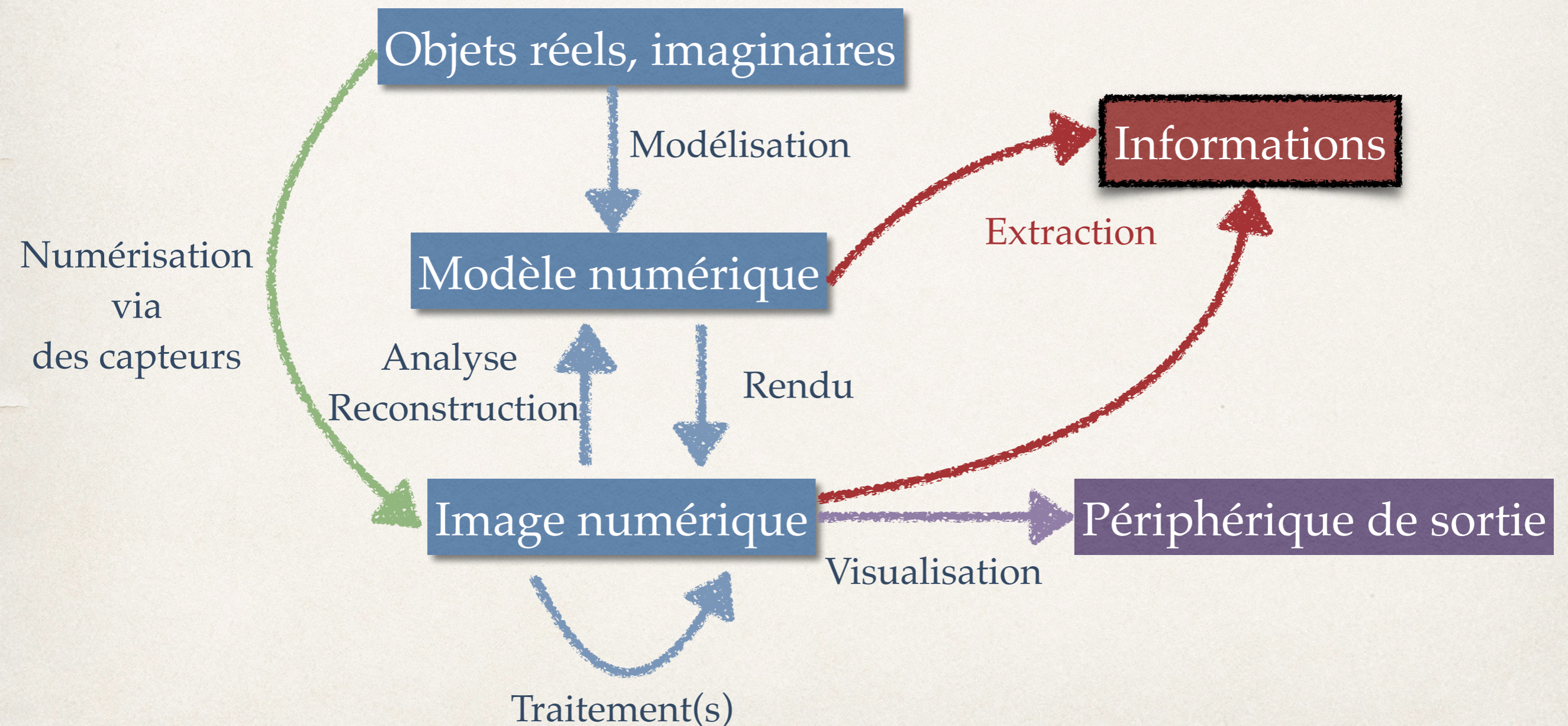


dodécaèdre rhombique

« Définition » (image numérique) : un couple (S, I) avec

- ❖ S un ensemble structuré appelé support ou domaine
- ❖ I une fonction qui associe à chaque élément de S une quantité

... et les maths ? ... dans la chaîne de manipulation des images numériques



et les maths ?... *dans le traitement*

Image numérique

Traitement(s)



Image numérique
« améliorée » (?)



Modifier la répartition des couleurs dans l'image

Améliorer le contraste

Rehausser des contours

Lisser les contours

Ôter des défauts (bruit)

...

et les maths ?... *dans le traitement*

Image numérique

Traitement(s)



Image numérique



image satisfaisante



image surexposée



image sous-exposée

et les maths ?... *dans le traitement*

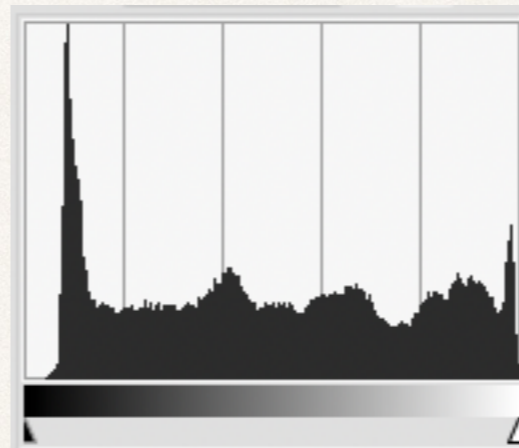
Image numérique

Traitement(s)



Image numérique

Grille carrée 2D



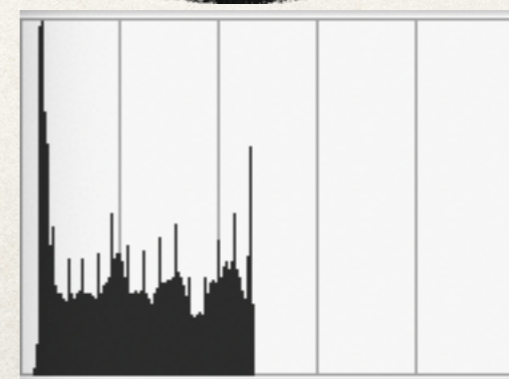
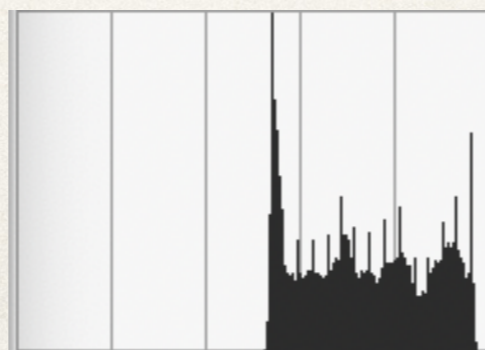
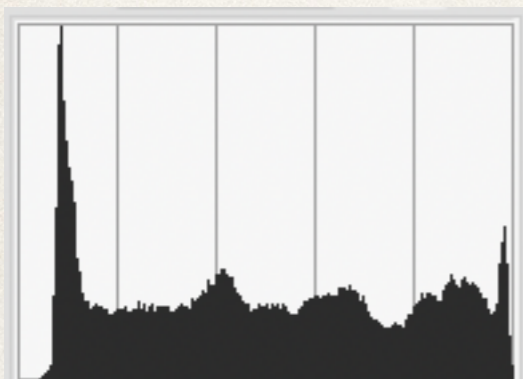
Dynamique de l'image : histogramme

et les maths ?... *dans le traitement*

Image numérique

Traitement(s)

Image numérique



et les maths ?... *dans le traitement*

Image numérique

Traitement(s)



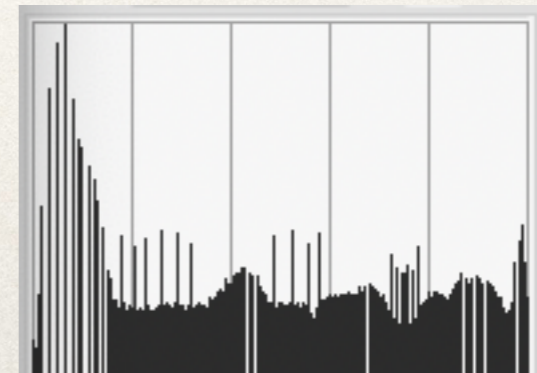
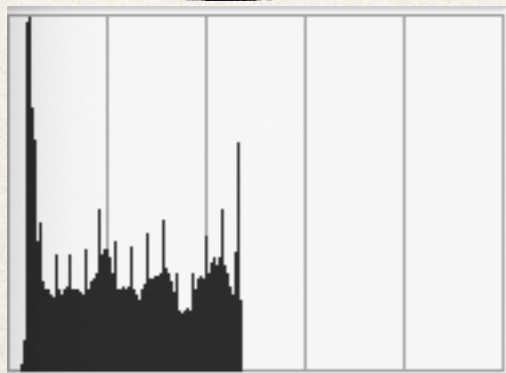
Image numérique



Modification
de l'image
via la manipulation
de son histogramme



information globale



et les maths ?... dans le traitement

Image numérique

Traitement(s)



Image numérique



Application de filtres
la valeur de chaque pixel
est modifiée en fonction
de celle de ses voisins

information locale



flou (moyenne pondérée)

adoucissement des contours

rehaussement des contours

dérivation de la fonction image

et les maths ?... *dans le traitement*

Image numérique

Traitement(s)



Image numérique

valeur moyenne vs valeur médiane



Image bruitée

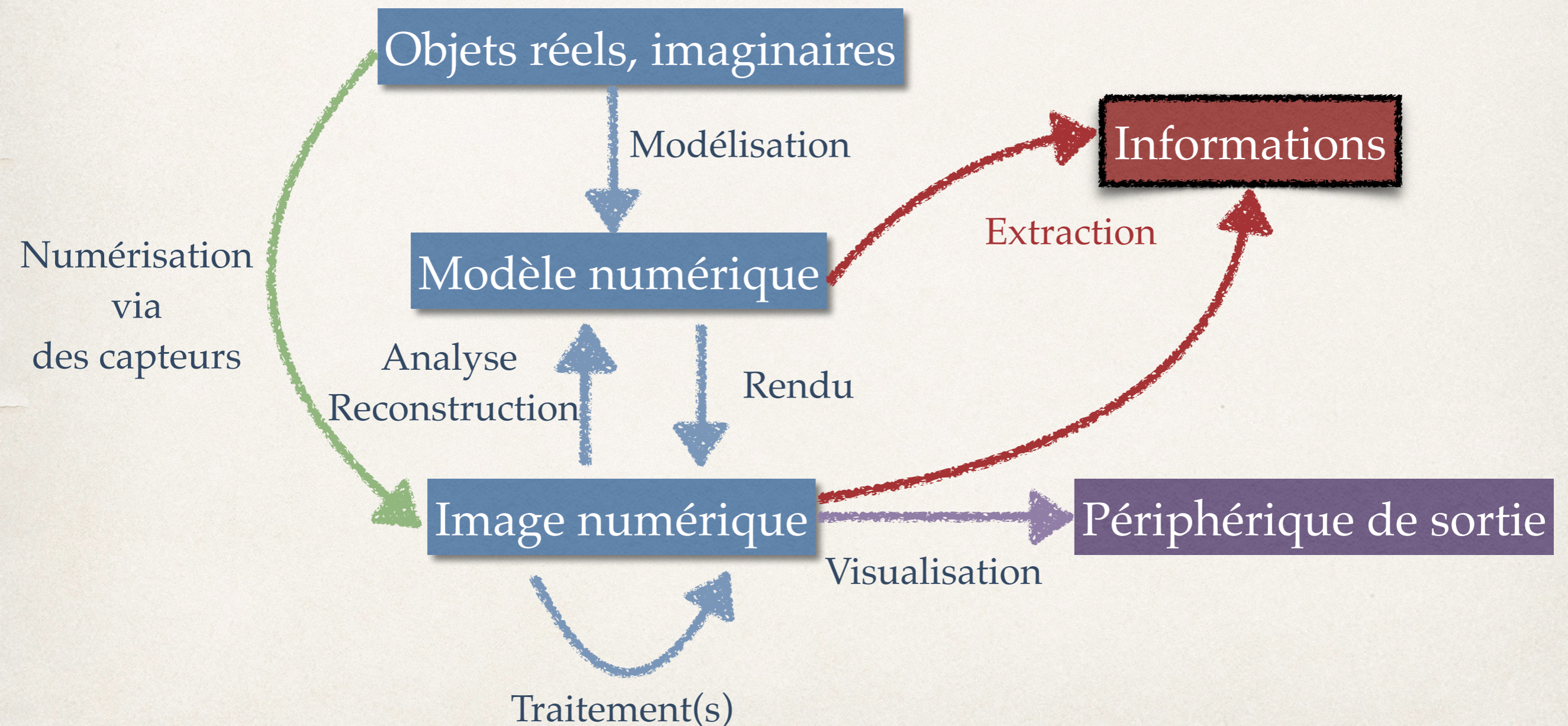


Image corrigée via
filtrage gaussien



Image corrigée via
filtrage médian

... et les maths ? ... dans la chaîne de manipulation des images numériques



et les maths ?... *dans l'analyse*



- ❖ Reconnaître des formes / des objets
- ❖ Calculer des propriétés géométriques ou structurelles (topologiques) de ces objets

Étape 1 : extraire les zones de l'image correspondant à différents objets
⇒ Segmentation

et les maths ?... *dans l'analyse*

Image numérique

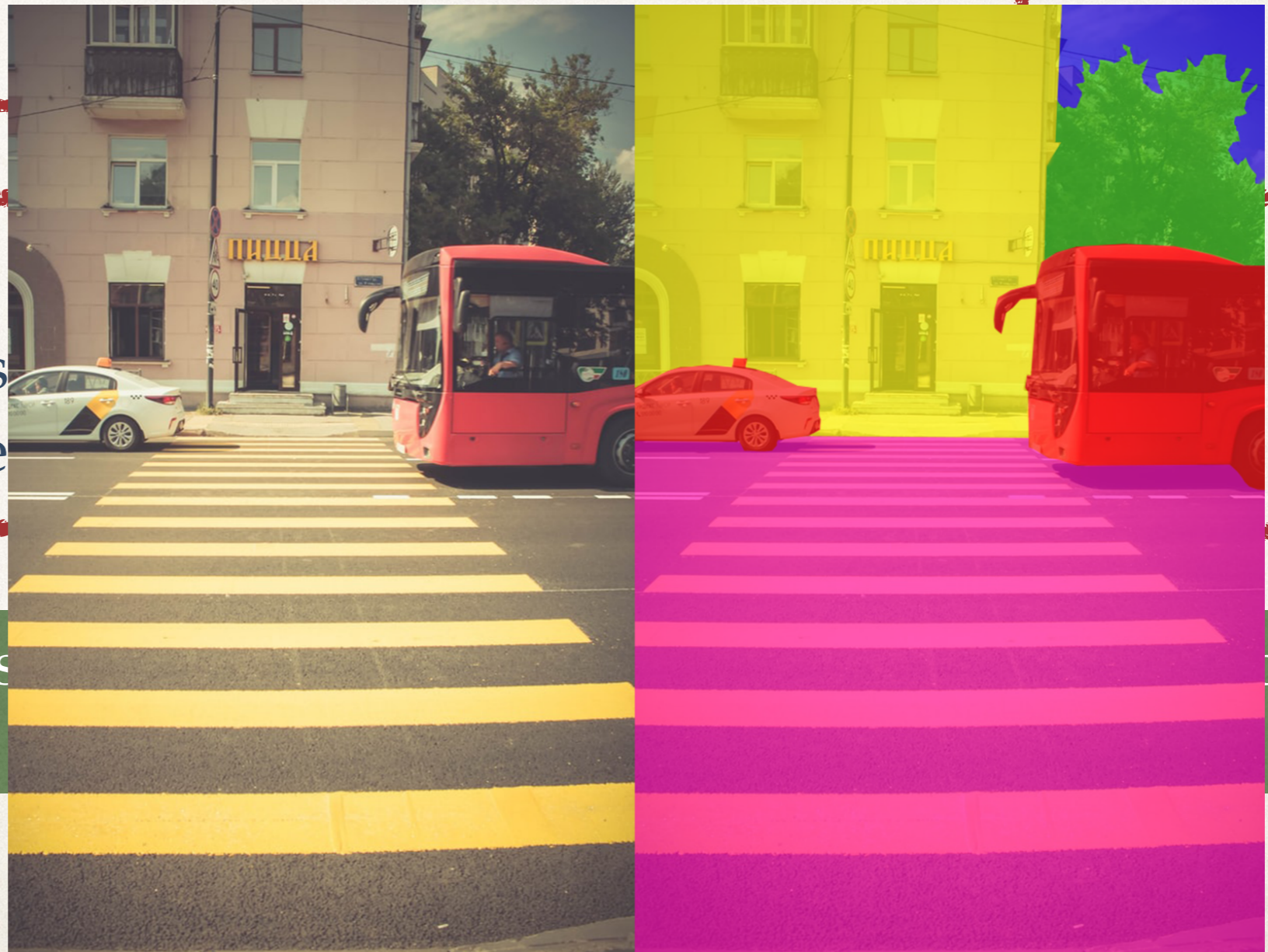
Analyse / Reconstruction

Modèle

- ❖ Reconnaître
- ❖ Calculer des géométriques

Étape 1 : extraire les

objets



et les maths ?... *dans l'analyse*



Segmentation : plusieurs approches

1. Classification des éléments de l'image en fonction de leur couleur :
2 éléments connexes qui ont la même couleur appartiennent à la même région
2. Approche région :
on part de régions que l'on fait évoluer (découpe/fusion ou croissance de régions)
3. Approche contour :
Recherche de contours soit avec des filtres, soit en faisant évoluer des modèles déformables (courbe fermée, surfaces fermée orientable)

et les maths ?... dans l'analyse

Image numérique

Analyse / Reconstruction

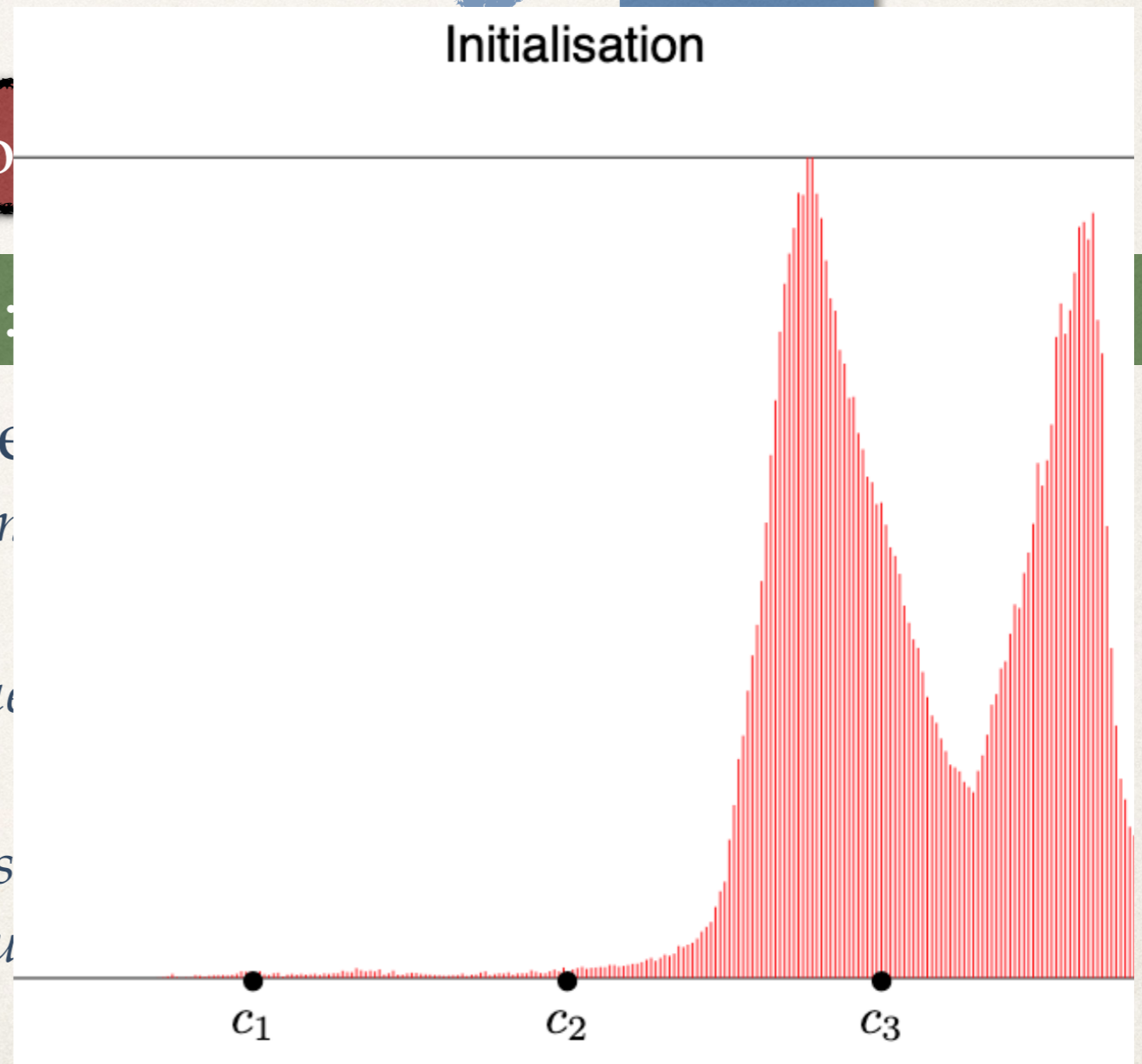
Modèle

Info

Segmentation :

1. Classification des éléments de
2 éléments connexes qui ont la même
2. Approche région :
on part de régions que l'on fait évoluer
3. Approche contour :
Recherche de contours soit avec des filtres
(courbe fermée, su

Initialisation



Algorithme des k-means

et les maths ?... dans l'analyse

Image numérique

Analyse / Reconstruction

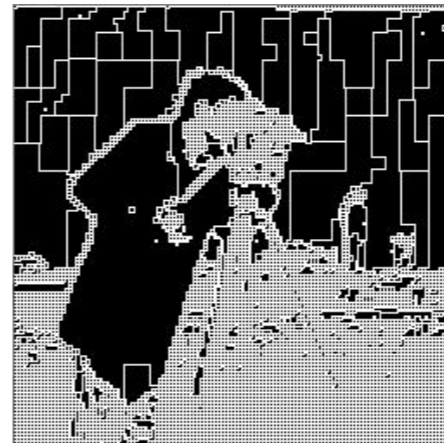
Modèle



1. Classification d'éléments
2 éléments connexes
2. Approche régionale
on part de régions
3. Approche contour
Recherche de contours



Image originale



Après division



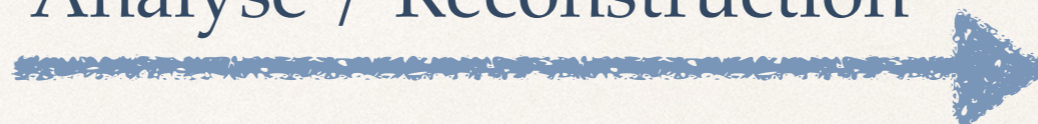
Après fusion

et les maths ?... dans l'analyse

Image numérique

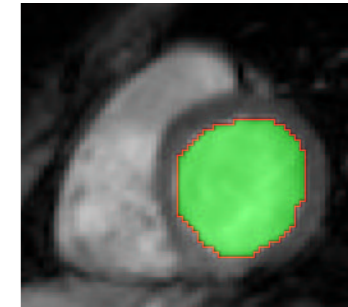
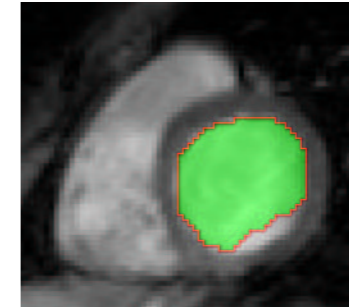
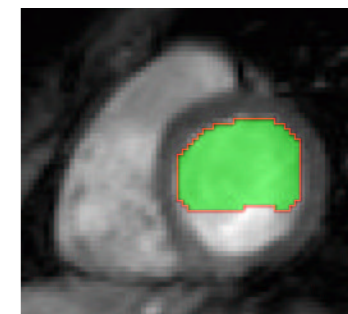
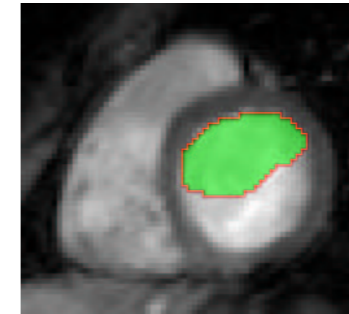
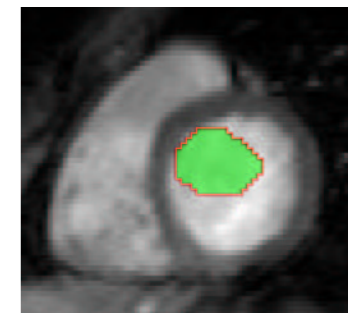
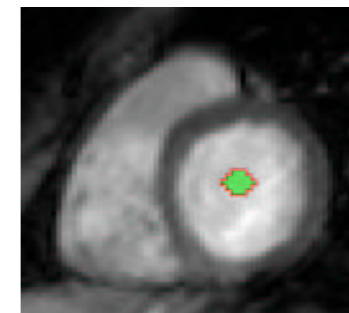
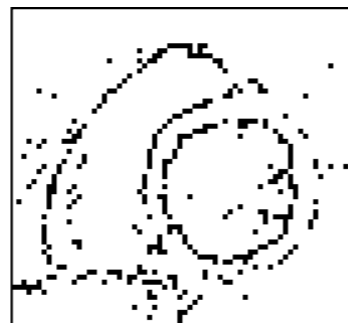
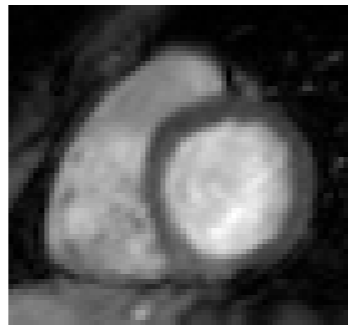
Analyse / Reconstruction

Modèle



Segmentation

1. Classification des éléments
2 éléments connexes qu
2. Approche région :
on part de régions que l'o
3. Approche contour :
Recherche de contours soit av
(courb



ar :

les

et les maths ?... *dans l'analyse*



Segmentation : plusieurs approches

1. Classification des éléments de l'image en fonction de leur couleur :
2 éléments connexes qui ont la même couleur appartiennent à la même région
2. Approche région :
on part de régions que l'on fait évoluer (découpe/fusion ou croissance de régions)
3. Approche contour :
Recherche de contours soit avec des filtres, soit en faisant évoluer des modèles déformables (courbe fermée, surfaces fermée orientable)

Connexité et courbe / surface fermée... sur des espaces discrets...

et les maths ?... *dans l'analyse*



Analyse & Reconnaissance de formes

- ❖ Reconnaissance de formes géométriques :
 - ⇒ segments de droite, cercle...
- ❖ Calcul de propriétés géométriques :
 - ⇒ longueur, courbure, tangente, normale...
- ❖ Calcul de propriétés topologiques :
 - ⇒ nombre de composantes connexes, nombre de trous...

Formes géométriques et propriétés bien définies... dans les espaces continus

et les maths ?... dans l'analyse



- ❖ Recon

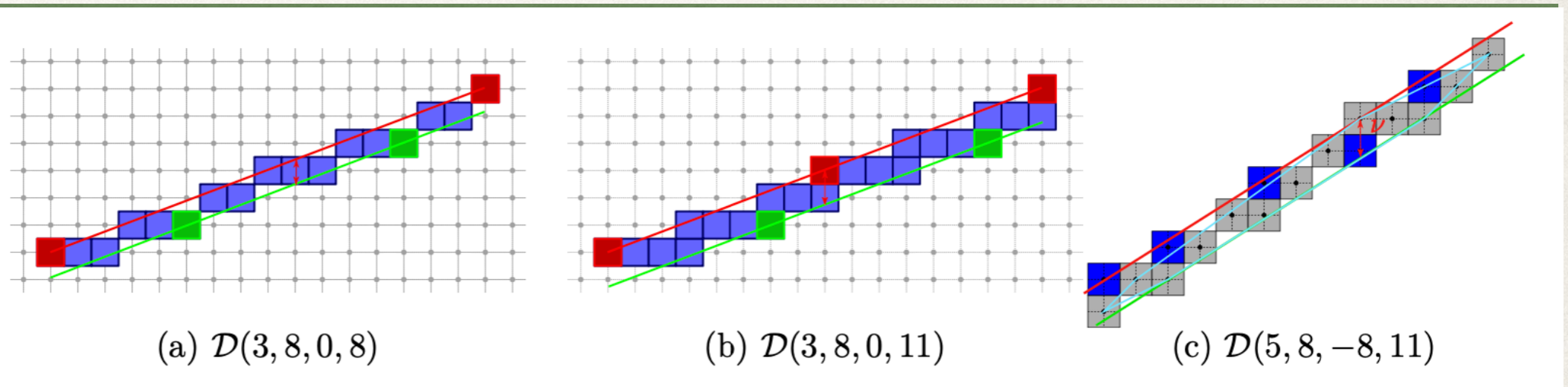
⇒ se

- ❖ Calcul

⇒ longueur, courbure, tangente, normale...

- ❖ Calcul de propriétés topologiques :

⇒ nombre de composantes connexes, nombre de trous...



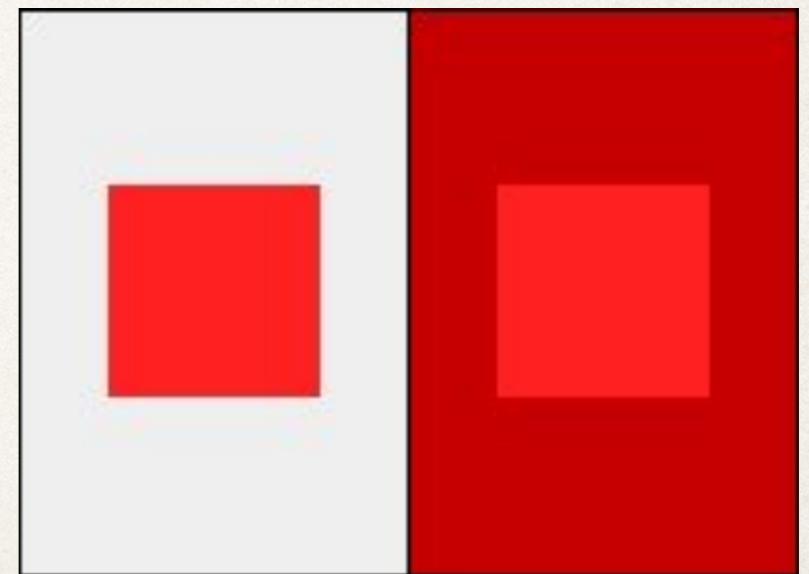
et les maths ?... *dans l'analyse*



Analyse & Reconnaissance de formes



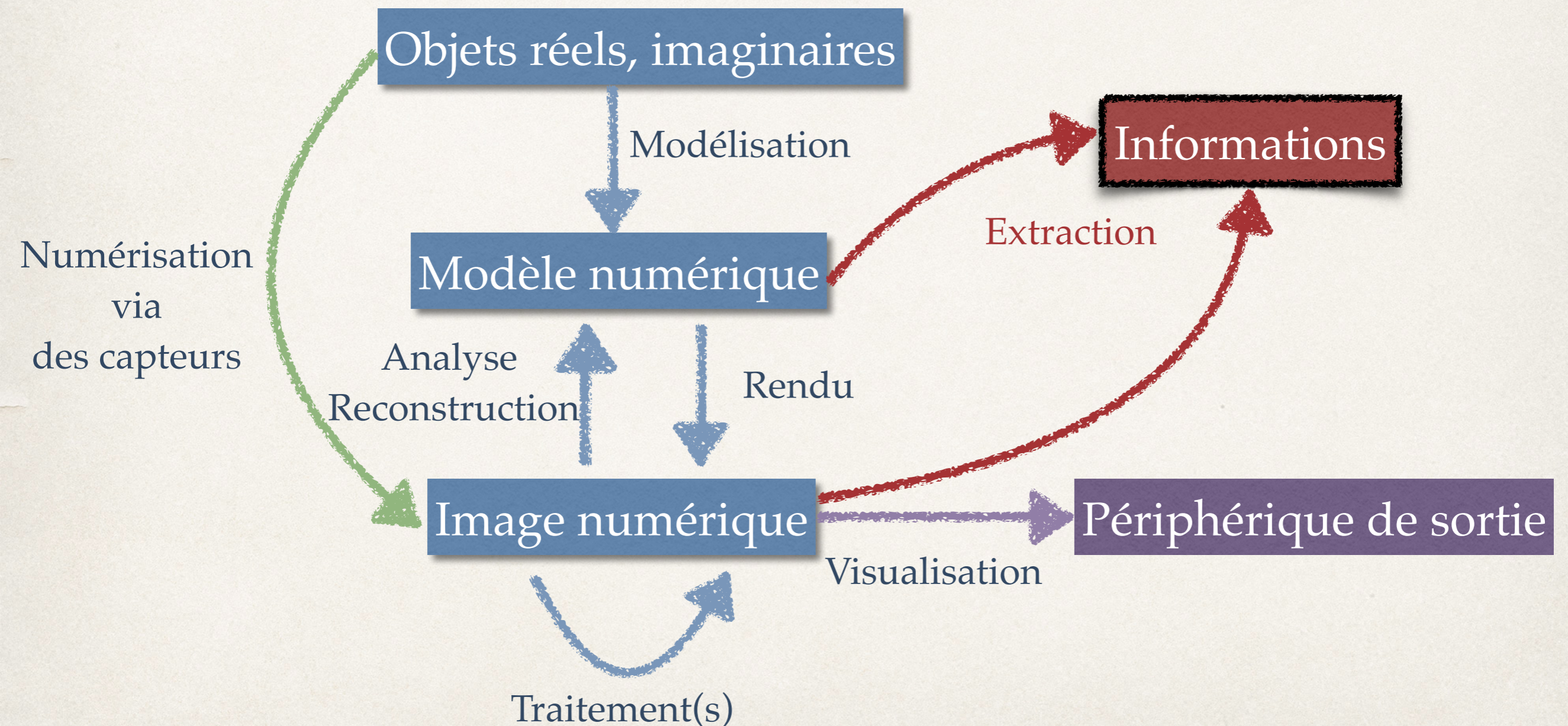
Illusion d'optique ?



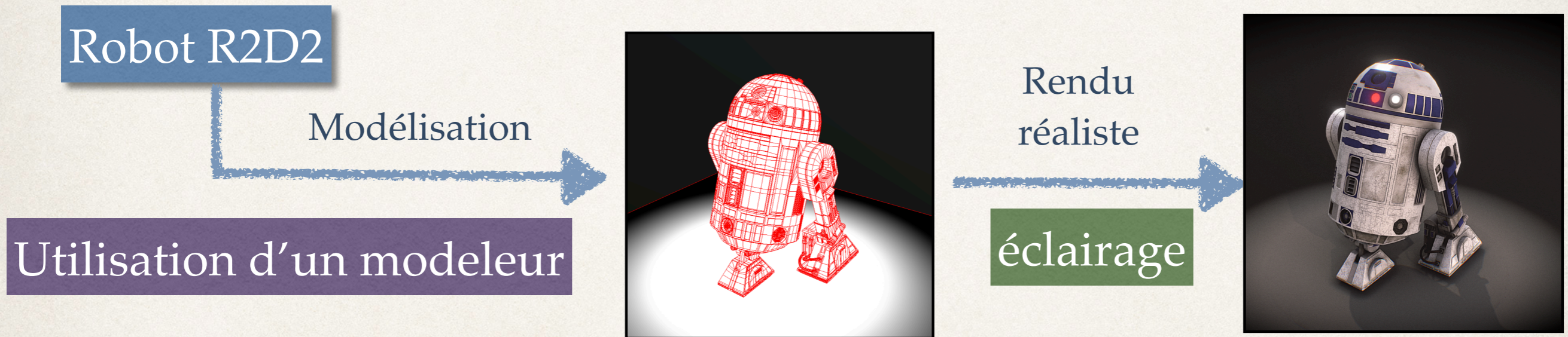
... parfois non

C'est parfois compliqué...

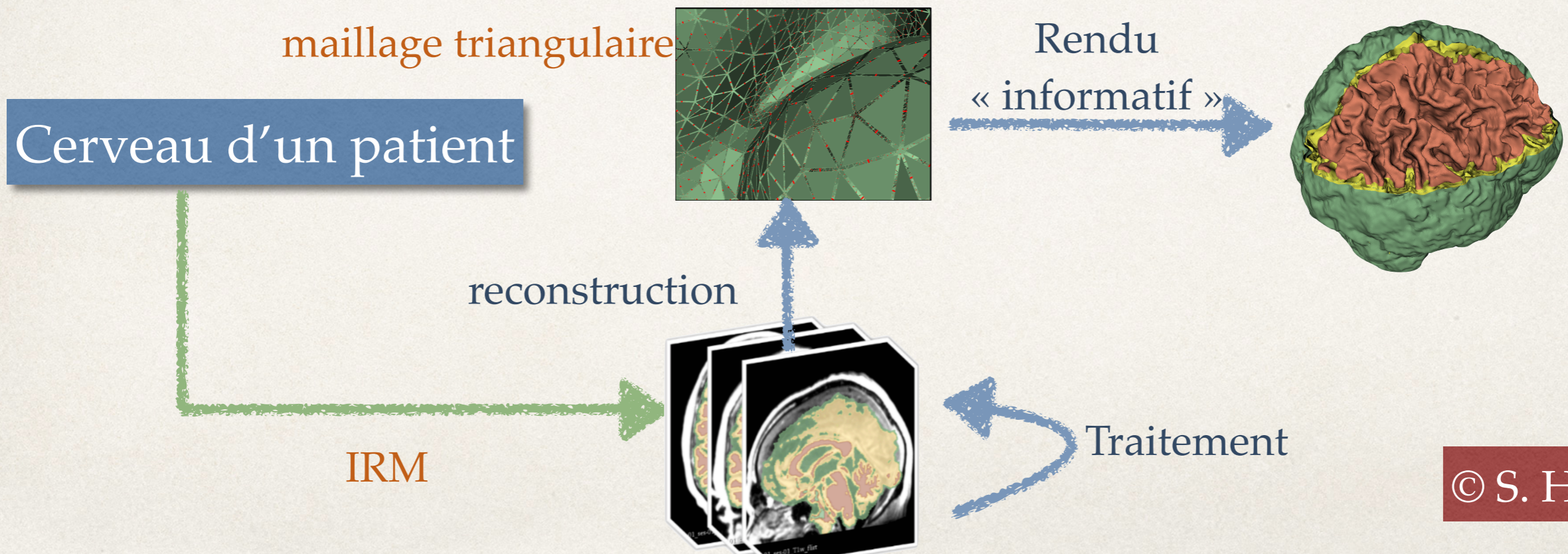
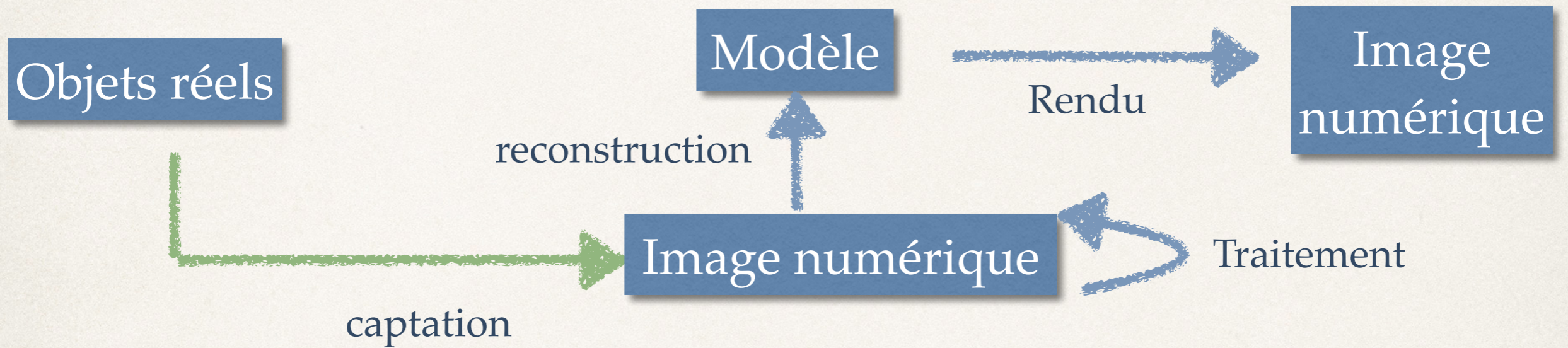
... et les maths ? ... dans la chaîne de manipulation des images numériques



et les maths ? ... dans la synthèse d'images



et les maths ? ... dans la synthèse d'images



et les maths ? ... dans la synthèse d'images

Modèle

Construit ou reconstruit à partir :

- ❖ de données images non structurées
*nuage de points, ensemble de voxels,
soupe de polygones...*
- ❖ d'un logiciel de modélisation

⇒ *maillages, surfaces de subdivision,
surfaces paramétriques, surfaces
implicites, complexes cellulaires...*



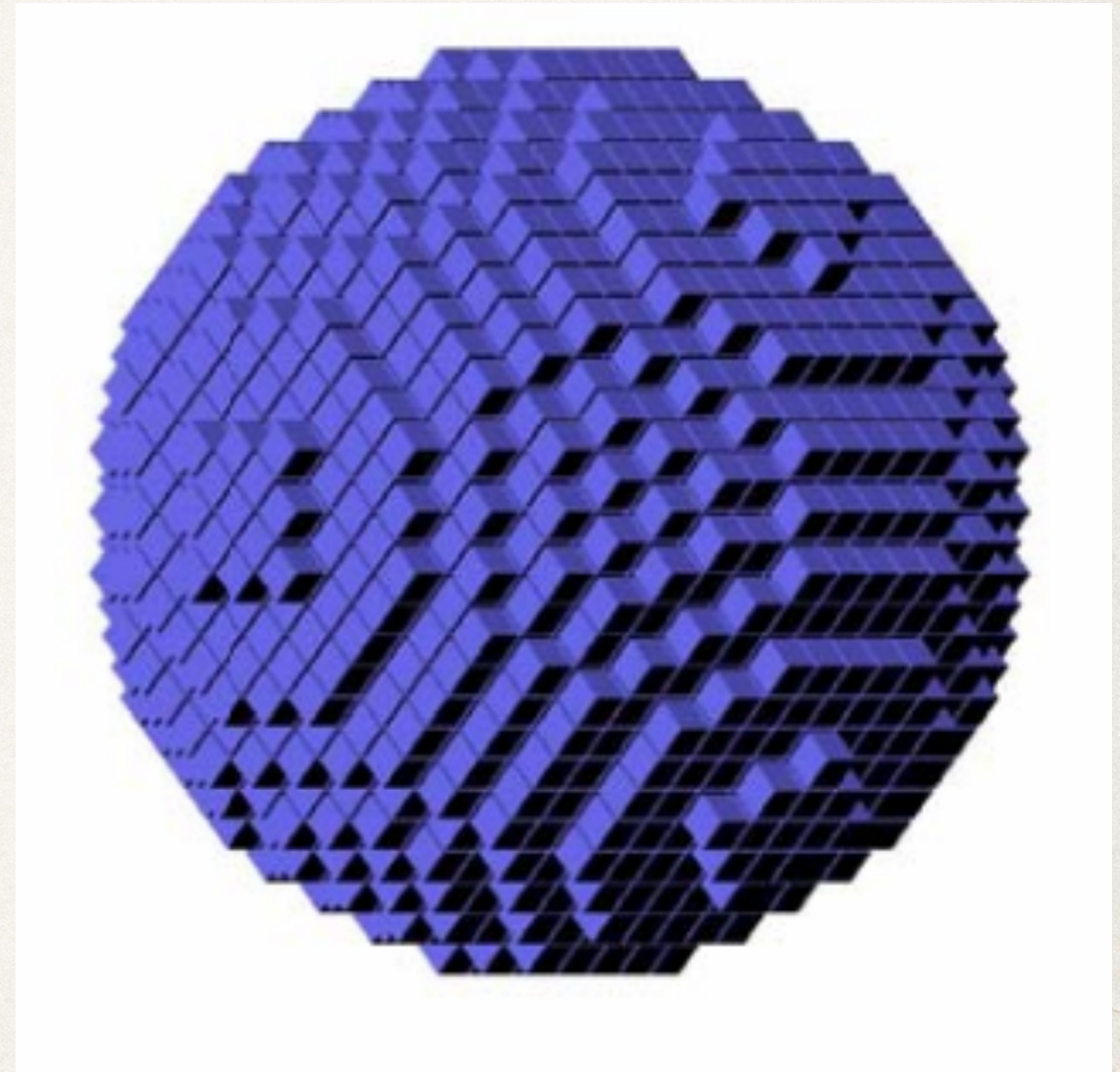
Stanford bunny (nuage de points)

et les maths ? ... *dans la synthèse* *d'images*

Modèle

Que représente-t-on ?

- ❖ l'objet lui-même
- ❖ le bord / la surface de l'objet



et les maths ? ... dans la synthèse d'images



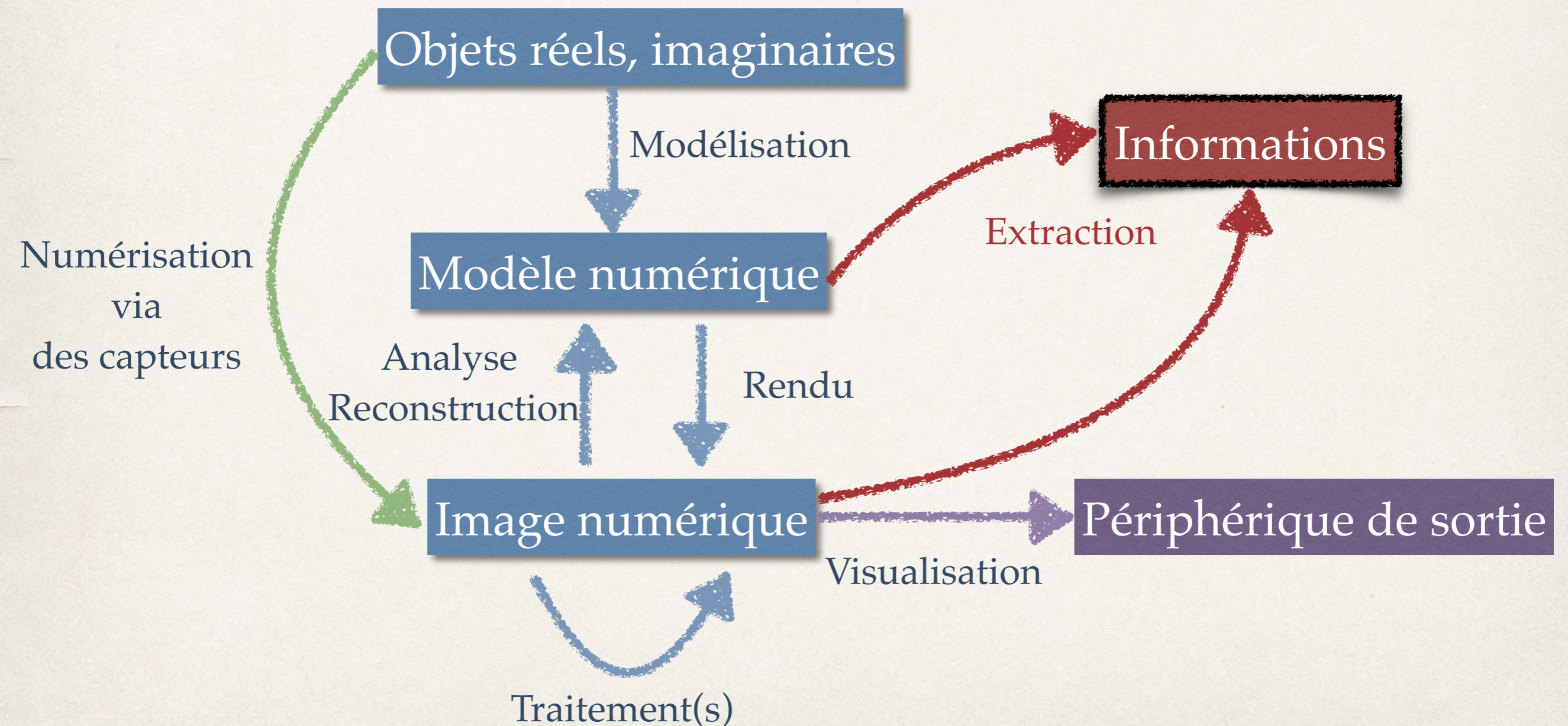
Structures topologiques combinatoires
Calcul d'invariants topologiques

Projections
Calculs d'intersection

Primitives géométriques
Transformations géométriques

Vecteurs & matrices
Trigonométrie

des maths... *partout dans la chaîne de manipulation des images numériques !*



Des maths oui, ... mais des maths discrètes !

Géométrie

discrète

Topologie

Comment calcule-t-on une courbure discrète ?

Qu'est-ce qu'une droite discrète ?

Qu'est-ce qu'une courbe simple fermée discrète ?

Qu'est-ce qu'une composante connexe ?

...

Des maths oui, ... mais des maths discrètes !

Ce n'est pas si facile...

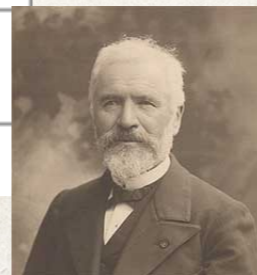
Comment définir la connexité

idée naturelle :
clôture transitive
d'une relation d'adjacence

Quelle relation d'adjacence ?

Essai 1 : 2 pixels sont adjacents
s'ils partagent une arête ou un sommet

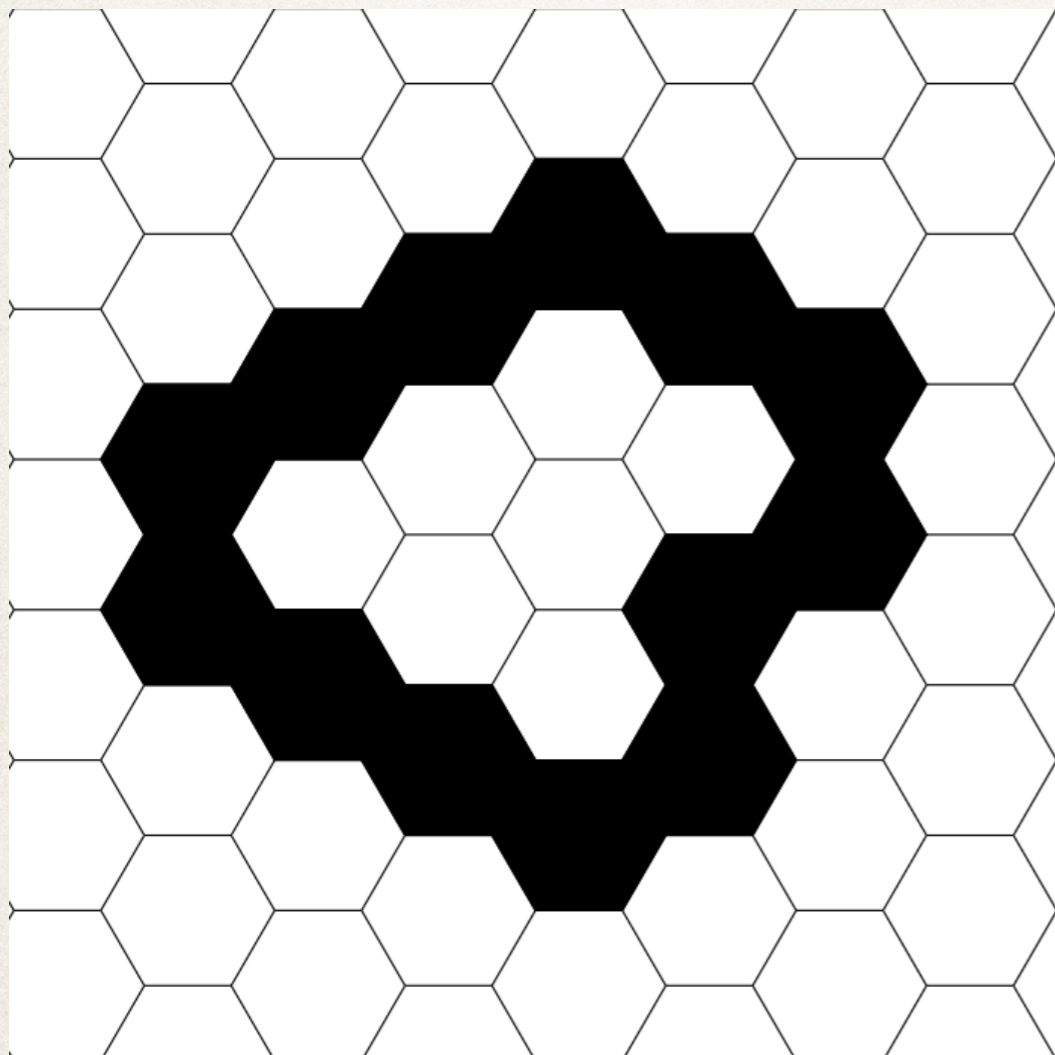
l'espace est séparé en deux
composantes connexes par un
simple séparé l'espace en
deux composantes connexes
non connexes



Topologie sur une grille 2D

Des maths oui, ... mais des maths discrètes !

Comment définir la connexité sur une grille hexagonale 2D ?



idée naturelle :
clôture transitive
d'une relation d'adjacence

Quelle relation d'adjacence ?

Ici pas d'ambiguïté
adjacence par arête



adjacence par sommet

Des maths oui, ... mais des maths discrètes !

Tout l'outillage dont on a besoin existe dans les espaces continus :
comment le transférer sur un espace discret ?

Trois approches principales

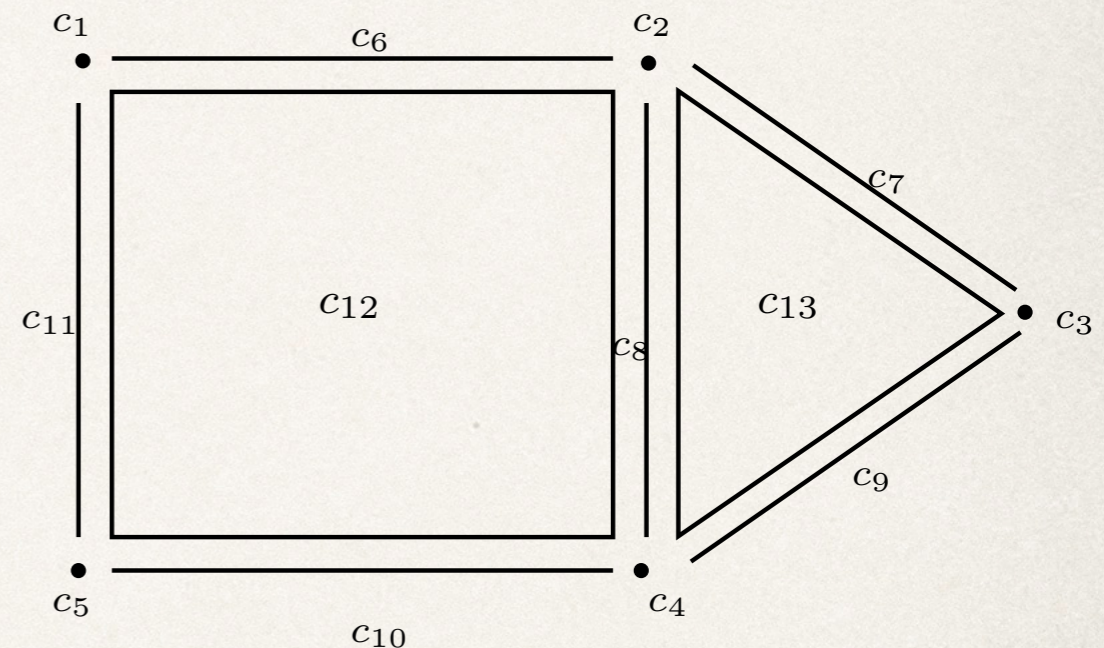
- ❖ plonger l'espace discret dans un espace continu / discrétiser un espace continu
- ❖ définir les notions utiles sur l'espace discret en vérifiant qu'elles ont une certaine « cohérence » avec leur pendant dans le continu
 - * convergence des notions discrètes vers leur pendant continu lorsque la résolution de l'image devient de plus en plus fine
 - * respect de propriétés / théorème (exemple théorème de Jordan)
- ❖ associer une structure cellulaire à l'espace discret
 - * topologie naturellement définie
 - * nécessité d'un plongement géométrique

Des maths oui, ... mais des maths discrètes !

Modèle

Un mot sur les représentations
cellulaire

*Un objet ou son bord est décomposé en
cellules de différentes dimensions reliées
par des relations d'incidence*



Complexe cellulaire

Intermédiaire entre le discret et le continu

Question philosophique...

Structures cellulaires utilisées parfaitement définies en dimension n
Propriétés topologiques également calculables en dimension n

Exemple : calcul du nombre de trous en toute dimension

Pourquoi ne pas utiliser pour structurer des données autres que des données image ?

Quel sens prennent les propriétés calculées sur d'autres types de données ?

Analyse topologique de données

Pour conclure...

On n'a pas du tout parlé de :

- ❖ compression d'images
- ❖ espaces de couleurs
- ❖ réalité augmentée
- ❖ traitement du signal
- ❖ animation
- ❖ format de fichiers
- ❖ ...

et à peine du rendu

qui recèlent également des trésors mathématiques...



... ni de l'IA qui révolutionne pourtant l'analyse d'images

