CZ

chantiers de pédagogie mathématique

cahiers pour la formation permanente

Série 1. Initiation à la mathématique de base

1.1.

1.2.

1.3.

1.4.

décembre 1968

Régionale Parisienne

de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

chantiers de pédagogie mathématique

cahiers pour la formation permanente

édités par la Régionale Parisienne
de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

Bureau de la Régionale Parisienne de l'A.P.M.E.P.

Président : M. VILLIAUMEY, 1, avenue Molière, 77 - Montereau-Surville.

Secrétaire : M. HAMEAU, 38, avenue du Général-de-Gaulle, 94 - Vincennes (Tél. 808-43-79.)

Trésorier : M. BLANZIN, 150, avenue Félix-Faure, Paris-15e (Tél. 250-16-41)

Pour tous versements, utilisez le compte courant postal au nom de la « Régionale Parisienne de l'A.P.M.E.P. ». Cc Paris. 25 108 63.

Conditions de vente et d'expédition

Chaque fascicule des *Chantiers de Pédagogie Mathématique* est vendu séparément au prix de 2 F. Cependant, par la nature même de ces cahiers, la formule de l'abonnement aux *six numéros d'une série* est recommandée; prix de l'abonnement aux six fascicules (à paraître de décembre 1968 à avril 1969) : 10 F.

Des conditions spéciales avantageuses sont consenties aux abonnements et aux envois collectifs (recommandés pour les équipes de maîtres se groupant pour leur travail de formation permanente) :

— pour 10 exemplaires d'un même fascicule, 16 F;

— pour 10 abonnements groupés aux 6 fascicules, 80 F.

***

Pour recevoir rapidement les fascicules, veuillez opérer de la façon suivante :

1° Rédiger une formule de virement postal au compte de la Régionale Parisienne de l'A.P.M.E.P. du montant des fascicules commandés;

2° Bien préciser **au dos du virement,** le nombre d'exemplaires commandés ou d'abonnements souscrits;

3° Envoyer les trois volets du virement, sous enveloppe timbrée à 0,30 F au Secrétaire administratif de l'A.P.M.E.P., M. BLONDEL, 154, avenue Marcel-Cachin, 92 - Chatillon-sous-Bagneux.

Série 1

Initiation à la mathématique de base

Avant-propos

Les présents « cahiers », publiés sous forme de fascicules (six, de décembre à mai), *se proposent de constituer un instrument de travail de base pour les maîtres, les professeurs et les parents qui désirent acquérir une formation complémentaire dans le domaine mathématique en travaillant soit isolément, soit de préférence au sein de groupes encadrés ou non par des moniteurs.*

Ils se situent à un niveau élémentaire et ne nécessitent aucune connaissance préalable en matière mathématique. Par leur conception et leur présentation ils se proposent d'être accessibles à tout adulte prêt à fournir un effort soutenu à la cadence d'une séance de une heure et demie par semaine pendant six mois.

Chaque fascicule en effet contient quatre fiches de travail d'environ huit pages chacune correspondant au travail d'une séance. L'ensemble de la série comporte six fascicules mensuels, soit vingt-quatre fiches au total. Il aborde des domaines mathématiques variés tels que les ensembles, *les* relations, *les* nombres, *les* opérations, *les* algèbres du simplexe et de Boole, *la* logique, *les* groupes...

Derrière cette variété se cache une unité profonde. Il s'agit, sous différentes formes d'une partie de ce que l'on pourrait appeler la mathématique de base *parce qu'elle étudie des concepts fondamentaux et d'une grande généralité que l'on retrouve à l'œuvre aussi bien dans les activités de classification que dans le raisonnement logique, aussi bien dans l'informatique que dans l'organisation des circuits électriques, aussi bien dans la formation de l'intelligence chez l'enfant que dans l'utilisation de cette intelligence chez l'adulte. Fiches après fiches, cette unité devrait progressivement apparaître.*

La matière traitée ne se calque pas exactement sur les programmes de l'enseignement officiel du Primaire ou du Secondaire. Les auteurs ont estimé que si l'enseignement dans les classes a ses servitudes de découpage « en tranches » et de spécialisation, la formation complémentaire des adultes, au niveau de l'initiation, devait ignorer au maximum les frontières et savoir, de temps en temps, prendre le large.

C'est ainsi que les premiers cahiers, dans une perspective pédagogique, s'intéresseront tout particulièrement à la trilogie « classes, relations et nombres » car les études effectuées depuis plus de quinze ans par le professeur J. Piaget

et son équipe ont montré que ces notions participent parallèlement et indissolublement à la formation de l'intelligence chez l'enfant entre 4 et 12-13 ans.

A ce titre ces premiers cahiers sont susceptibles d'apporter un nouvel éclairage à l'enseignement de la mathématique dans le Primaire.

D'autre part la plupart des notions nouvelles qui doivent figurer dans les futurs programmes de 6e, 5e et 4e sont traitées, à un endroit ou à un autre, dans la présente série. Les maîtres et les professeurs qui devront enseigner ces programmes pourront donc y trouver des matériaux utiles à leur futur enseignement.

***

Ces fiches ont été conçues et rédigées par une petite équipe composée de quatre personnes de formation et d'expérience diverses :

Mlle J. BOLON, *professeur du Secondaire, attachée à la Télévision scolaire et à l'Institut Pédagogique National ;*

M. BLANZIN, *professeur de C.E.G. à Paris ;*

Mme SAUVY, *psycho-pédagogue, monitrice de mathématiques à l'Ecole Decroly de Saint-Mandé ;*

M. J. SAUVY, *ingénieur, diplômé d'Etudes Supérieures de Lettres, qui a impulsé et coordonné les travaux de l'équipe.*

Les fiches ont été expérimentées depuis octobre 1967, tant au « Chantier de Pédagogie Mathématique Balard », organisé sous l'égide de la Régionale de Paris de l'APMEP, qu'auprès de divers groupes d'adultes et de personnes isolées travaillant seules. Le texte en a été plusieurs fois remanié pour tenir compte de l'expérience acquise.

Deux principes ont guidé les rédacteurs dans leur travail.

En premier lieu ils ont cherché à faciliter au maximum la tâche du lecteur, sachant par expérience les difficultés que rencontrent les adultes quand ils décident de « retourner à l'école ». D'où une progression lente, le recours à des retours en arrière et à la multiplication des points de vue, la mise en œuvre aussi d'un matériel pédagogique approprié (boîtes de blocs à caractéristiques multiples, cartes perforées, etc.)

Parallèlement, ils ont cherché à faire participer activement les lecteurs au processus de mise en ordre de leurs connaissances et d'acquisition de connaissances nouvelles, considérant que, sans cette participation, rien de solide ne pouvait être bâti.

C'est pourquoi le cheminement suivi est un cheminement de découverte, avec des haltes nombreuses à l'occasion desquelles le lecteur est invité à s'interroger et à chercher lui-même sa voie. Non seulement des questions sont posées et des exercices à tout moment incorporés dans le texte, mais ils le sont sous une forme ouverte qui laisse le maximum de latitude au déploiement de l'imagination créatrice du participant.

Les Auteurs.

Sommaire du premier fascicule.

Ce premier *Cahier* est consacré à une prise de contact avec les *ensembles*. On aurait tout aussi bien pu partir des *relations*. En fait ensembles et relations forment un tout organiquement lié. Néanmoins les servitudes d'un exposé linéaire nous obligent à choisir un ordre de présentation plutôt qu'un autre : les ensembles nous ont paru constituer une bonne plateforme de lancement.

Bien que beaucoup de notions introduites dans le présent *Cahier* soient déjà familières au lecteur, nous lui conseillons vivement de « faire les fiches » avec soin, même quand elles paraissent élémentaires et surtout de ne pas négliger les manipulations et les exercices pratiques que nous proposons. Un peu de temps « perdu » au début signifie — l'expérience l'a montré — beaucoup de temps « gagné » par la suite.

1.1. Notions et terminologie de base concernant les ensembles.

1.2. Des sous-ensembles aux réunions de sous-ensembles.

1.3. Intersections de sous-ensembles.

1.4. Différences de deux ensembles. Différence symétrique. Lois de De Morgan.

fiche 1.1.

Notions et terminologie de base concernant les ensembles

§ 1. Exemples d'ensembles (*).

a) *Ensembles de pièces de monnaie.*

Étalez devant vous quelques pièces de monnaie de valeurs différentes; par exemple :

{trois pièces de 1 F, deux pièces de 0,50 F, trois pièces de 0,20 F}

Cette « collection » de pièces constitue *l'ensemble* avec lequel vous allez travailler et sur lequel vous allez raisonner (« *univers* » du discours).

Regroupez ces pièces suivant leur valeur, soit par la pensée, soit matériellement. Dans ce cas vous obtenez trois tas distincts.

Chaque regroupement — effectif ou seulement pensé — constitue un *sous-ensemble* de l'ensemble de référence (ou *référentiel)*.

Le classement que vous venez d'opérer a pris pour critère la *valeur* de la pièce. Vous auriez pu envisager un autre mode de regroupement (ou de classification). Vous auriez pu par exemple considérer toutes les pièces les plus grandes, d'une part, les autres d'autre part. Votre critère de sélection aurait alors été la *dimension.*

Question : Pouvez-vous envisager d'autres modes de classement?

Vous avez peut-être pensé à un mode de classement basé sur la *couleur* ou sur le *poids*. Ce sont en effet des caractéristiques (ou attributs) qui viennent naturellement à l'esprit. Mais peut-être avez-vous fait preuve de plus de fantaisie et avez-vous opéré un classement au hasard ou un classement croisé.

Dans tous les cas vous obtenez des sous-ensembles qui, du point de vue mathématique, sont tout à fait acceptables.

Prenez maintenant des cartons du type carte de visite et faites correspondre à chaque pièce une étiquette qui sera le document d'identité de ladite pièce, mention-

---

(*) Matériel utilisé : pièces de monnaie, cartons du type cartes de visite ou cartes perforées, jeu de 32 cartes, éventuellement « blocs logiques Hull-Dienes » ou tout autre matériel de conception voisine.

nant les caractéristiques (ou attributs) que vous avez retenus. Tel carton, par exemple, portera la mention :

0,50 F g (grand) j (jaune)

parce qu'il représente une pièce de 0,50 F grande et jaune.

Question : L'exemple ci-dessus est-il pertinent? Oui. Non (*).

Avec ce jeu de cartons vous pouvez procéder aux mêmes classements qu'avec l'ensemble de pièces, *à condition que vous ne considériez que les critères valeur, dimension, couleur*. Ce jeu de cartons est lui-même un ensemble qui constitue un nouveau référentiel.

b) *Ensemble de cartes à jouer.*

Extrayez d'un jeu de cartes les quatre as, les quatre rois et les quatre dames. Cette « collection » de cartes va constituer le nouvel ensemble de référence sur lequel vous allez opérer et raisonner. Considérez les cœurs (3 cartes). Ils constituent un sous-ensemble de votre référentiel. Considérez le roi de cœur et la dame de pique. Ces deux cartes constituent également un sous-ensemble. Chaque carte possède deux caractéristiques : la « figure » (as, roi, dame) et la « couleur » (pique, cœur, carreau, trèfle).

Exercice.

Formez, dans l'univers considéré, par la pensée ou matériellement, un sous-ensemble de votre choix. Décrivez, comme vous l'entendez, sa composition.

c) *Ensemble de nombres.*

Considérez les nombres de 1 à 10. Matérialisez-les par des cartons-étiquettes sur lesquels vous inscrivez le nombre représenté. Vous obtenez une « collection » de cartons qui constitue le nouveau référentiel sur lequel vous allez travailler.

Considérez par exemple les cartons matérialisant les nombres divisibles par 2. Ils constituent un sous-ensemble de l'ensemble de référence. Les cartons restants, correspondant aux nombres non divisibles par 2, constituent également un sous-ensemble de l'ensemble de référence.

Remarque. — Vous voyez d'après ce qui précède, que les sous-ensembles vont forcément par deux. Nous reviendrons là-dessus plus loin.

Cherchons comment nous pourrions aisément indiquer sur nos cartons qu'ils appartiennent ou non aux sous-ensembles considérés à l'instant.

L'idée vient par exemple de marquer les cartons correspondant aux nombres

---

(*) La réponse est *non* : il n'y a pas dans votre ensemble de référence de pièce présentant les trois attributs indiqués.

2, 4, 6, 8, 10 d'un point rouge ou d'une marque distinctive. Pour certaines manipulations, la marque la plus commode se révèle être une fente que l'on découpe à un endroit déterminé de la carte, par exemple au droit d'une perforation faite en haut et à droite du carton, comme l'indique la figure. Les cartons représentant les nombres non divisibles par 2, porteront la perforation mais pas la fente.

Les cartons portant une fente forment un sous-ensemble, les cartons n'en portant pas forment un autre sous-ensemble.

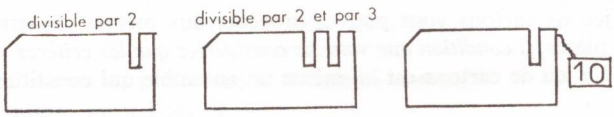

FIG. 1.

N.B. — Corrigez le dessin de la fiche 10 qui devrait comporter un trou à gauche de la fente : 10 non divisible par 3.

Nous pourrions également nous intéresser à la divisibilité par 3, en disposant cette fois nos trous et nos fentes à un emplacement légèrement décalé.

Avec ce système le nombre 10 serait décrit par la carte représentée sur la figure :

— divisible par 2 : *oui* donc *fente;*

— divisible par 3 : *non* donc *pas fente.*

Dans notre ensemble de cartons, nous aurons quatre dessins de cartes possibles. Précisez lesquels. Dessinez les cartes correspondantes.

Pourquoi ce procédé? Parce qu'il permet de sélectionner facilement toutes les cartes fendues en une certaine position, donc les éléments présentant la caractéristique choisie (être divisible par 3, p. ex.). Il suffit de placer les cartes les unes sur les autres bien entassées en paquet : toutes les perforations coïncident alors. Si vous placez une aiguille dans un des emplacements et si vous soulevez le tas en le maintenant sur la tranche, les cartes qui n'ont pas de fente à l'emplacement choisi restent prisonnières de l'aiguille; les autres tombent ; la sélection est faite. C'est le principe des cartes perforées.

Naturellement quand on raisonne sur un ensemble de nombres, on peut se passer d'étiquettes. Les nombres en tant que tels sont des entités bien identifiables, pourvues de caractéristiques propres. Ils appartiennent à un univers qui se prête au raisonnement, aux classements, de la même façon qu'un ensemble constitué d'éléments matériels.

d) *Autres exemples d'ensembles.*

Voici, en vrac, d'autres exemples d'ensembles :

— l'ensemble des départements français métropolitains;

— l'ensemble des chiffres arabes;

— l'ensemble des verbes inscrits sur la présente page;

— l'ensemble des prénoms figurant sur le calendrier;

— l'ensemble des élèves d'une classe;

— l'ensemble des communes de France au dernier recensement;

— l'ensemble des lettres de l'alphabet anglais;

— l'ensemble des touches d'un certain piano;

— l'ensemble des catégories socio-professionnelles du classement de l'I.N.S.E.E.;

— l'ensemble des mots commençant par Z inscrits sur le dictionnaire Larousse, édition 1968;

— l'ensemble des lettres figurant une fois au moins dans le mot « tomate »;

— l'ensemble des Français nés dans le 11e arrondissement de Paris le 29 février 1965;

— l'ensemble des constructeurs exposant au Salon d'automobiles de Paris d'octobre 1968, etc.

§ 2. Notion d'ensemble.

Arrivé à ce point nous pourrions être tentés de définir le mot « ensemble ». En fait ce serait, du point de vue mathématique, extrêmement délicat.

Nous nous contenterons donc de « cerner » la notion en cause, de façon à ce qu'elle nous devienne familière et que nous puissions *opérer* sur elle sans nous heurter à des contradictions.

D'après les exemples précédents, les ensembles se présentent comme des « collections » d'*éléments*, ce dernier terme désignant des unités identifiables sans ambiguïté (une touche de piano, un mot commençant par la lettre A, un département français, etc.).

Entre les éléments d'une même collection existe un certain lien.

Ce lien peut être bien apparent, comme c'était le cas dans la plupart des exemples donnés à l'instant.

Dans d'autres cas, ce lien est arbitraire.

Il est en tout cas essentiel qu'il n'y ait pas d'ambiguïté. Il faut, pour qu'un ensemble soit défini, qu'on puisse décider si tel ou tel élément appartient ou n'appartient pas à l'ensemble, si tel « objet » ou tel « être » est élément de l'ensemble ou n'en est pas élément.

Ainsi les « villes » de France ne constituent pas un ensemble au sens mathématique du terme parce qu'on ne peut décider sans contestation que telle grosse bourgade est ou n'est pas une ville.

Exercices.

1° Citer deux ou trois exemples d'ensembles de votre choix autres que ceux dont il vient d'être question.

2° Citer un ou deux exemples de collections qui ne sauraient être considérées comme des ensembles au sens mathématique (contre-exemples).

§ 3. Comment désigner un ensemble.

Un premier procédé consiste à énumérer ou à faire l'inventaire des éléments appartenant à l'ensemble.

Par exemple pour désigner l'ensemble des voyelles on énumère ces dernières

$$a,\ e,\ i,\ o,\ u,\ y$$

et l'on place le tout entre deux *accolades :*

$$\{a,\ e,\ i,\ o,\ u,\ y\}.$$

Pour désigner l'ensemble des objets figurant sur ma table j'énumère ces objets, par exemple :

{ma pipe, mon bloc-note, mon cendrier ...}.

Cette façon de faire constitue ce que l'on appelle la *définition en extension* d'un ensemble donné.

Un second procédé consiste à donner une « explication » qui permet de déterminer exactement les éléments devant figurer dans l'ensemble envisagé.

Par exemple on dira « l'ensemble des jours de la semaine » et l'on saura qu'il s'agit de « lundi », « mardi », etc. Pour marquer que l'on considère les éléments en question (lundi, mardi) en tant qu'éléments d'un ensemble on fera ici encore appel aux accolades et on écrira :

{les jours de la semaine},

que l'on lira « ensemble constitué par tous les jours de la semaine ».

Cette manière de définir un certain ensemble porte le nom de *« définition en compréhension »*.

Exercices.

1° Désignez, en extension, un ensemble de votre choix.

2° Désignez, en compréhension, un ensemble de votre choix.

Remarque 1. — On peut étendre, la notion d'ensemble à des collections comportant *un nombre infini d'éléments* à condition que l'on puisse décider sans ambiguïté si tel ou tel élément appartient ou non à l'ensemble. On parlera par exemple d'« ensemble des nombres naturels », désignant par là la suite infinie des nombres entiers naturels, les « naturels », 0, 1, 2, 3, 4, etc.

De même on parlera de l'ensemble des points d'un segment de droite donné, des points d'un plan donné, des droites qui passent par un point donné, etc.

Remarque 2. — A partir du moment où l'on a défini un ensemble, on peut lui attribuer un nom.

On utilise fréquemment pour cela des lettres majuscules.

On appellera par exemple A l'ensemble des lettres de l'alphabet, et on écrira

$$A = \{\text{lettres de l'alphabet}\} \quad \text{(compréhension)}$$

$$A = \{a, b, c, d, \ldots, z\} \quad \text{(extension)}$$

L'ensemble des naturels $\{0, 1, 2, \ldots\}$ est en général noté $\mathbb{N}$. On écrit :

$$\mathbb{N} = \{\text{nombres entiers naturels}$$

Remarque. — Vous venez d'utiliser le signe =, qui se lit « est égal à », pour exprimer l'identité entre l'ensemble désigné par $\mathbb{N}$ et l'ensemble désigné par l'expression « les naturels ». Nous reviendrons dans la fiche 2 sur l'importance du signe =.

Cas particuliers :

— Un ensemble constitué par deux éléments porte le nom de *paire*. Exemple : paire d'as d'un jeu de cartes.

— Dans certains cas on est conduit à considérer des ensembles ne comportant qu'un seul élément. Un tel ensemble porte le nom de *singleton*. Trouvez des exemples.

— Nous avons insidieusement glissé dans nos exemples de tout à l'heure un ensemble qui ne comporte aucun élément. Cherchez lequel.

Un tel ensemble porte le nom d'*ensemble vide*. Nous verrons son utilité par la suite.

fiche 1.2.

Des sous-ensembles aux réunions de sous-ensembles

La *fiche 1* a présenté plusieurs exemples d'ensembles et montré comment, par le jeu des activités de classement, on était conduit à mettre en évidence, au sein d'un ensemble de référence, tel ou tel *sous-ensemble* constitué par des éléments dudit ensemble de référence. Au lieu de « sous-ensemble », on dira aussi une *partie* de l'ensemble.

Nous avons appris à définir ces sous-ensembles (en *extension* ou en *compréhension)* et nous pouvons désormais les considérer comme des entités que nous pourrons manipuler et sur lesquelles nous pourrons raisonner.

A ce propos beaucoup de questions viennent à l'esprit. Est-il possible de passer de tel sous-ensemble d'un référentiel à tel autre sous-ensemble du même référentiel? Si oui, comment *opérer?* Peut-on envisager des sortes « d'associations » entre ensembles?

C'est ce nouveau domaine que nous allons commencer à explorer dans la présente fiche.

§ 1. Appartenance, non appartenance.

Revenons tout d'abord à la question fondamentale de la constitution d'un ensemble.

L'ensemble de référence étant choisi, les éléments sur lesquels on raisonne se trouvent définis sans ambiguïté. Chacun de ces éléments entretient avec l'ensemble de référence un certain lien, nommé lien d'*appartenance*.

Si je désigne par E l'ensemble de référence et par a tel élément de l'ensemble E je note l'appartenance comme suit :

$$a \in E$$

utilisant le signe $\in$ qui n'est autre que l'initiale du verbe être en grec. Cette écriture se lit :

« a est élément de l'ensemble E »

Soit maintenant un ensemble A sous-ensemble de E. Cela signifie qu'il est constitué à partir d'éléments puisés dans le référentiel E. Il se peut que a soit élément de A. Dans ce cas j'écris :

$$a \in A$$

Il se peut que *a ne soit pas* élément de A. Dans ce cas j'écris

$$a \notin A$$

ce qui se lit : « *a* n'est pas élément de A ».

Considérons maintenant parmi les éléments x d'un ensemble de référence E, les éléments qui présentent la caractéristique p (ou l'attribut p). Ces éléments constituent un sous-ensemble de E. Je le nomme P et j'écris

$$P = \{x \mid x \in E \text{ et } p\}$$

ce qui se lit : « P est l'ensemble des éléments x tels que x élément de E et x présente la propriété p », ou, plus simplement : « P est le sous-ensemble de E dont les éléments présentent la propriété p », ou encore « P est le sous-ensemble des éléments de E tels que p ».

§ 2. Égalité de deux ensembles.

Prenez les douze cartes du jeu de cartes de la *fiche 1* (les as, les rois et les dames). Ces douze éléments forment votre référentiel E. Constituez, matériellement ou par la pensée, le sous-ensemble des « cœurs ». Au sein de ce sous-ensemble ne conservez que le roi et la dame. Vous êtes en présence d'un sous-ensemble de E. Appelez-le A. Notez ses éléments.

En partant toujours de l'ensemble E, formez maintenant le sous-ensemble constitué par les rois et les dames. Au sein de ce sous-ensemble ne conservez que les « cœurs ». Vous êtes en présence d'un sous-ensemble de E. Appelez-le provisoirement B. Notez ses éléments. Vous constatez que ce sont exactement les mêmes éléments que pour A. Le sous-ensemble B n'est donc pas différent de A. Il se trouve que leurs noms diffèrent, mais ces noms désignent le même ensemble. Je traduis cette constatation par l'écriture

$$A = B$$

qui se lit « A et B sont le même ensemble » ou encore « l'ensemble A est égal à l'ensemble B ».

Définition. — *Deux ensembles sont dits égaux si et seulement si ils sont constitués par les mêmes éléments,*

Tout élément de l'un est élément de l'autre.

Il découle de ce qui précède que deux ensembles qui ne sont pas constitués par les mêmes éléments sont inégaux. Trouvez des exemples.

Exercices.

1° L'ensemble A formé par les voyelles qu'on rencontre dans le mot « pipe » est-il égal à l'ensemble B formé par les voyelles qu'on rencontre dans le mot « pipelet »?

2° Soit a, b, c, trois cartes de notre jeu de tout à l'heure. Peut-on écrire :

$$\{a, b, c\} = \{c, b, a\}$$

3° Remplacez les points par le nombre qui convient dans l'égalité ci-dessous :

$$\{2, 5, 8, 9\} = \{9, 5, 2, \ldots\}$$

Remarque. — Dans l'écriture ci-dessus, les virgules sont utilisées comme signe de séparation et non comme marque de nombres décimaux.

§ 3. Complémentaire d'un sous-ensemble.

Prenez les étiquettes représentatives des nombres de 1 à 10 utilisées dans la *fiche 1*. J'appelle E l'ensemble de référence qu'elles constituent. Pour simplifier je désigne ces étiquettes par le nombre inscrit sur elles.

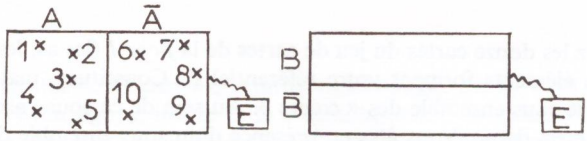

FIG. 2.

Formez le sous-ensemble A des nombres de 1 à 5 :

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

en plaçant les étiquettes correspondantes sur le côté gauche de la table par exemple. Le reste des étiquettes se trouve dans la partie droite. Elles constituent un sous-ensemble de E qui reçoit le nom d'*ensemble complémentaire de A dans E*. On le désigne souvent, et nous adopterons cette notation en raison de sa simplicité, par la même lettre que l'ensemble considéré mais *surlignée*. Ici on écrira $\bar{A}$ qui se lit : « A barre ».

$$\bar{A} = \{6, 7, 8, 9, 10\}$$

Vous rencontrerez également la notation $\complement_E A$ qui rappelle dans quel ensemble E est pris le complémentaire du sous-ensemble A.

Exercices.

1° Soit dans E le *sous-ensemble B des nombres divisibles par 3*. Complétez l'écriture :

$$B = \{\qquad\qquad\qquad\qquad\}; \qquad \bar{B} = \{\qquad\qquad\qquad\qquad\}$$

Complétez le diagramme ci-dessus en plaçant les nombres dans les parties du diagramme qui conviennent.

2° On désigne en général par un signe spécial (une lettre de l'alphabet scandinave en l'occurrence) l'*ensemble vide*, c'est-à-dire l'*ensemble où ne figure aucun élément*,

$$\varnothing = \{\quad\}$$

quel est dans E le sous-ensemble complémentaire de $\varnothing$?

$$\overline{\varnothing} =$$

3° Quel est dans E le complémentaire de E ?

$$\overline{E} =$$

Diagrammes.

Nous avons vu ci-dessus une manière de représenter sur un diagramme un sous-ensemble et son complémentaire. On aurait pu également placer les éléments constituant A à l'*intérieur* d'un cordon ou d'un trait de craie, les éléments restants (éléments du complémentaire $\overline{A}$) se trouvant à l'*extérieur*.

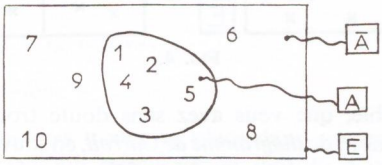

FIG. 3.

Exercices.

1° Dans l'ensemble E des nombres de 1 à 10, considérez le sous-ensemble C des nombres divisibles par 5. Écrivez en extension C et $\overline{C}$. Faites un diagramme suivant la méthode de représentation de votre choix.

2° Avec ces hypothèses peut-on écrire :

$$10 \in C \ ?$$

§ 3. Réunion de deux sous-ensembles.

Dans l'ensemble des 12 cartes à jouer précédemment défini, je considère le sous-ensemble des *figures noires*. J'appelle N ce sous-ensemble.

N = {as pique, as trèfle, roi pique, roi trèfle, dame pique, dame trèfle}.

Je considère d'autre part le sous-ensemble D des dames :

D = {dame de pique, dame de trèfle, dame de cœur, dame de carreau}.

Je considère enfin un troisième ensemble que j'appelle R en prenant les figures noires ou les dames.

Écrivez *en extension* cet ensemble.

Par définition ses éléments sont des éléments de N ou des éléments de D. Si j'ai formé sur ma table les deux sous-ensembles en question, il me suffit pour obtenir R de *réunir* les éléments présents dans les deux sous-ensembles.

Aussi appelle-t-on *réunion* le sous-ensemble obtenu.

Exercice

Essayez de représenter sur un même diagramme les sous-ensembles N et D.

Si vous rencontrez des difficultés, les schémas ci-dessous vous mettront sur la voie de la solution.

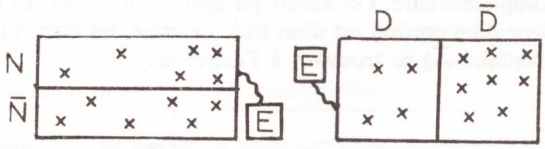

FIG. 4.

Une solution possible, que vous avez sans doute trouvée, est représentée ci-dessous. On lui donne le nom de *diagramme de Carroll*, en souvenir de l'auteur d' « Alice au pays des merveilles » qui était mathématicien de profession et logicien de tempérament.

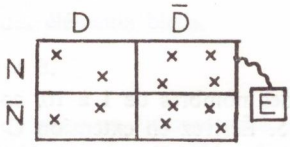

FIG. 5.

Une autre représentation est également très courante. Elle utilise la méthode du cordon à laquelle nous avons fait une allusion plus haut. Dans le cas qui nous occupe, puisque nous avons deux sous-ensembles, il nous faut deux cordons. Ils divisent la surface du diagramme en quatre secteurs, comme le fait par une autre méthode le diagramme de Carroll.

Voici le diagramme en question :

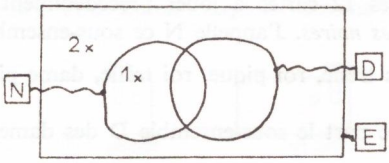

FIG. 6.

Situez chaque carte à l'emplacement qui convient en donnant à chacune d'elles, pour plus de simplicité, un numéro matricule; par exemple : 1 as de pique, 2 as de cœur, etc.

Des diagrammes de ce type ont été utilisés à plusieurs reprises par les mathématiciens et les logiciens, notamment par Euler, mathématicien suisse, au XVIIIe siècle, puis, plus tard par le logicien anglais Venn, dans le but de mettre visuellement en évidence certains syllogismes. Euler se servait de trois cercles, Venn également, mais de façon un peu différente. De nos jours on se sert de deux ou trois cordons suivant les cas et on leur donne volontiers un contour quelconque, d'où le nom de « patates » souvent employé. En général, dans les présentes fiches nous désignerons les diagrammes de ce type : *diagrammes d'Euler-Venn.*

L'ensemble réunion que nous venons de constituer peut être également représenté sur le diagramme d'Euler-Venn ci-dessus par un cordon délimitant l'espace où sont situés les éléments de R et eux seuls. Tracez-le sur le diagramme à l'aide d'un crayon de couleur.

Vous devez voir maintenant clairement que quand on réunit les éléments de N, c'est-à-dire les figures noires, aux éléments de D, c'est-à-dire les dames, sont éléments du nouvel ensemble :

— les dames noires,

— les figures noires « non-dames »,

— les dames « non-noires ».

Chacune de ces catégories trouve sa place dans une case et une seule du diagramme de Carroll ou dans un secteur et un seul du diagramme d'Euler-Venn à deux cordons.

Question. — Désignez les cartes éléments de l'ensemble $\overline{R}$ complémentaire de l'ensemble R.

Vous noterez que les éléments de ce nouvel ensemble sont situés dans la 4e case du diagramme de Carroll.

Notation. — On note l'opération de réunion par un symbole spécifique en forme de U arrondi ($\cup$).

L'écriture :

$$N \cup D = R$$

se lit : « N union D est égal à R ».

Le sous-ensemble réunion peut être utilisé dans une écriture où figurent d'autres sous-ensembles sans qu'on lui donne un nom particulier. Il faudra dans ce cas mettre l'écriture ci-dessus entre parenthèses $(N \cup D)$.

Le complémentaire de $N \cup D$ se notera $\overline{N \cup D}$.

Question. — Peut-on écrire :

$$\overline{N \cup D} = \overline{N} \cup \overline{D}?$$

Vérifiez que *non*, en utilisant les cartes et les diagrammes.

Exercices.

1° Soit dans E un sous-ensemble P et son complémentaire $\overline{P}$, à quoi est égal :

$$P \cup \overline{P}$$

$$P \cup P$$

$$P \cup \varnothing$$

$$P \cup E$$

2° Le résultat d'une réunion change-t-il si, au lieu de réunir le sous-ensemble A au sous-ensemble B, on réunit le sous-ensemble B au sous-ensemble A?

La réponse est *non:* le résultat ne change pas. On peut écrire indifféremment :

$$A \cup B \text{ ou } B \cup A$$

on a l'égalité :

$$A \cup B = B \cup A$$

on dit que l'*opération de réunion est commutative.*

3° Considérez un ensemble de cartons présentant des contours variés et de couleurs différentes (bleu, rouge, jaune), parmi lesquels se trouvent un certain nombre de carrés.

Figurez sur un diagramme de Carroll :

- le sous-ensemble C des éléments carrés,
- le sous-ensemble B des éléments bleus,
- le sous-ensemble $C \cup B$.

Comment pouvez-vous qualifier un élément quelconque de l'ensemble réunion en utilisant les seuls qualificatifs « carré » et « bleu »?

La réponse est : « un élément quelconque de $C \cup B$ est une élément « carré ou bleu ».

Cartes perforées.

Reprenez les exercices portant sur les cartes à jouer en substituant aux dites cartes des cartes perforées représentatives; les deux « attributs » retenus pour figurer sur les cartes perforées étant : couleur des figures (noire ou non-noire) et type de figure (dame ou non-dame). Vous aurez les quatre dessins de carte ci-dessous :

FIG. 7. FIG. 7 *bis.*

Vous noterez que les diverses cartes se trouvant dans la même case du diagramme de Carroll présentent le même dessin. On peut donc désigner chaque case par le dessin qui lui revient, ou mieux encore par la représentation simplifiée indiquée ci-dessous.

	D	$\bar{D}$
N	1 1 noire dame	1 0 noire non-dame
$\bar{N}$	0 1 non-noire dame	0 0 non-noire non-dame

FIG. 8.

Recommandation. — Divers symboles ont été introduits dans la présente fiche. Il vous est vivement recommandé de les noter sur un memento que vous conserverez à portée de la main.

fiche 1.3.

Intersections de sous-ensembles

Nous avons vu dans la précédente fiche comment on pouvait réunir deux sous-ensembles pour en former un troisième appelé *réunion* des deux sous-ensembles considérés.

Nous avons constaté, en cours de route, que certains sous-ensembles « se recoupaient », c'est-à-dire qu'on trouvait dans l'un des éléments de l'autre.

Exemples.

1° Dans l'ensemble de 12 cartes que nous avons étudié, quand nous considérons le sous-ensemble N des figures noires et le sous-ensemble D des dames, nous constatons que certains des éléments de N et de D figurent aussi bien dans N que dans D. C'est le cas des « dames noires » parce qu'elles sont « dames » et parce qu'elles sont « noires ».

Sur le diagramme de Carroll ces éléments sont tous groupés dans une case. Laquelle?

Sur le diagramme d'Euler-Venn ils sont groupés dans un secteur. Lequel?

2° Considérez dans le référentiel E des naturels 1, 2, ... 10 les sous-ensembles A et B.

$$A = \{2, 4, 6, 8, 10\} \text{ nombres pairs,}$$

$$B = \{3, 6, 9\} \text{ nombres divisibles par 3.}$$

Représentez A et B sur un diagramme de Carroll et sur un diagramme d'Euler-Venn.

Vous constatez qu'un élément de E est aussi bien élément de A qu'élément de B.

Il s'agit du nombre 6 qui présente la caractéristique d'être pair et d'être divisible par 3.

Entourez d'un trait de couleur la partie du diagramme, de Carroll ou d'Euler-Venn, où se trouve cet élément commun.

Définition et notation. — *Étant donné deux (ou plusieurs) sous-ensembles leurs éléments communs constituent un sous-ensemble appelé intersection de ces sous-ensembles.*

Ce terme se comprend aisément quand on examine les positions respectives des sous-ensembles sur les diagrammes précédents.

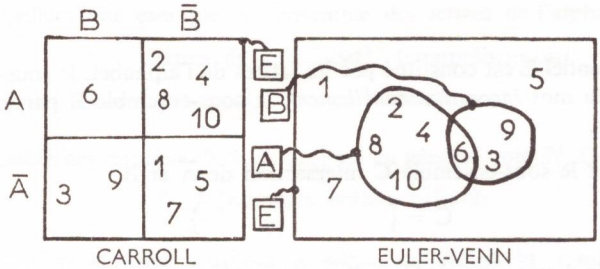

FIG. 9.

Considérer l'intersection de deux ou plusieurs sous-ensembles d'un même référentiel c'est s'intéresser aux *éléments communs* à ces sous-ensembles qui forment un nouveau sous-ensemble appelé *intersection,*

On introduit un signe approprié pour noter l'opération correspondante, un signe en forme d'arceau ($\cap$).

On note :

$$C = A \cap B$$

écriture qui se lit

« l'ensemble C est égal à l'ensemble A inter B ».

Dans le dernier exemple ci-dessus, on écrira en *extension:*

$$\{2, 4, 6, 8, 10\} \cap \{3, 6, 9\} = \{6\}$$

En *compréhension*, on écrira :

$$C = \{x \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$$

cette écriture se lit :

« C ensemble des éléments x tels que chacun d'eux est élément de A et est élément de B ».

Cartes perforées.

Dans un but de consolidation des notions précédentes, opérons avec les cartes perforées représentatives des cartes à jouer. Le dessin des cartes communes au sous-ensemble N (figures noires) et au sous-ensemble D (dames) est rappelé ci-dessous.

Pour extraire par une seule manipulation toutes les cartes éléments de

$$N \cap D$$

il nous suffit de disposer de deux aiguilles que nous introduisons dans chacune des « enfilades de trous » du paquet de cartes. Le paquet étant mis de champ seules les cartes présentant les deux fentes tombent, les autres restent emprisonnées parce qu'elles ont un ou deux trous sans fente.

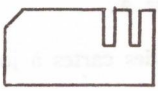

FIG. 10.

Exercices.

1° Le référentiel E est constitué par les lettres de l'alphabet, le sous-ensemble A par les lettres du mot *inconstitutionnellement*, le sous-ensemble B par les lettres du mot *anagramme*.

a) Désignez le sous-ensemble C intersection de $\overline{A}$ et B.

$$C = \{ \qquad \}$$

b) Tracez le diagramme de Carroll correspondant.

2° Le référentiel E est maintenant constitué par les nombres de 1 à 10, on considère le sous-ensemble A des nombres divisibles par 2 et le sous-ensemble B des nombres divisibles par 3.

a) Pensez-vous que le résultat change si au lieu d'intersecter A par B, on intersecte B par A?

(Pour trouver la réponse aidez-vous des cartes perforées en faisant successivement la manipulation correspondant à $A \cap B$ et à $B \cap A$. De même avec les diagrammes).

b) La réponse est négative et on peut écrire :

$$A \cap B = B \cap A$$

c) Savez-vous comment on appelle cette propriété? Associativité, commutativité?

Barrer la réponse fausse.

d) Quel sous-ensemble obtient-on quand on intersecte le sous-ensemble A par son complémentaire $\overline{A}$?

$$A \cap \overline{A} =$$

e) Quel sous-ensemble obtient-on quand on intersecte A par l'ensemble vide?

$$A \cap \varnothing =$$

f) Quel sous-ensemble obtient-on quand on intersecte A par l'ensemble univers E?

$$A \cap E =$$

3° On considère toujours dans le même univers, outre le sous-ensemble A des nombres divisibles par 2, le sous-ensemble F des nombres divisibles par 4.

$$F = \{4, 8\}$$

Représentez les ensembles A et F sur un diagramme d'Euler-Venn.

On dit que F *est inclus dans* A.

4° On considère l'ensemble des cartes à jouer.

a) Considérez le sous-ensemble R des rois et le sous-ensemble A des as.

b) Dessinez le diagramme d'Euler-Venn correspondant.

c) Que peut-on dire de l'intersection?

$$A \cap R = ?$$

d) La réponse à *c)* est « l'intersection est vide » : aucun élément ne peut en effet être roi *et* as.

(On dit que les ensembles R et A sont disjoints. Les deux propriétés qui caractérisent leurs éléments s'excluent mutuellement.)

5° *a)* Donnez dans l'univers de votre choix un exemple de sous-ensembles C et D tel que C soit *inclus* dans D.

b) Donnez un exemple de sous-ensembles F et G *disjoints*. (Précisez l'univers.)

6° Résoudre à l'aide de diagramme(s) de votre choix le petit problème suivant :

Un directeur d'école qui dresse un emploi du temps cherche à « caser » la leçon de gymnastique de Sixième, étant donné qu'il doit tenir compte des contraintes suivantes :

a) éviter les lendemains de jour de congé;

b) le maître est disponible les mardi, mercredi, vendredi et samedi;

c) la salle de gymnastique est déjà occupée les lundi, mercredi et vendredi.

7° On donne le dessin ci-joint. Imaginez une situation familière qui puisse être représentée par ce diagramme.

(Envisagez p. ex. comme éléments *a*, ... *g* les automobiles se trouvant dans un certain garage.)

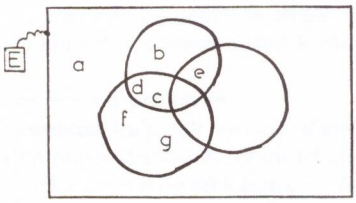

FIG. 11.

b) Essayez de représenter cette situation sur le diagramme ci-dessous inspiré du diagramme de Carroll.

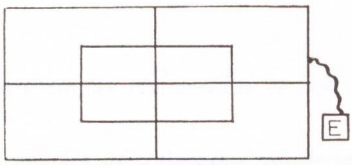

FIG. 12.

8° (*) Représenter sur un diagramme d'Euler-Venn l'ensemble E des Français vivants, le sous-ensemble D des Français députés, le sous-ensemble M des Français ministres.

a) Sous la IVe République (quand les ministres étaient obligatoirement choisis parmi les députés).

b) Sous la Ve République (les ministres ne peuvent être en même temps députés).

(*) Exemple proposé par Rosensthiel et Mothes dans « Mathématiques de l'action » p. 38-39.

fiche 1.4.

Différences de deux ensembles
Différence symétrique
Lois de De Morgan

Nous avons exploré dans les précédentes fiches quelques-unes des manières de classer les éléments d'un ensemble de référence en fonction d'une ou de deux de leurs caractéristiques.

Nous n'avons pas pour autant épuisé le sujet et nous allons ajourd'hui continuer notre exploration en nous intéressant pour commencer aux éléments d'un ensemble qui possèdent telle caractéristique mais qui ne possèdent pas telle autre.

§ 1. Différences de deux ensembles.

Exemples.

1° Considérons l'ensemble E de nos 12 cartes à jouer, les « figures noires » qui constituent le sous-ensemble N et les « dames » qui constituent le sous-ensemble D.

Je me propose de m'intéresser aux *dames qui ne sont pas noires*. Les éléments « dames non-noires » ont la caractéristique d'être « dame » *et* la caractéristique d'être « non-noires ». Ils sont donc éléments de l'intersection du sous-ensemble D (dames) et du sous-ensemble $\overline{N}$ (non-noires). Tous les éléments du sous-ensemble intersection sont des dames non-noires.

Faites le diagramme de Carroll correspondant. Dans quelle (s) case(s) trouve-t-on les éléments « dames non-noires »?

2° Considérons l'ensemble E des naturels de 1 à 10, les nombres pairs qui constituent le sous-ensemble A et les nombres divisibles par 3 qui constituent le sous-ensemble B.

Je me propose de m'intéresser aux *nombres pairs non divisibles par 3*. Ils constituent un sous-ensemble C.

Indiquez en *extension* le « contenu » de cet ensemble C. Faites-le diagramme d'Euler-Venn. Dans quel secteur du diagramme trouve-t-on les éléments « nombres pairs *et* non divisibles par 3 »?

Définition. Notation :

On appelle l'ensemble obtenu par le procédé ci-dessus : *ensemble différence* du premier et du deuxième ensemble. Cette appellation se comprend aisément : pour obtenir l'ensemble différence de deux sous-ensembles on retire du premier les éléments qui figurent dans le second.

L'ensemble différence des ensembles A et B d'un référentiel E se note :

$$A - B \quad \text{ou} \quad A \setminus B$$

Nous utiliserons de préférence la deuxième notation.
Par définition, on a l'égalité :

$$A \setminus B = A \cap \overline{B}$$

Cartes perforées.

Le dessin de la carte perforée d'un élément de l'ensemble :

$$A \setminus B$$

comporte une fente à la position *a* (caractéristique *a* propre aux éléments de A) et *pas de fente* à la position *b* (caractéristique *b* propre aux éléments B).

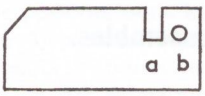

FIG. 13.

Questions.

1° Considérez l'ensemble E des 12 cartes à jouer et ses sous-ensembles N et D. Peut-on écrire :

$$N \setminus D = D \setminus N?$$

Faites les manipulations correspondantes avec les cartes perforées; comparez les résultats.

2° Considérez deux sous-ensembles *disjoints* A et B dans un référentiel que vous préciserez et dites à quoi sont égales :

$$A \setminus B$$

$$B \setminus A$$

3° Imaginez des exemples familiers où il soit intéressant de considérer les ensembles différences (ex. : dans une classe, les élèves garçons qui ne portent pas de lunettes).

§ 2. Différence symétrique.

Quand nous avons introduit la *réunion* nous avions recherché les éléments ayant une première caractéristique *ou* une seconde caractéristique; par exemple, dans le référentiel des cartes, les « dames » *ou* les « figures noires »; dans le référentiel de nombres de 1 à 10, les nombres pairs *ou* les nombres divisibles par 3.

Quand nous envisageons ce type de classement, nous n'excluons pas les éléments qui possèdent les deux caractéristiques : nous n'excluons pas les « dames noires »; nous n'excluons pas le nombre 6 qui est pair et divisible par 3.

Autrement dit nous avons donné au mot « ou » son sens *inclusif*. Exemple : on peut se rendre à l'étranger avec une carte d'identité *ou* avec un passeport.

On peut chercher ce qui se passe quand on donne à « ou » le sens *exclusif* que l'on rencontre dans une phrase du genre : « je reste chez moi ou je vais au cinéma » et qui est indiqué en français par les mots « *soit... soit...* ».

Considérons l'ensemble des cartes à jouer, je décide de m'intéresser aux figures noires ou aux dames mais en excluant les éléments présentant les deux caractéristiques, c'est-à-dire les dames noires.

Faites le diagramme de Carroll et le diagramme d'Euler-Venn, Dans quelles cases ou dans quels secteurs sont situés les éléments répondant à la condition fixée?

Vous constatez que les éléments cherchés sont éléments de A \ B *ou* éléments de B \ A. Ils constituent un nouveau sous-ensemble qui s'obtient en opérant *la réunion des deux sous-ensembles différences.*

Ce nouveau sous-ensemble reçoit le nom de *différence symétrique*, en raison du rôle symétrique que jouent les différences (symétrie bien visible sur les diagrammes).

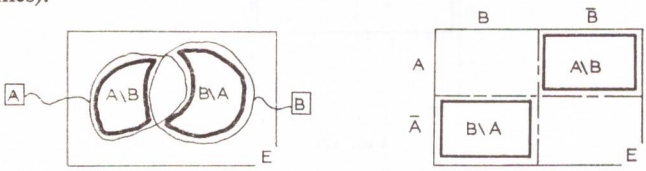

FIG. 14.

On le note en plaçant les lettres représentant les sous-ensembles considérés de part et d'autre de la lettre grecque delta majuscule (Δ), elle-même symétrique.

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = B \Delta A$$

Exercice.

Cherchez un autre mode opératoire pour constituer la *différence symétrique* de deux sous-ensembles en partant de la *réunion* et de l'*intersection* des deux sous-ensembles.

Cartes perforées.

Dessinez les deux dessins de cartes caractérisant la différence symétrique de deux ensembles A et B. Vérifiez que ces dessins sont symétriques l'un par rapport à l'autre.

§ 3. Récapitulation.

Avons-nous épuisé toutes les manières d'opérer des classements croisés en fonction de deux des caractéristiques d'un ensemble de référence?

Pour répondre à cette question nous allons procéder à une récapitulation des modes de classement trouvés jusqu'à présent.

Nous appelons *a* et *b* les caractéristiques (attributs) choisies, E le référentiel, ∅ l'ensemble vide.

Je considère les éléments présentant la caractéristique *a*. Certains ont en outre la caractéristique *b*, d'autres la caractéristique non-*b*. Mais je ne m'intéresse pas pour le moment à cette deuxième caractéristique.

J'appelle A le sous-ensemble des éléments présentant la caractéristique *a*.

$\overline{A}$ le sous-ensemble des éléments présentant la caractéristique non-*a*.

J'ai, dans les divers « registres » envisagés, les représentations ci-dessous :

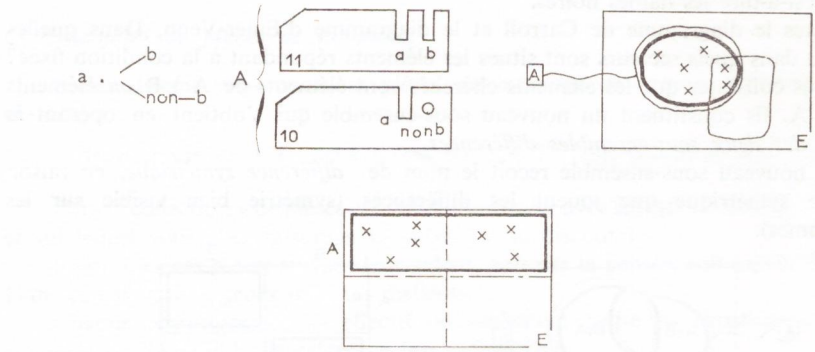

FIG. 15.

J'appelle B le sous-ensemble des éléments présentant la caractéristique *b* et $\overline{B}$ son complémentaire. J'établis, comme précédemment, les représentations correspondantes.

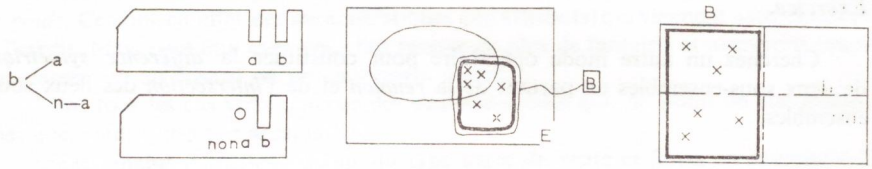

FIG. 16.

Je considère les éléments présentant la caractéristique *a* et la caractéristique *b*. Ils constituent le sous-ensemble *intersection* de A et de B.

De la même façon je constitue les trois autres intersections.

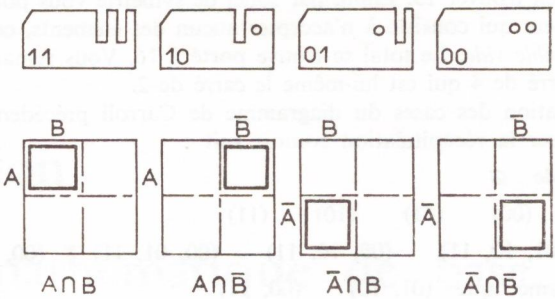

FIG. 17.

Je considère les éléments présentant la caractéristique *a ou* la caractéristique *b*. Ils constituent le sous-ensemble *réunion* de A et de B. Ici encore j'ai la possibilité de faire trois autres réunions.

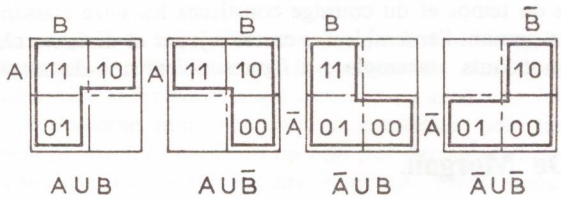

FIG. 18.

Ajoutez à ces divers modes de classement la *différence symétrique :*

$$A \Delta B$$

et son complémentaire

$$\overline{A \Delta B}$$

(dont nous donnons ci-dessous la représentation) et vous avez *presque* épuisé les combinaisons possibles de classement des éléments de l'ensemble E suivant deux de leurs caractéristiques.

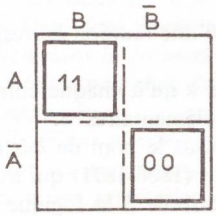

FIG. 19.

Il nous reste en effet un dernier mode de groupement des éléments; qui consiste à considérer tous les éléments du référentiel indistinctement, c'est-à-dire sans tenir compte du fait qu'ils possèdent ou ne possèdent pas la caractéristique *a* et la caractéristique *b*. Nous trouvons alors les quatre cases du diagramme de Carroll.

Comptez combien vous avez au total de modes de classement!

Vous devez en trouver 15. Enfin, par souci de symétrie vous pouvez ajouter le mode de classement qui consiste à n'accepter aucun des éléments, ce qui revient à considérer l'*ensemble vide*. Le total se trouve porté à 16. Vous remarquerez que ce nombre est le carré de 4 qui est lui-même le carré de 2.

Avec la notation des cases du diagramme de Carroll précédemment utilisée, on peut synthétiser la récapitulation comme suit :

Ensemble vide $\varnothing$

Intersections (00) (01) (10) (11)

Réunions (01, 10, 11) (00, 10, 11) (00, 01, 11) (00, 01, 10)

Différence symétrique (01, 10) (00, 11)

Ensemble plein (E) (00, 01, 10, 11).

Exercice.

Si vous avez du temps et du courage constituez les seize classements que vous venez d'étudier en prenant l'ensemble des cartes à jouer et désignez chacun des sous-ensembles correspondants : exemple : « figures noires non-dames ».

§ 4. Lois de De Morgan.

Maintenant que nous disposons d'un inventaire systématique des classements que nous pouvons opérer au sein des éléments d'un ensemble en considérant deux de leurs caractéristiques, nous comprenons aisément que lorsque nous associerons d'une manière quelconque deux sous-ensembles quelconques de l'ensemble de référence nous trouverons un sous-ensemble que nous avons déjà identifié et auquel nous avons donné un nom.

Considérons par exemple le sous-ensemble *réunion* de A et B, noté (01, 10, 11) sur le diagramme de Carroll. Prenons-en le *complémentaire*. C'est le sous-ensemble noté (00) *intersection* de

$$\overline{A} \text{ et de } \overline{B}$$

Ceci veut dire que :

« A chaque complémentaire d'une réunion correspond l'intersection des complémentaires. »

De la même façon on trouve « qu'à chaque complémentaire d'une intersection correspond la réunion des complémentaires ».

Ces deux lois sont connues sous le nom de *lois de De Morgan*, en souvenir du mathématicien anglais De Morgan (1806-1871) qui avec Boole (prononcez « boul ») et Venn donna une impulsion nouvelle à la logique au XIXe siècle.

Ces lois se notent :

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \quad \text{et} \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

Elles mettent en évidence une propriété remarquable de la réunion et de l'intersection considérées l'une par rapport à l'autre : réunion et intersection sont substi-

tuables l'une à l'autre à condition qu'on passe simultanément aux complémentaires. *Il y a dualité de la réunion et de l'intersection par passage aux complémentaires.*

§ 5. Exercices.

1° Dans l'ensemble E des voitures du Salon, j'appelle R le sous-ensemble des automobiles *Renault*, N le sous-ensemble des automobiles *noires*.

a) Que signifient :

$$R \cup N \qquad N \cap R \qquad R \setminus N \qquad N \setminus R$$

b) Faites un diagramme pour chaque cas,

c) Que pouvez-vous dire si $R \cap N = \varnothing$.

d) Supposez que toutes les Renault du Salon sont noires :
— faites un diagramme;
— complétez $R \cap N =$;
— que signifie $N \setminus R$?

2° Représentez à l'aide d'un diagramme la situation

$$A \subset \overline{B} \qquad \text{(A inclus dans } \overline{B} \text{ barre)}$$

Trouvez un exemple d'une telle situation puisé dans un référentiel de la vie courante.

3° Examinez la représentation graphique ci-dessous et essayez d'en donner une signification.

FIG. 20.

Conclusion du premier cahier.

Nous avons dans ce premier Cahier parcouru déjà un long chemin. Il nous faudra, dans la prochaine *fiche*, prendre un peu de recul afin de mieux embrasser le terrain exploré. Dès à présent nous pouvons présenter quelques remarques.

En ce qui concerne la matière traitée, on peut dire qu'elle gravite autour des classifications considérées sous leur aspect général. Il s'agit pourtant de mathématique parce qu'on ne se contente pas de décrire : on cherche des règles opératoires applicables aux situations les plus variées. Mais cela reste de la « mathématique de tous les jours » parce que cette mathématique-là, bien que très générale, porte sur des situations et des manipulations qui sont du domaine de la vie courante.

On comprend dans ces conditions que cette mathématique ait vocation à être enseignée dès le Primaire puisqu'elle peut se développer en partant de l'univers familier de l'enfant et parce qu'elle lui apprend à faire de façon systématique ce qu'il fait, spontanément mais de façon brouillonne, à tout instant, aussi bien dans son action sur les êtres et sur les choses, que dans les raisonnements dont il se sert en ces occasions.

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public — A.P.M.E.P.

Ce qu'est l'Association.

Association fondée en 1910, déclarée selon la loi de 1901, elle réunit en 1968 plus de huit mille maîtres qui enseignent les mathématiques aux divers niveaux, « de la Maternelle aux Facultés ».

Par l'association, ses adhérents mettent en commun leurs questions, leurs recherches, leurs expériences pour améliorer l'enseignement des mathématiques.

L'Association est organisée en **Régionales** académiques qui ont leurs activités propres (cours et conférences pour la formation permanente des maîtres en particulier).

Un *Comité* national, élu par l'*Assemblée générale* annuelle, désigne un BUREAU qui assure le fonctionnement administratif et représente l'Association auprès des autorités de l'Éducation Nationale et de tous les groupements ou personnes intéressés par l'enseignement des mathématiques.

***

Pour adhérer à l'A.P.M.E.P. et recevoir son *Bulletin* qui paraît six fois par an, demander au secrétariat, 29, rue d'Ulm, Paris-5e une fiche d'adhésion ou d'abonnement.

Cotisation (pour l'année civile) donnant droit au *Bulletin* et aux annales d'examens : 22 F.

Abonnement (pour les collectivités ou les personnes n'appartenant pas à l'enseignement public) : 30 F.

***

Ce qu'elle propose.

Sous le titre « Charte de Chambéry ,1969, 1971, 1973, 1976, 1980... », l'A.P.M.E.P. a précisé quelles pourraient être les étapes et les perspectives d'une réforme de l'enseignement des mathématiques.

La brochure de 32 p., 2 F franco par virement postal au cc de l'A.P.M.E.P., Paris 5708-21.

***

Ce qu'elle édite.

Pour servir à la formation permanente des maîtres l'A.P.M.E.P. a édité :

— *Le Cours de l'A.P.M.*, par A. et G. REVUZ, en trois volumes. Restent disponibles : tome 2, *Espaces vectoriels* (25 F); tome 3, *Éléments de topologie* (35 F).

— *Pour apprendre à conjecturer*, par L. GUERBER et P.-L. HENNEQUIN, en deux volumes; 1. *Initiation à la statistique* (25 F); 2. *Initiation au Calcul des Probabilités* (25 F).

Le Secrétariat de l'A.P.M.E.P. participe également à la diffusion des œuvres complètes d'Évariste Dupont dont le seul ouvrage paru est *Apprentissage Mathématique* (ensembles, relations, nombres), spécialement écrit pour la première information des maîtres. Envoi franco 15 F.

Printed in France *Le Directeur de la publication: :* G. WALUSINSKI

FD - Imp. Alençonnaise, B. P. 57, 61-Alençon - Dépôt légal 1968 : 8.492 - C.P.P.P. 54.061