



Collège Jacques Yves Cousteau Bussy Saint Georges

Académie de Créteil
2020/2021

Projet : *Le Fractionmètre, La naissance d'un nouvel instrument pour les mathématiques*

Notre vidéo de construction du Fractionmètre

<https://youtu.be/XjcGlilGY7Y>



Informations sur la conception de l'objet :

But : Participer au concours "Fabrique tes maths"

Nom de l'objet mathématique : Fractiomètre

Concepteurs de l'objet :

Martin Basille (élève de 3ème au collège Jaques Yves Cousteau) :

- Développement d'une modélisation virtuelle du Fractiomètre en Python
- Rédaction de ce livret

Cyprien Berger (élève de 4ème au collège Jaques Yves Cousteau) :

- Développement d'une modélisation virtuelle en Scratch du Fractiomètre dans sa configuration d'estimation de racines carrées et de produits
- Participation à la confection d'un Fractiomètres sous forme matérielle (jointe dans le colis envoyé à l'IREM pour le concours).

Quentin Nunes, Lauriane Richoux, Meriem Ben Moussa et Ewen Guyomarch (élèves de 4ème au collège Jaques Yves Cousteau) :

- Confection de deux Fractiomètres sous forme matérielle (jointe dans le colis envoyé à l'IREM pour le concours).

Yacine Abou El Naga (élève de 3ème au collège Jaques Yves Cousteau) :

- Recherches sur l'astrolabe (car on voulait aussi l'appeler Fractiolabe, les fractions vues de l'origine sont comme des étoiles dans le ciel, sous un certain angle).
-

M.Mesmoudi (professeur de mathématiques au collège Jaques Yves Cousteau à Bussy st Georges (77) :

- Recherche sur les différentes propriétés et utilisations des rectangles élastiques posés
- Rédaction d'un article mathématique sur les rectangles élastiques posés
- Direction et encadrement du projet

Mme.Aubry (documentaliste du collège Jaques Yves Cousteau) :

- Aide à la réalisation d'une vidéo présentant le projet du Fractiomètre



Introduction :

Ce livret présente le travail fait par des élèves de quatrième et troisième ainsi que par un professeur de mathématiques du collège Jaques Yves Cousteau, à Bussy st Georges (77). Il porte sur la création et l'utilisation d'un nouvel instrument mathématique utilisant la géométrie afin de réaliser des estimations de résultats d'opérations très variées, sans faire de calcul. Nous l'avons appelé « Fractiomètre ». La problématique de départ était « Quel lien existe-t-il entre la géométrie et les fractions ? ». Au fil du projet, de nouvelles utilisations du Fractiomètre ont été trouvées en plus du calcul fractionnaire, faisant de cet instrument un outil polyvalent.

Cet instrument permet d'estimer le résultat d'un assez grand nombre d'opérations assez rapidement, en ne faisant presque pas de calculs. Il peut par exemple estimer le résultat des quatre opérations sur les fractions, la racine carrée d'un nombre, un produit de deux nombres, chercher les racines de polynômes du premier ou second degré, ou aider dans les calculs trigonométriques. Son intérêt réside aussi dans la manipulation, le raisonnement, le travail sur l'erreur, les tests et le fait d'appliquer des règles mathématiques pour la résolution de calculs algébriques.

*Dans la suite de ce livret, le mot « fraction » sera employé au sens large, incluant ainsi les **nombres rationnels**.*

($\frac{3,2}{4,7}$ sera donc considéré dans ce rapport comme une fraction).

Les images illustrant ce livret sont des figures réalisées à l'aide de Geogebra (logiciel de géométrie dynamique), des

photos du fractionmètre dans sa version matérielle, ainsi que des captures d'écran prises sur une modélisation de Fractionmètre codée en python par Martin Basille, un élève du projet.

Description du Fractionmètre :

Le Fractionmètre se compose d'un demi-plan muni d'un repère orthonormal et d'une demi-droite mobile pouvant pivoter autour de l'origine, servant de diagonale aux rectangles de papier utilisés pour les calculs. Nous l'avons réalisé avec un tableau blanc magnétique et une ficelle pour la diagonale. On y place ces rectangles (en papier ou en plastique) le long de l'axe des abscisses, afin d'exécuter diverses opérations. Les transformations applicables sur ces rectangles sont : des symétries axiales, des translations (le long de l'axe des abscisses), des étirements et contractions dans la direction des deux axes du repère, et des homothéties. On qualifiera ces rectangles de « rectangles élastiques posés sur l'axe des abscisses », et parlera de hauteur et de base d'un rectangle à la place de longueur et largeur.

Nous avons réalisé cet outil grâce à un tableau blanc magnétique recouvert de papier millimétré comme support, ainsi qu'un fil noir très fin fixé au centre du repère, que nous tendons et faisons pivoter, en le fixant à l'aide d'un aimant au bord du tableau. Nous obtenons ainsi une diagonale suffisamment précise pour les estimations.

Le principe du Fractionmètre repose sur la représentation de fractions à l'aide de « familles » de rectangles dont le rapport de la base par la hauteur est égal à la fraction correspondante.

Certaines variantes ou extensions de cet outil peuvent également accueillir deux cadrans centrés sur l'origine, semblables à celui d'un rapporteur, le premier en degrés, et l'autre en radians, permettant ainsi certains calculs trigonométriques supplémentaires (conversion degrés-radians, et estimations des cosinus, sinus et tangentes d'un angle).

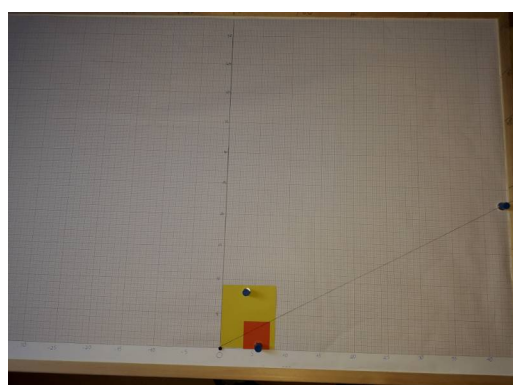
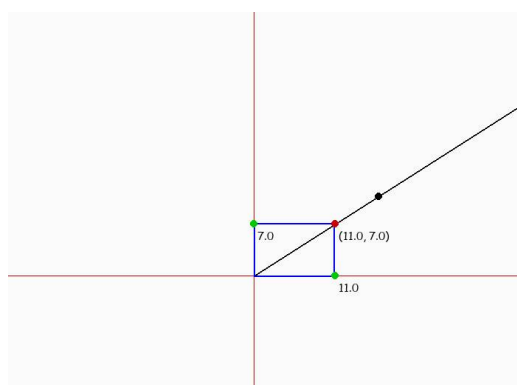


Image 2 : principe du Fractionmètre

Opérations sur les fractions :

Le Fractionmètre permet de faire de nombreuses opérations sur des fractions : additions, soustractions, multiplications, divisions, simplifications, etc. Pour exécuter ces calculs, la longueur de la base (côté posé sur l'axe des abscisses) et

de la hauteur (côté parallèle à l'axe des ordonnées) des rectangles du Fractiomètre seront respectivement égales au numérateur et au dénominateur de la fraction représentée par le rectangle.

Simplification de fractions :

Nous commençons ici par l'explication du calcul fractionnaire le plus simple réalisable à l'aide du Fractiomètre : la simplification de fractions.

Pour simplifier au maximum une fraction, il suffit de construire un rectangle (de préférence transparent) dont la longueur de la base est égale au numérateur de la fraction, et dont sa hauteur est équivalente au dénominateur de la fraction à simplifier. Une fois le rectangle placé sur le Fractiomètre, il faut simplement déplacer son sommet principal (sommet opposé à l'origine) sur la diagonale principale en direction de l'origine du repère (en considérant que le rectangle y a un sommet). La fraction irréductible est alors associée au plus petit rectangle posé dont le sommet principal est situé sur la diagonale principale et a des coordonnées entières. La transformation effectuée est une homothétie dont le centre est l'origine du repère.

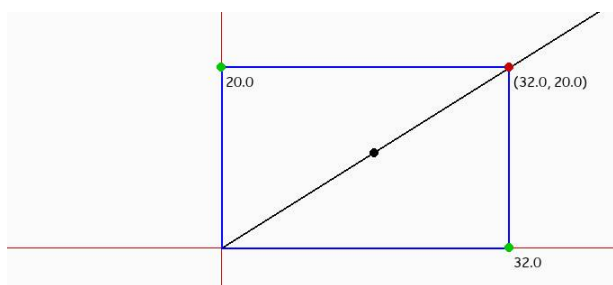


Image 3.1 : Rectangle élastique posé représentant la fraction $32/20$

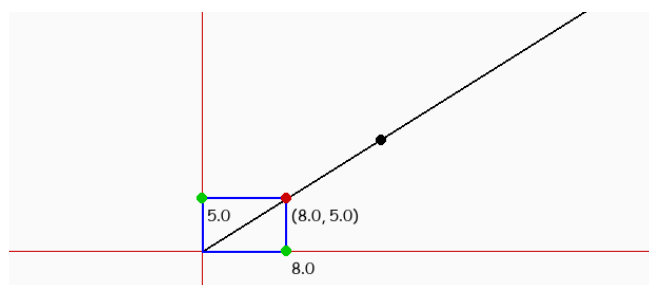


Image 3.2 : Rectangle élastique posé de l'image 3.1 une fois simplifié. $32/20 = 8/5$

Ce genre de transformations (déplacement du sommet principal le long de la diagonale principale) permet également d'autres opérations, tels que l'estimation de la quatrième proportionnelle ou la représentation de fonctions linéaires.

Voici une explication un peu moins théorique (prenons pour exemple la simplification de $32/20$) :

Nous commençons par construire un rectangle de base 32 et de hauteur 20, qui représente la fraction $32/20$, et le plaçons de façon à ce que son sommet inférieur gauche soit sur l'origine du repère.

Nous traçons ensuite ce que nous nommons sa « diagonale principale ». Il s'agit de sa diagonale reliant le sommet inférieur gauche (à l'origine du repère), et son sommet supérieur droit (nous nommons ce sommet « sommet principal »).

Nous cherchons ensuite la première intersection de la diagonale précédemment tracée avec un des sommets du quadrillage du repère.

Nous trouvons ici un point de coordonnées (8 ; 5). Son abscisse correspond au numérateur du résultat, et son

ordonnée à son dénominateur. $32/20$ peut donc être simplifié en $8/5$.

Somme de fractions :

Une autre opération concernant les fractions est possible : leur addition. Cette opération utilise une translation le long de l'axe des abscisses associée à une homothétie.

Voici les étapes afin de réaliser une addition de fractions à l'aide du Fractiomètre :

1. Choisir un premier rectangle représentant la première fraction de la somme.
2. Choisir un deuxième rectangle représentant la seconde fraction.
3. Pour chacun de ces deux rectangles choisir un rectangle aux proportions similaires (homothétie) de telle façon que les deux rectangles obtenus aient la même hauteur.
4. Mettre les deux représentants côte à côte pour former un seul grand rectangle.
5. Le résultat est la fraction représentée par le rectangle **à l'origine** dont le sommet principal est **le même** que celui du deuxième rectangle.

Exemple : Réalisation de la somme $(\frac{1}{2})+(\frac{3}{7})$:

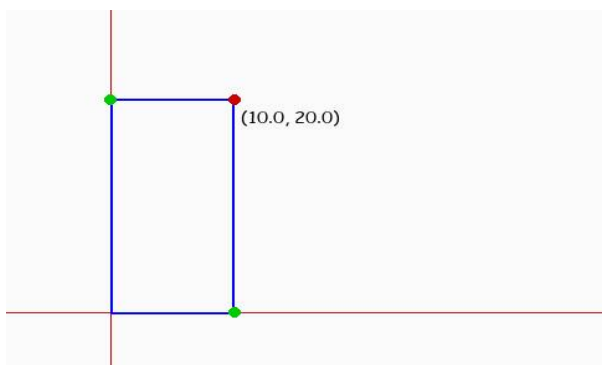


Image 4.1 : On crée un rectangle élastique posé représentant la fraction $1/2$ (ici convertie en $10/20$ pour plus de visibilité)

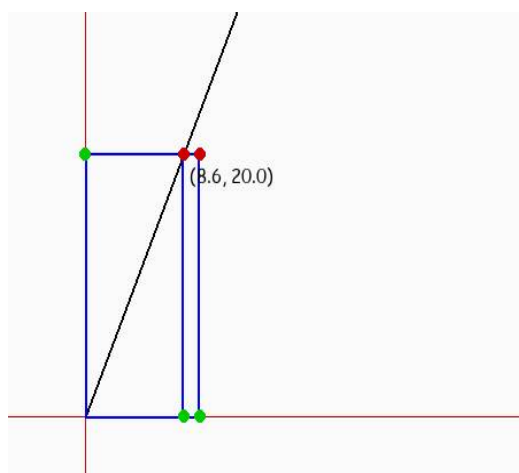


Image 4.3 : Pour chacun de ces deux rectangles choisir un

rectangle aux proportions similaires de telle façon que les deux rectangles obtenus aient la même hauteur (même dénominateur).

Pour trouver plus simplement un rectangle de la « famille » de $3/7$, on a pris l'intersection de sa diagonale principale avec le côté haut du rectangle représentant $10/20$ afin d'obtenir un rectangle de hauteur 20.

Sa base est d'environ 8,6.

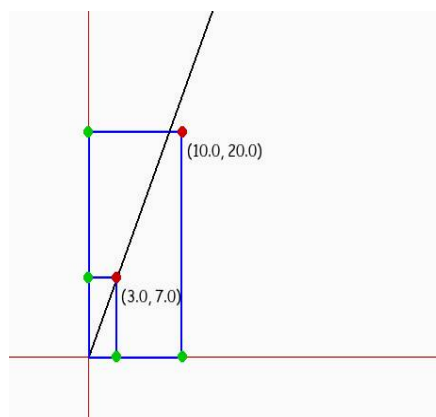


Image 4.2 : On crée un second rectangle élastique posé représentant la fraction $3/7$

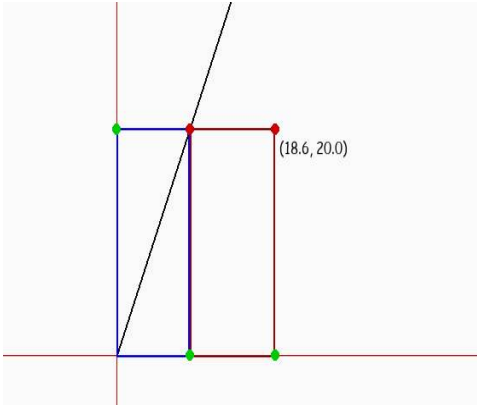


Image 4.4 : On déplace le second rectangle sur l'axe des abscisses de façon à ce que son côté gauche soit confondu au côté droit du premier rectangle

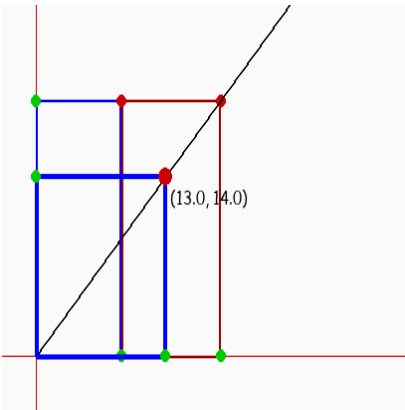
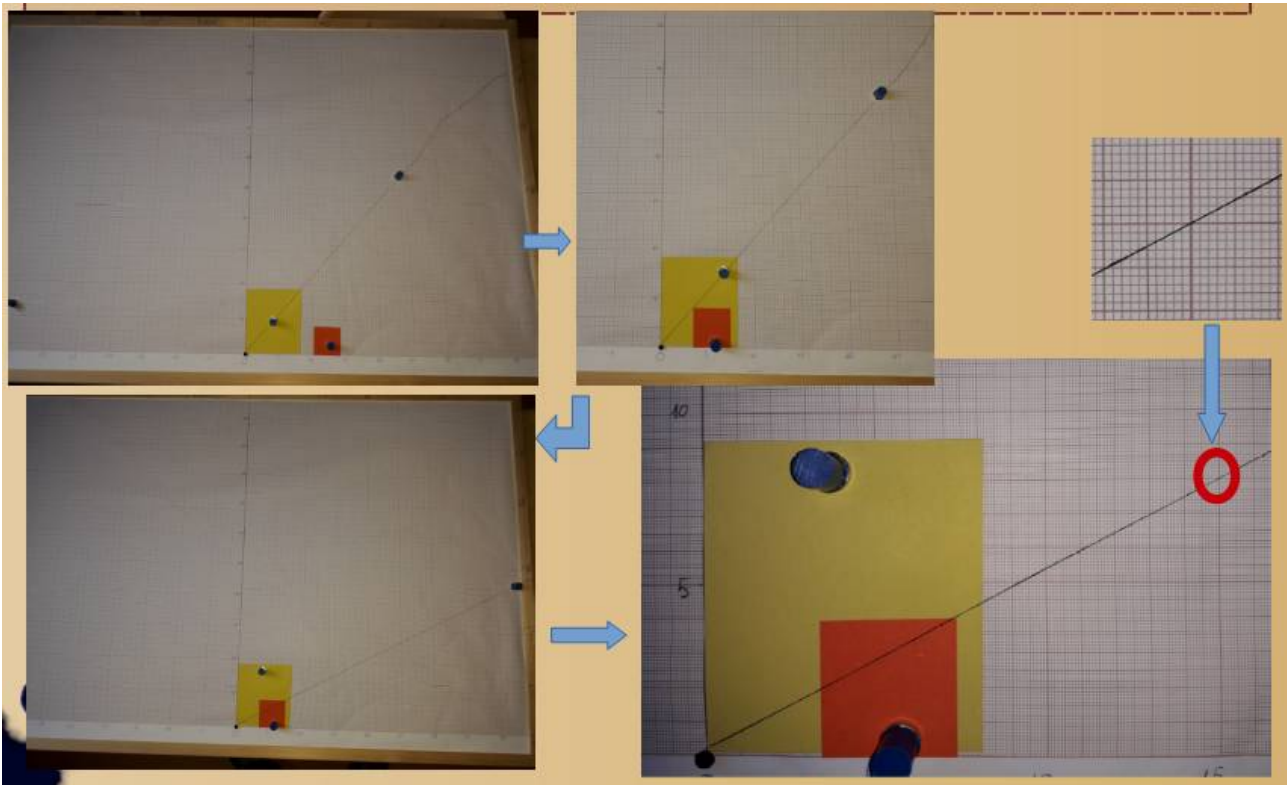


Image 4.5 : Le résultat de la somme correspond aux fractions représentées par les rectangles ayant leur diagonale principale passant par le

sommet principal du second rectangle. Le résultat est $\frac{13}{14}$.



Soustraction de fractions

Le calcul de la différence de deux fractions est très similaire à leur addition, à la seule différence que le rôle des points hauteur et sommets principaux sont inversés.

Voici donc les étapes de la soustraction de fractions :

1. Choisir un premier rectangle représentant la première fraction de la différence.
2. Choisir un deuxième rectangle représentant la seconde fraction.
3. Pour chacun de ces deux rectangles choisir un rectangle aux proportions similaires (homothétie) de telle façon que les deux rectangles obtenus aient la même hauteur.
4. Déplacer le rectangle correspondant à l'image du second rectangle de façon à ce que son côté droit soit confondu au côté droit de l'image du premier rectangle (par l'homothétie appliquée précédemment).
5. Le résultat est la fraction représentée par le rectangle **à l'origine** dont le sommet principal est **sur le** sommet supérieur gauche.

Exemple : $\frac{4}{6} - \frac{32}{6}$

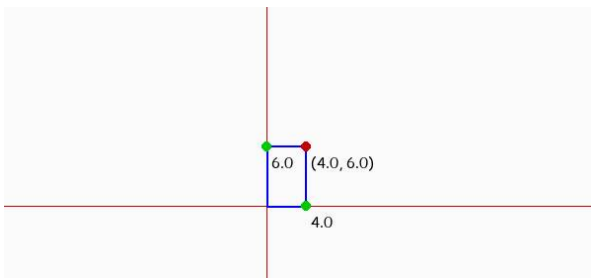


Image 5.1 : On crée un rectangle représentant la première fraction (4/6), ici convertie en 20/30 pour plus de visibilité

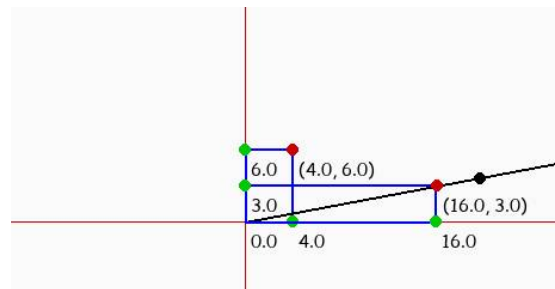


Image 5.2 : On crée un deuxième rectangle représentant la fraction 32/6 (16/3)

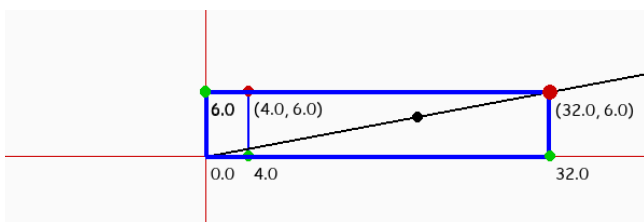


Image 5.3 : Pour chacun de ces deux rectangles choisir un rectangle aux proportions similaires de telle façon que les deux rectangles obtenus aient la même hauteur (même dénominateur).

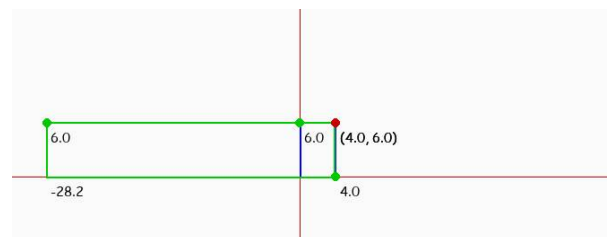


Image 5.4: On déplace le second rectangle le long de l'axe des abscisses de façon à ce que son côté droit soit confondu avec le côté droit du premier rectangle.

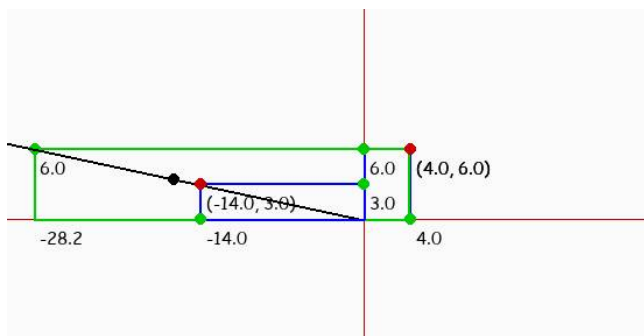


Image 5.5 : Le résultat de la somme correspond aux fractions représentées par les rectangles élastiques posés ayant leur diagonale principale passant par le sommet supérieur gauche du second rectangle.

Le résultat est $-\frac{14}{3}$

Le déplacement de rectangles élastiques posés sur l'axe des abscisses combiné à celui du sommet principal du rectangle sur sa diagonale principale trouve d'autres utilités, telles que la résolution d'équations du premier degré à une inconnue, et la représentation de fonctions affines. Pour plus de détails voir notre rapport détaillé : https://drive.google.com/file/d/1B3PH0HUYbh3riUDEEC_2GB7I3djzpOHR/view?usp=sharing

Estimations de racines carrées et de produits :

L'estimation du produit et du quotient de deux fractions nécessite en premier lieu de pouvoir multiplier ensemble deux nombres en écriture décimale, afin de pouvoir multiplier les numérateurs ensemble, puis les dénominateurs.

Le fractionmètre peut effectuer ces opérations (produit de deux nombres en écriture décimale). Il utilise pour cela un rectangle dont la base est égale à l'un des facteurs, et sa hauteur à l'autre facteur. La figure ci-dessous correspond à la configuration nécessaire pour calculer un produit (ici 3,5 par 7,8, car la hauteur du rectangle est égale à 3,5 et la longueur de sa base à 7,8).

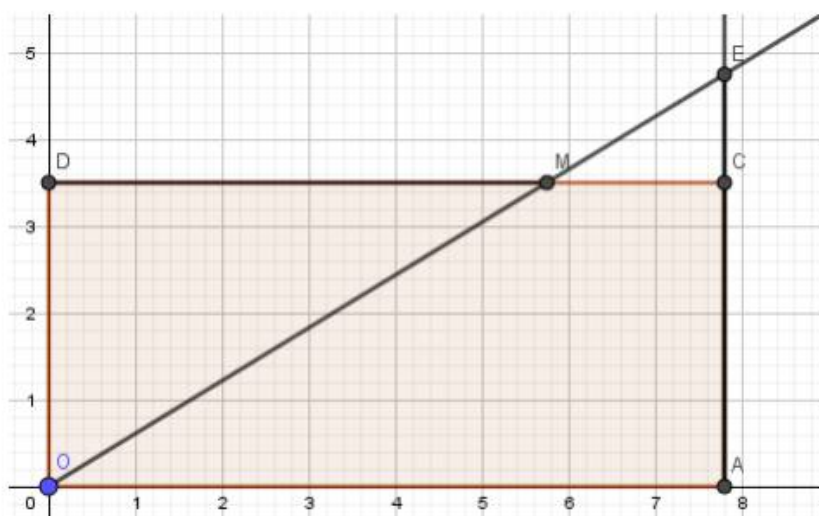


Image 6 : Configuration d'estimation d'un produit ou d'une racine carrée à l'aide du Fractionmètre

Sur cette figure, OACD est un rectangle de base 7,8 (que l'on notera ensuite B) et de hauteur 3,5 (noté ici H).

Le point M est sur la demi droite [DC) ; le point E est sur la demi droite [AC).

Les points O, M et E sont alignés.

Grâce au théorème de Thalès, il est possible de démontrer que quelle que soit la valeur de DM ou de AE, l'égalité

$$DM \times AE = B \times H \text{ est vérifiée.}$$

Cette égalité est très utile dans les cas suivants :

- Si $DM = 1$, alors la longueur de l'égalité devient $1 \times AE = B \times H$ donc $AE = B \times H$. La longueur de AE est donc égale au produit de la base du rectangle par sa hauteur lorsque $DM = 1$.
- Si $AE = 1$, alors la longueur de l'égalité devient $DM \times 1 = B \times H$ donc $DM = B \times H$. La longueur de DM est donc égale au produit de la base du rectangle par sa hauteur lorsque $AE = 1$.
- Enfin, si $AE = DM$ alors l'égalité devient $AE^2 = DM^2 = B \times H$. Les longueurs AE et DM sont alors égales à la racine carrée de $B \times H$. Si en plus $H = 1$, alors l'égalité devient $AE^2 = B$. Ainsi peut on estimer la valeur d'une racine carrée à l'aide du Fractiomètre.

Exemple pratique :

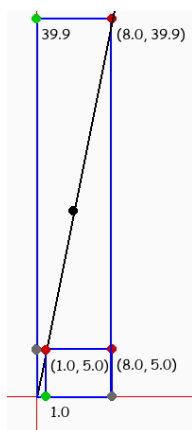


Image 7 : Estimation du produit de 8 par 5 à l'aide du Fractiomètre.

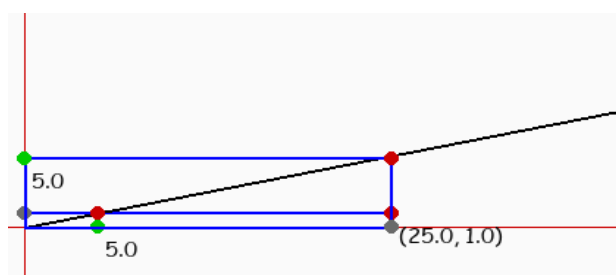


Image 8 : Estimation de la racine carrée de 25 à l'aide du Fractiomètre.

Cette configuration peut également être généralisée afin d'estimer des racines de polynômes du second degré. Voir notre rapport détaillé sur le lien donné plus haut.

Conclusion :

Le Fractiomètre est un nouvel instrument mathématique polyvalent faisant le lien entre la géométrie et l’algèbre. Il permet d’estimer le résultat de très nombreux calculs, dont certains restent à découvrir.

Nous sommes honorés de participer à l'invention et la fabrication de ce nouvel instrument qui pourra devenir essentiel dans l'apprentissage des mathématiques pour les collégiens. Certes il s'agit d'un instrument, il ne peut donc donner que des estimations plus ou moins précises mais il permet à l'élève de manipuler des objets représentant des fractions, raisonner, leur appliquer des transformations géométriques et comprendre ainsi comment la géométrie peut venir au secours de l'algèbre. Nous sommes également contents de vous présenter notre travail au concours Fabrique tes Maths.

Nos documents:

Notre rapport détaillé : https://drive.google.com/file/d/1B3PH0HUYbh3riUDeEC_2GB7I3djzpOHr/view?usp=sharing

Notre présentation du Fractiomètre

https://drive.google.com/file/d/1ZEwH54n_O3FfaPSWTACeXgmWUFsEdGx1/view?usp=sharing

Notre vidéo

<https://youtu.be/XjcGlllGY7Y>