CAHIER 3

chantiers de pédagogie mathématique

cahiers pour la formation permanente

Série 1. Initiation à la mathématique de base

PROPRIÉTÉS DES RELATIONS 1.9.

LOIS DE COMPOSITION 1.10.

ALGÈBRE DU SIMPLEXE 1.11.

JEUX 1.12.

février 1969

Régionale Parisienne

de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

Relations internes. Opérations

Le troisième *Cahier* de la présente série (« Initiation à la mathématique de base ») va nous permettre de faire quelques pas décisifs dans notre marche d'approche vers l'étude de *l'ensemble des naturels*, ensemble qui occupe une place privilégiée dans l'enseignement primaire mais qu'on risque de faire aborder prématurément par les jeunes élèves si l'on n'a pas pris soin de préparer patiemment le terrain.

Dans ce *Cahier*, nos étapes seront les suivantes :

Fiche 1.9 : *Relations* (suite). L'objet de cette fiche est d'introduire les notions

— de *relation d'équivalence* qui conduit au concept fondamental en logique de classe d'équivalence;

— de *relation d'ordre* qui débouche notamment sur l'aspect ordinal des nombres.

Fiche 1.10 : Opérations de composition. L'objet de cette fiche est de préciser, de généraliser et de formaliser ce que nous avons vu dès les premières fiches à propos des opérations effectuées sur les parties d'un ensemble de référence. Ici encore il s'agira, notamment, de préparer le terrain aux opérations familières sur les nombres que nous pratiquons sans toujours les bien connaître.

Fiche 1.11 : Algèbre du simplexe. Il s'agit d'une fiche essentielle car elle s'essaye à esquisser une première synthèse, c'est-à-dire qu'elle cherche une visée globale permettant de mettre en situation, conformément à leurs solidarités organiques, les éléments d'un ensemble, les « regroupements » de ces éléments (parties de l'ensemble), les relations entre ces parties, les « compositions » deux à deux de ces parties. Et cela dans la perspective propre à la mathématique qui est de dépasser les exemples particuliers pour découvrir des règles opératoires générales regroupées au sein d'un *corpus* formalisable, c'est-à-dire une *algèbre* (*).

Fiche 1.12 : Jeux et exercices. Après l'effort de synthèse de la fiche précédente, le lecteur appréciera sans doute de pouvoir « souffler un peu ». La fiche 12 lui en donnera l'occasion puisqu'il s'agira cette fois de jeux et d'exercices variés.

(*) Au sujet de l'étymologie de ce mot, Littré nous apprend qu'en espagnol *algebra* désignait aussi l'art de remettre les membres disloqués et qu'*algebra* venait de l'article *al* (le) et de *djabroun* (réunion de plusieurs parties séparées).

De nos jours, N. Bourbaki écrit : « Faire de l'Algèbre, c'est essentiellement *calculer*, c'est-à-dire effectuer, sur des éléments d'un ensemble, des « opérations algébriques », dont l'exemple le plus connu est fourni par les « quatre règles » de l'arithmétique élémentaire » (dans L. II, chap. 1).

Il nous paraît intéressant de citer aussi cette appréciation d'un historien : « C'est Viète qui, d'un art, d'un recueil de règles pratiques et de recettes à usage d'amateurs de récréations mathématiques, fit non pas une science véritable (ce fut là l'œuvre des Italiens, Tartaglia, Cardan, Ferrari, Bombelli), mais une langue liée à une science, et liée de façon telle que tout progrés de la science amenait un progrès de la langue — et réciproquement », Lucien Febvre dans *Le problème de l'incroyance au XVIe siècle, la religion de Rabelais*, p. 422.

fiche 1.9.

Propriétés des relations

Relations d'équivalence

Relation d'ordre

Dans la fiche précédente nous avons commencé à nous familiariser avec la notion de relation en nous intéressant principalement à ce qu'elle a de plus général. Au sein de l'ensemble des relations ainsi définies nous allons maintenant chercher si l'on peut trouver des catégories plus fines. En quelque sorte nous allons entreprendre ce que l'on fait par exemple en grammaire lorsque, après avoir mis en évidence la catégorie grammaticale appelée verbe, nous distinguons les verbes transitifs et intransitifs, les verbes réfléchis et non réfléchis, les verbes réciproques et non réciproques, etc...

1. Propriétés des relations dans un ensemble.

1.1. *Réflexivité.*

Puisque dans une relation on forme des couples d'éléments afin de voir si lesdits éléments vérifient ou ne vérifient pas la relation, il est normal de se demander ce qui se passe quand on *associe un élément à lui-même.* Le couple de la forme (x,x) obtenu satisfait-il la relation ou non? Il faut dans chaque cas examiner ce qu'il en est.

a) Considérons la *relation d'inclusion* dans l'ensemble des parties d'un ensemble.

Accouplons un élément de cet ensemble, par exemple, $\{a,b\}$ à lui-même. La relation d'inclusion est vérifiée :

$$\{a,b\} \subset \{a,b\}$$

Le couple $(\{a,b\}, \{a,b\})$ à termes égaux appartient au graphe G de la relation.

Sur le diagramme cartésien, cette situation se traduit par une croix dans la case de coordonnées $\{a,b\}$, $\{a,b\}$, case qui se trouve sur la *diagonale* du tableau carré.

Sur le diagramme sagittal on a une *boucle*.

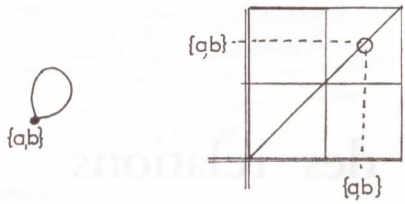


FIG. 50.

Question : En est-il de même pour tous les autres éléments de l'ensemble $\mathcal{P}(E)$?

La réponse est *oui*, puisque, par convention, toute partie d'ensemble est considérée comme incluse dans elle-même.

b) Considérons la *relation de parenté*, « ... est père de ... » dont le graphe est G_5. p désigne le père, chef de famille; f désigne un de ses fils. Le couple (p,f) est élément du graphe :

$$(p,f) \in G_5$$

mais le couple (p,p) ne l'est pas parce que la personne p n'est pas son propre père.

Dans la présentation sagittale il n'y a *pas de boucle* associée au point représentatif de p.

Ainsi, en ce qui concerne l'accouplement d'un élément avec lui-même nous trouvons une différence totale entre les deux relations que nous venons de prendre pour exemples.

c) Dans l'ensemble E des nombres 0, 4, 14, 25, considérez la relation « ... est inférieur ou égal à ... ».

Exercices.

1° Construisez le diagramme cartésien et le diagramme sagittal.

2° Écrivez en extension le graphe de cette relation.

3° Sous l'angle de l'accouplement d'un élément avec lui-même, cette relation est-elle de « la même famille » :
— que la relation d'inclusion? Oui-non.
— que la relation « est l'enfant de »? Oui-non.

4° Donnez un exemple de relation de votre choix tel que, *sous l'angle considéré* (accouplement d'un élément avec lui-même), cette relation se conforme au modèle de la relation « est l'enfant de ».

5° Soit F un ensemble de mots :
F = { aimer, rire, pleurer, envier, donner, ranger, savourer, ruer }. On définit entre les mots de F la relation R_7 : « l'initiale du premier mot est la finale du second »; exemple : (envier R_7 rire), ou encore : (envier, rire) $\in G_7$. Quels sont les couples à termes égaux éléments du graphe G_7 de la relation R_7?

d) Ainsi certaines relations sont satisfaites quand on accouple (suivant ces relations) chaque élément de l'ensemble avec lui-même. D'autres relations ne présentent pas cette particularité.

On qualifie les premières de *réflexives*.

L'adjectif réflexif évoque le fait que « la relation se retourne sur elle-même », un peu à la façon dont l'image revient sur l'objet après *réflexion* sur un miroir.

> ***Définition :*** une relation R dans un ensemble E non vide est dite *réflexive* si, et seulement si, pour tout élément x de E la relation $x\mathrm{R}x$ est vérifiée.

Pour formaliser cette définition, on doit utiliser le *quantificateur universel*. Si une relation est réflexive, dans son diagramme sagittal il y a une boucle à partir de chaque élément; une seule boucle manquerait et la relation ne serait plus réflexive :

$$\boxed{\forall x,\ (x \in \mathrm{E}),\ x\mathrm{R}x}\ ,\ \text{ou encore}\ \boxed{\forall x,\ x \in \mathrm{E},\ (x,x) \in \mathrm{G}}$$

1.2. *Transivité.*

Plaçons-nous maintenant à un tout autre point de vue.

Examinons ce que l'on peut appeler « les enchaînements de couples » obtenus en prenant comme premier élément d'un couple satisfaisant la relation le deuxième élément d'un autre couple la satisfaisant aussi, et ainsi de suite. Ceci revient, en quelque sorte, à comparer les éléments deux à deux de proche en proche.

Considérons par exemple la relation d'*inclusion* ($\subset$) dans l'ensemble des parties d'un ensemble :

$$\{a\} \subset \{a,b\},$$
$$\{a,b\} \subset \{a,b,c\};$$
$$\{a\} \subset \{a,b,c\}$$

Dans cet exemple la relation, vérifiée de proche en proche, est également vérifiée quand on saute les intermédiaires. (Songez au raccourci.)

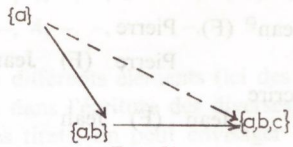


FIG. 51.

Ce genre de situation se présente fréquemment. Quand on marche, le point d'arrivée d'un pas devient le point de départ du pas suivant, et ainsi de suite...

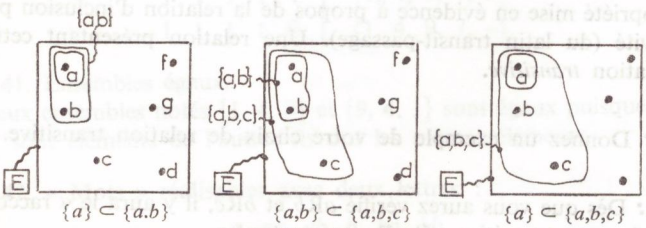


FIG. 52.

Si j'ai la relation « *a* avant *b* » et la relation « *b* avant *c* », j'aurai aussi la relation « *a* avant *c* ».

Une telle propriété se retrouve-t-elle dans tous les types de relation?

Contre-exemple.

Vérifiez que *non* en considérant par exemple la relation

« ... est le père de ... »

Exercices.

a) Trouvez un autre exemple de relation qui ne vérifie pas la particularité trouvée plus haut à propos de la relation d'inclusion.

b) Que penser de la relation :

« ... est le frère de ... »

Est-elle en tout point comparable à la relation d'inclusion (sous l'angle où nous nous plaçons actuellement)?

Réfléchissez bien avant de répondre et justifiez votre réponse.

La réponse est *non*. Pour vous en convaincre, considérez les trois frères Jean, Pierre, Paul et appelez (F) la relation « est le frère de ». Vous pouvez écrire :

Jean (F) Pierre
Pierre (F) Paul
Jean (F) Paul

Vous pouvez être tenté de conclure que c'est exactement le décalque de la situation de tout à l'heure. Mais regardez-y de plus près.

Vous pouvez écrire :

Jean (F) Pierre
Pierre (F) Jean

mais vous ne pouvez pas écrire

Jean (F) Jean

parce que Jean *n'est pas* le frère de Jean.

Les deux relations considérées ne sont donc pas, en dépit de certaines ressemblances, bâties exactement sur le même modèle.

La propriété mise en évidence à propos de la relation d'inclusion porte le nom de transitivité (du latin transit-passage). Une relation présentant cette propriété est dire relation *transitive*.

Exercice : Donnez un exemple de votre choix de relation transitive.

Attention : Dès que vous aurez vérifié *a*R*b* et *b*R*c*, il y aura le « raccourci » *a*R*c*; si une relation est transitive, elle l'est « partout ».

Définition : une relation R dans E est *transitive* si et seulement si chaque fois que les couples (x,y) et (z,t) sont éléments du graphe G de R et que $x = z$, alors le couple (x,t) est élément du graphe.

$$\forall a,\ \forall b,\ \forall c,\ a \in E,\ b \in E,\ c \in E,$$
$$\text{si } (a,b) \in G \text{ et } (b,c) \in G, \text{ alors } (a,c) \in G$$

Exercice : traduisez l'expression formalisée ci-dessus en langage ordinaire.

Remarque sur un cas particulier : La relation R définie dans l'ensemble E est transitive et dans le triplet d'éléments (a,b,c) on a $a = c$; si les flèches (a,b) et (b,a) existent sur le diagramme sagittal de R, alors la transitivité entraîne l'existence de la flèche (a,a) :

— si $(a,b) \in G$ et $(b,a) \in G$, alors $(a,a) \in G$; il en est de même pour la flèche (b,b);

— si $(b,a) \in G$ et $(a,b) \in G$, alors $(b,b) \in G$.

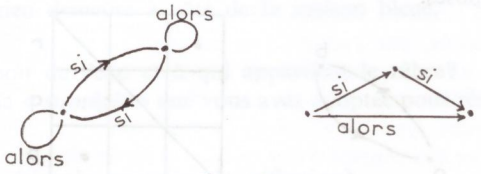


FIG. 53.

Autre remarque : Le caractère de *réflexivité* permet de répartir l'ensemble des relations définies sur E entre le sous-ensemble R des *relations réflexives* et le sous-ensemble (non-R) des relations non réflexives. Vous définissez de même le sous-ensemble T des *relations transitives* et le sous-ensemble (non-T) des relations non transitives.

	R	non R
T	X	
non T		

FIG. 54.

Dans l'intersection $R \cap T$ nous trouvons les relations qui sont *réflexives et transitives.*

C'est notamment le cas de la relation d'inclusion dans l'ensemble des parties de E, de la relation « inférieur ou égal à » ($\leqslant$) dans l'ensemble des nombres entiers.

1.3. *Symétrie.*

On peut encore regarder, pour diverses relations, comment se comportent les couples quand on *intervertit* leurs termes.

Si aRb, c'est-à-dire $(a,b) \in G$, est-ce que l'on a aussi bRa, c'est-à-dire $(b,a) \in G$?

Si la flèche (a,b) existe dans le diagramme sagittal, est-ce que la flèche (b,a) existe aussi? Vous pensez inévitablement à l'aller et retour.

> ***Définition :*** Une relation R dans E est *symétrique* si et seulement si chaque fois que le couple (a,b) est élément du graphe G de R, le couple (b,a) en est aussi élément.
>
> $$\forall (a,b),\ (a,b) \in E \times E,$$
> $$\text{si } (a,b) \in G \text{ alors } (b,a) \in G$$

Exercice : Traduisez l'expression formalisée ci-dessus en langage ordinaire.

Diagrammes : Dans le diagramme cartésien d'une relation symétrique les couples du graphe sont deux à deux symétriques par rapport à une diagonale du diagramme carré, ou bien un couple est son propre symétrique.

Cette situation correspond, dans le diagramme sagittal aux deux flèches (a,b) et (b,a) de sens opposés.

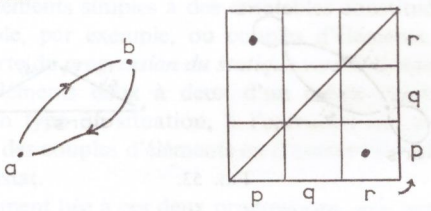


FIG. 55.

Exemples de relations symétriques :

.... être le parent de ...

.... fréquenter le même établissement que ....

.... danser avec ....

Trouvez d'autres exemples. Dans une famille comportant des enfants des deux sexes, la relation « est frère de » est-elle symétrique? Oui-non.

1.4. *Antisymétrie.*

Ce dernier exemple, la relation « est frère de » dans une famille où il y a des garçons et des filles, est intéressant à considérer : dans le graphe de cette relation, vous trouverez des couples symétriques et des couples dont le symétrique n'est pas élément du graphe; cette relation n'est pas symétrique : tous les couples de son graphe ne sont pas deux à deux symétriques.

Pouvez-vous concevoir une relation dont le graphe ne comporte aucune paire de couples symétriques distincts?

Pensez à la relation d'inclusion dans l'ensemble des parties d'un ensemble :

$$A \in \mathcal{P}(E),\ B \in \mathcal{P}(E),\ A \neq B,$$
$$\text{si } A \subset B, \text{ alors } B \not\subset A$$

Si X et Y sont des parties de E, si $X \subset Y$ et $Y \subset X$, alors $X = Y$.

Définition : Une relation R dans E est *antisymétrique* (*) si et seulement si le graphe G de R ne peut avoir simultanément pour éléments les couples (a,b) et (b,a), quel que soit b *différent* de a.

$$\forall (a,b) \in E \times E,\ a \neq b$$

$(a,b) \in G$ et $(b,a) \in G$ non vrais simultanément.

Il revient au même d'écrire : la relation R dans E est antisymétrique, si et seulement si :

$$\forall (x,y),\ (x,y) \in E \times E,\ (x\mathrm{R}y \text{ et } y\mathrm{R}x) \Rightarrow (x = y)$$

Le symbole $\Rightarrow$ se lit « implique ».

Exemples de relations antisymétriques :

... est plus petit que ...

... est inférieur ou égal à ...

... est plus jeune que ...

... n'est pas plus vieux que...

... est plus lourd que ...

Trouvez d'autres exemples.

Remarque : Si une relation est symétrique, si un couple (a,b) avec $a \neq b$ est élément du graphe, le couple (b,a) est aussi élément. Si la relation est antisymétrique, les couples (a,b) et (b,a) ne sont pas simultanément éléments du graphe. Il en résulte qu'une relation à la fois symétrique et antisymétrique n'a pour éléments de son graphe que des couples (a,a) à termes égaux. Son diagramme sagittal n'a que des boucles.

Exercice : Considérez chacune des relations ci-dessous et indiquez dans la case correspondante par un 1 signifiant *oui* ou un 0 signifiant *non* si la relation considérée a ou n'a pas la propriété indiquée.

La relation ci-dessous est-elle	Réflexive	Symétrique	Anti-symétrique	Transitive
x est inférieur ou égal à y				
x est le père de y				
x habite la même rue que y				
x est plus grand que y				
x est à moins de 5 km de y				

(*) Des logiciens et des psychologues disent aussi « asymétrique ».

2. Des types de relations particulières importantes.

2.1. *Relation d'équivalence.*

Nous y avons déjà fait allusion. Il s'agit des relations qui sont simultanément *réflexives*, *transitives* et *symétriques*.

Ces relations sont très importantes, notamment parce qu'on trouve parmi elles la relation d'égalité (entre éléments d'un ensemble, ou entre parties d'un même ensemble).

Soit par exemple l'égalité entre parties d'un ensemble E :

$\forall A,\ A \in \mathcal{P}(E),\ A = A$: la relation est réflexive.

$\forall A,\ \forall B,\ \forall C$, A,B,C, parties de E

si $A = B$ et $B = C$, alors $A = C$: relation transitive;

$\forall A,\ \forall B$ si $A = B$, alors $B = A$: relation symétrique.

Voici un autre exemple : dans l'ensemble des naturels inférieurs à 100, la relation « ... a même chiffre des unités » ... est une relation d'équivalence. Vérifiez qu'elle est bien réflexive, transitive et symétrique.

Question : Percevez-vous une différence entre la relation d'égalité et la relation « ... a même chiffre des unités ... » analysées ci-dessus? Réfléchissez-y.

Dans un ensemble E, le sous-ensemble des éléments équivalents à un élément *a* n'est autre que la *classe d'équivalence* notée Cl*a* ou [*a*] ou encore *a* dont nous avons déjà parlé. Elle n'est pas vide, car elle contient au moins *a*.

Exemple : Dans un ensemble de fleurs, que je regroupe en bouquets homogènes, le sous-ensemble des fleurs équivalentes à l'anémone *a* (sous l'angle de la nature des fleurs) constitue la classe d'équivalence de *a*.

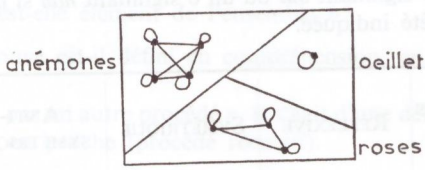


FIG. 62.

Deux classes d'équivalence Cl*a* et Cl*b* sont : ou confondues si *a* et *b* sont eux-mêmes équivalents, ou disjointes (sans élément commun) s'ils ne le sont pas. Tout élément est classé. Donc :

Les classes d'équivalence réalisent une partition de E.

Exercice : Trouvez d'autres exemples de relation d'équivalence. Faites pour l'un d'eux la représentation sagittale. Représentez les classes d'équivalence.

Remarque : Quand un ensemble E est ainsi partagé en classes d'équivalence, n'importe quel élément d'une classe donnée peut être pris comme représentant de sa classe.

Par exemple, j'établis la relation « a même initiale que » dans l'ensemble des mots répertoriés par tel dictionnaire. Tous les mots commençant par B, par exemple se retrouvent dans une classe bien découpée dans le dictionnaire. Si j'ouvre le dictionnaire au hasard et que je tombe sur le mot « bête », je sais que je me trouve dans la classe des mots commençant par B. Le mot « bête » pourrait servir d'emblème à sa classe d'équivalence. En fait l'usage prévaut de choisir comme emblème de la classe le « mot » le plus court, c'est à dire l'initiale commune.

On utilise parfois des crochets pour désigner la classe d'équivalence associée à un élément. L'écriture $[a]$ se lit : « classe d'équivalence de l'élément a » ou encore $\dot{a}$ pour désigner $[a]$. On aura donc l'égalité $\dot{a} = \dot{b}$ pour exprimer que les éléments a et b sont équivalents.

Les diverses classes d'équivalence entre lesquelles se partagent la totalité des éléments d'un ensemble de référence peuvent être elles-mêmes considérées comme éléments d'un nouvel ensemble.

Ainsi, dans l'exemple des fleurs précédemment examiné, chaque classe d'équivalence définissait un bouquet distinct et rien ne m'empêchait de considérer l'ensemble de ces bouquets.

Un tel ensemble est appelé *ensemble-quotient.*

Pour qu'un ensemble-quotient soit parfaitement défini. il faut préciser l'ensemble de référence E et la relation d'équivalence R; on note alors l'ensemble-quotient E/R.

Exercices : 1° Écrivez en extension l'ensemble-quotient de l'ensemble M des mots français définis dans le Petit Larousse 1968 par la relation I « a la même initiale que ».

2° Considérez le schéma ci-dessous et indiquez ce qu'il évoque pour vous.

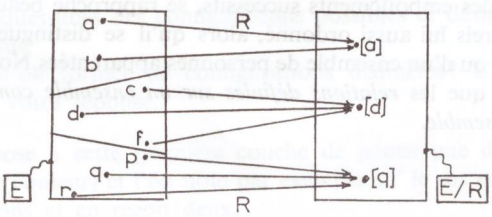


FIG. 57.

2.2. *Relation d'ordre.*

Alors que la relation d'équivalence permet de « *confondre* » et de former des catégories donc de *classer*, la relation d'ordre permet de « *distinguer* » en ordonnant.

Réflexives et transitives comme les relations d'équivalence, les relations d'ordre s'en distinguent radicalement sous l'angle de la symétrie. Les premières sont symétriques. Les secondes sont *antisymétriques.*

Définition : On appelle relation d'ordre toute relation qui est à la fois *réflexive, transitive* et *antisymétrique.*

Exemples typiques : Dans l'ensemble des villes arrosées par une rivière, la relation « n'est pas en aval de » est une relation d'ordre; dans l'ensemble des naturels, la relation « est inférieur ou égal à » est une relation dite *ordre au sens large* (vous savez écrire et lire $3 \leqslant 5$, $7 \leqslant 7$).

Exercice : Trouvez parmi les exemples de relations étudiées dans la présente fiche des relations d'ordre.

3. Conclusions.

En introduisant les relations qui lient deux à deux certains des éléments d'un ensemble donné, nous avons fait un pas important dans la connaissance « intime » des ensembles.

Jusqu'ici nous nous étions largement désintéressés de la nature des éléments en présence dans les ensembles. Graphiquement nous les représentions indistinctement par des points et les sous-ensembles auxquels ils appartenaient par des cases ou des « patates ». Ce qui primait c'était l'appartenance ou la non appartenance. Nous nous sommes alors dotés d'outils très utiles car très généraux.

Mais comme, sous d'autres aspects, les ensembles ne se ressemblent pas forcément, il convenait de rechercher en quoi ils pouvaient se ressembler et en quoi ils pouvaient différer. Pour cela il fallait s'intéresser aux *éléments* eux-mêmes *considérés les uns par rapport aux autres.* Les relations binaires internes nous ont permis de le faire.

Dans les cas particuliers d'ensembles examinés plus haut nous avons vu, par exemple, que l'ensemble des parties d'un ensemble, dans la mesure où ses éléments se prêtent au jeu des emboîtements successifs, se rapproche beaucoup de l'ensemble des nombres naturels lui aussi ordonné, alors qu'il se distingue radicalement d'un ensemble de fleurs ou d'un ensemble de personnes apparentées. Nous aurons l'occasion de voir plus loin que les *relations définies sur un ensemble contribuent à définir la structure dudit ensemble.*

fiche 1.10.

Correspondance entre éléments de deux ensembles; notion d'application; loi de composition

Si nous jetons un coup d'œil panoramique sur ce que nous avons vu jusqu'ici au sujet des *ensembles* et au sujet des *relations* nous constatons combien ces deux domaines d'étude sont étroitement imbriqués.

Nous allons découvrir une autre marque de cette imbrication en examinant aujourd'hui de façon un peu systématique des ensembles qui par la façon même dont ils sont définis se trouvent organiquement « en relation ».

1. Correspondance terme à terme.

Les correspondances « terme à terme », encore appelées biunivoques, nous sont familières car nous avons eu l'occasion d'en rencontrer bien des exemples.

Ainsi, dès les premières de nos fiches, nous avons fait correspondre à un ensemble de nombres 1, 2, 3 un ensemble d'étiquettes *a*, *b*, *c* dont chacune portait inscrit sur elle un nombre de l'ensemble. Il y avait correspondance terme à terme des nombres et des étiquettes.

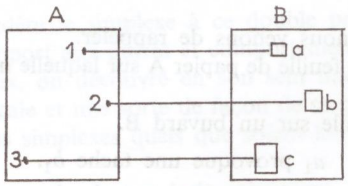


FIG. 58.

On peut représenter graphiquement une telle situation par le schéma ci-dessus. A chaque élément de A correspond un élément et un seul de B. La correspondance est marquée par des flèches reliant deux à deux les éléments.

On voit que la situation est « symétrique » et que l'on peut partir de B pour aller en A au lieu de partir de A pour aller en B.

C'est ce que traduit le terme biunivoque.

Exercice : Donnez des exemples de correspondances terme à terme de votre choix.

Une deuxième façon de se représenter la correspondance consiste à en établir le graphe. Pour cela on forme le produit cartésien des ensembles A et B, c'est-à-dire l'ensemble de *tous les couples possibles* formés avec un élément de A comme premier élément et un élément de B comme deuxième élément :

$$A \times B = \{(1,a),\ (1,b),\ (1,c),\ (2,a),\ (2,b),\ \ldots\}$$

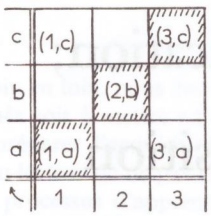


FIG. 59.

Ce produit cartésien compte en tout ... éléments (*). Ces éléments sont *composites :* ce sont des couples.

Les couples satisfaisant la correspondance terme à terme sont par exemple les couples :

$$(1,a) \quad (2,b) \quad (3,c)$$

L'ensemble de ces couples est le graphe G_R de la correspondance.

$$G_R = \{(1,a),\ (2,b),\ (3,c)\}$$

est une partie de $A \times B$; $G_R \subset A \times B$.

Nous avons déjà vu tout cela, c'est un simple rappel.

2. Généralisation : application d'un ensemble dans un ensemble.

Généralisons ce que nous venons de rappeler.

Nous disposons d'une feuille de papier A sur laquelle nous faisons quatre taches d'encre a_1, a_2, a_3, a_4.

Appliquons cette feuille sur un buvard B.

a_1 provoque une tache b_1.

a_2 provoque une tache b_2.

- - - - - - - - - - - - - - - - - -

(*) Complétez.

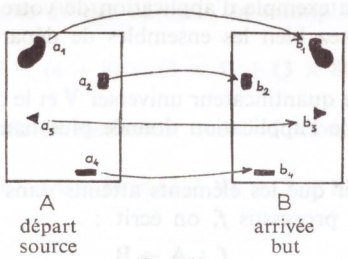


FIG. 60.

A partir de l'ensemble A nous avons formé un ensemble B

$$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}, \text{ départ;}$$
$$B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}, \text{ arrivée.}$$

On dit que b_1 est *l'image* de a_1, que a_1 est *antécédent* de b_1;
b_2 est *l'image* de a_2, que a_2 est *antécédent* de b_2.

L'application de A dans B crée une relation S entre les éléments de A et de B dont le graphe est :

$$G_S = \{(a_1,b_1), (a_2,b_2), (a_3,b_3), (a_4,b_4)\}$$

Mais il se peut que sur le buvard B se trouvent déjà d'autres taches, par exemple β_1 et β_2.

J'ai cette fois affaire aux deux ensembles A et B′

$$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$$
$$B' = \{b_1, b_2, b_3, b_4, \beta_1, \beta_2\}$$

et β_1 *et* β_2 *ne sont les images d'aucun a, ils n'ont aucun antécédent dans A.*

Par contre, par la façon même dont on a procédé (on est parti de A), chaque tache de A a engendré une image *b* dans B. Il n'y a donc pas en A de « points libres », c'est-à-dire d'éléments qui n'ont pas de conjoint en B. Sur le graphique sagittal *de chaque élément de A part une flèche.* Bien que ce ne soit pas le cas sur la figure 60, vous pouvez imaginer que deux taches *a* et *a′* distinctes dans A engendrent la même tache *b* dans B.

De telles situations se retrouvent très fréquemment.

Exemple : Quand on attribue à chaque élève d'une classe une place dans la classe, on réalise une application de l'ensemble A des élèves dans l'ensemble B des places de la classe. A chaque élève correspond une place. Il se peut que certaines places soient libres.

Pour désigner ce type de situation, on emploie le terme d'*application* (pensez à la feuille et au buvard).

Définition : Une relation R d'un ensemble A vers un ensemble B est une *application* de A dans B si et seulement si pour tout élément *x* dans A il existe un élément *y* et un seul dans B tel que la relation *x*R*y* soit vérifiée.

Exercice 1 : Donnez un exemple d'application de votre choix. Faites-en la représentation sagittale. Précisez bien les ensembles de départ et d'arrivée.

Exercice 2 : Utilisant le quantificateur universel $\forall$ et le quantificateur existentiel $\exists$, formalisez la définition de l'application donnée plus haut (1).

Notation : Pour rappeler que les éléments atteints dans B découlent des éléments de A suivant un certain processus f, on écrit :

$$f : A \to B$$
$$a \mapsto b$$

b est dit *image* de a par f; on écrit $f(a) = b$ qui se prononce « f de a ».

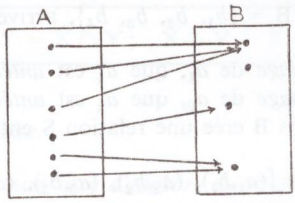


FIG. 61.

1er cas particulier : Application d'un ensemble sur lui-même.

Nous considérons l'ensemble E dont les éléments sont les « piques » et les « cœurs » d'un jeu de 32 cartes, soit 16 éléments au total. Nous décidons de faire correspondre à chaque carte de E une carte de E de même « valeur » mais de couleur différente. Par exemple, à l'as de pique nous faisons correspondre l'as de cœur.

A tout élément de E correspond un élément de E. On est bien en présence d'une application. Mais l'ensemble de départ (E) est le même que l'ensemble d'arrivée (E). On dit qu'on réalise une application de E dans E.

Question : A-t-on encore une application si on procède comme ci-dessus dans un ensemble comportant les 32 cartes du jeu? Oui-non.

Justifiez votre réponse.

2e cas particulier :

Dans la définition de l'application, la nature des éléments de l'ensemble de départ n'a pas été précisée. On peut prendre des *éléments composites*. On peut par exemple prendre les couples obtenus en réalisant un produit cartésien, couples de la forme (p,p), (q,p), (q,r), etc...

(*) Réponse « $\forall a(a \in A)$, $\exists b(b \in B)$ et b est unique $\mid aRb$ ».

r			
q			
p	(p,p)	(p,q)	(p,r)
↖	p	q	r

FIG. 62.

Appelons E l'ensemble des éléments p, q, r à partir duquel nous formons le produit cartésien $E \times E = E^2$.

$$E = \{p,q,r\}$$
$$E \times E = E^2 = \{(p,p),\ (q,r)\ \ldots\ (r,r)\}$$

Imaginons un processus qui, à chaque couple de E^2, fasse correspondre un élément de E, c'est-à-dire, p, q ou r.

Questions : Dans ce cas,

a) quel est l'ensemble de départ;

b) quel est l'ensemble d'arrivée;

c) faites une représentation sagittale (*).

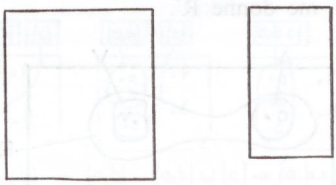


FIG. 63. — A compléter.

Nous avons déjà rencontré des situations de ce genre notamment quand nous avons étudié les opérations portant sur des parties d'un ensemble.

Examinons à nouveau ce problème.

3. Opération considérée comme application.

Nous savons qu'à partir d'un ensemble E de 3 éléments, nous pouvons former 8 parties (ou sous-ensembles) que nous pouvons concrétiser par des « boîtes ». Supposons que nos trois éléments soient des cartes à jouer, par exemple un as (a), un roi (r) et un valet (v); $E = \{a,\ r,\ v\}$.

(*) Les réponses sont : l'ensemble de départ est $E \times E$, l'ensemble d'arrivée E.

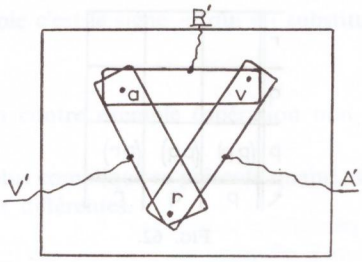


FIG. 64.

Dans une première boîte étiquetée $\varnothing$ je ne mets rien;
Dans une deuxième boîte étiquetée A je mets l'as : $A = \{a\}$;
Dans une troisième boîte étiquetée R je mets le roi, $R = \{r\}$;
Dans une quatrième boîte étiquetée V je mets le valet, $V = \{v\}$;
Dans une cinquième boîte étiquetée A' je mets le roi et le valet, $A' = \{r, v\}$;
Dans une sixième boîte étiquetée R' je mets l'as et le valet, $R' = \{a, v\}$;
Dans une septième boîte étiquetée V' je mets l'as et le roi ,$V' = \{a,r\}$;
Dans une huitième boîte étiquetée E je mets l'as, le roi, le valet.

Ainsi équipé, je joue au « jeu des réunions » qui consiste à prendre une partie quelconque $P \in \mathcal{P}(E)$ et à la réunir à une autre partie (y compris éventuellement elle-même). Pour ce faire je dois réunir les contenus des deux boîtes correspondantes. J'obtiens un nouveau contenu qui est forcément le contenu d'une certaine boîte de mon jeu.

Par exemple : $A \cup V$ me donne R'.

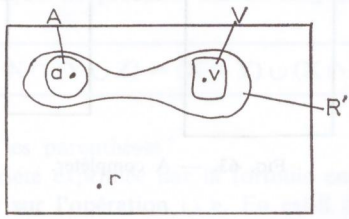


FIG. 65.

Je peux écrire ce dernier résultat sous la forme :

$(A,V) \mapsto R'$; R' est l'image du couple (A,V).

Opérant de façon systématique je peux dresser le tableau de correspondance suivant : (complétez)

$(\varnothing,\varnothing) \mapsto \varnothing$	$(A,\varnothing) \mapsto A$	etc...
$(\varnothing, A) \mapsto A$	$(A, A) \mapsto A$	soit $8 \times 8 = 64$
(,)	$(A, R) \mapsto V'$	couples de départ
(,)	(,)	et 64 images au total
(,)	(,)	
(,)	(,)	
(,)	(,)	
$(\varnothing, E) \mapsto E$	$(A, E) \mapsto E$	

Le mode de présentation adopté ci-dessus met bien en évidence le fait que l'on a affaire à une *application :* l'ensemble de départ est $\mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E)$ puisque ses éléments sont des couples de parties de E; *pour tout couple* de telles parties, il existe une image qui est une partie de E; l'ensemble d'arrivée est $\mathcal{P}(E)$.

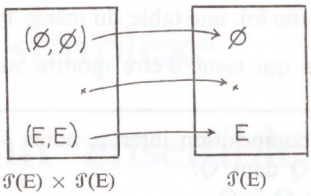


FIG. 66. — (En principe. il y a 64 flèches).

Pour souligner le fait que les éléments de départ sont des couples et que l'image correspondante s'obtient en composant les deux termes, les deux « partenaires » du couple d'une certaine manière, on donne à cette correspondance le nom de *loi de composition interne. Loi* car la règle est valable pour tous les couples (*); *composition* car aux deux termes du couple correspond une image; *interne* car l'image est une partie de E comme chacun des deux termes du couple qui l'ont engendrée.

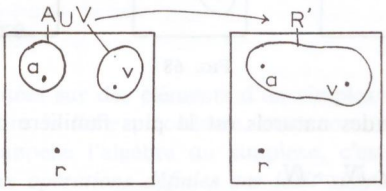


FIG. 67.

Remarque : Au mode de représentation précédent utilisant des flèches, on peut substituer *une table* de la loi de composition :

∪	∅	A	R	V	A'	R'	V'	E
∅	∅	A	R	V	A'	R'	V'	E
A	A	A	V'	R'	E	R'	V'	E
R	R	V'	R	A'	A'	E	V'	E
V	V	R'	A'	V	A'	R'	E	E
A'	A'	E	A'	A'	A'	E	E	E
R'	R'	R'	E	R'	E	R'	E	E
V'	V'	V'	V'	E	E	E	V'	E
E	E	E	E	E	E	E	E	E

où vous lisez $(V,R) \mapsto A'$ dans la colonne de V, premier terme du couple, et dans la ligne de R, deuxième terme du couple.

Dans l'exemple choisi, notre loi de composition interne a été la réunion. Nous

(*) S'il y a une exception au moins, c'est-à-dire un couple au moins pour lequel la composition envisagée n'est pas possible, on ne dira plus « loi de composition » mais seulement *opération*.

aurions tout aussi bien pu prendre l'intersection. Dans ce cas, il aurait fallu chercher, dans les deux boîtes à composer, les éléments communs à ces deux boîtes lesquels auraient constitué la partie résultant du processus d'intersection (l'image du couple par l'application « intersection »).

Exercice : dressez, pour cette loi, une table du même type que celle de la réunion.

On peut généraliser ce qui vient d'être montré sur un exemple.

Définition : Une loi de composition interne, notée $*$, dans un ensemble Q est une application de $Q \times Q$ dans Q.

On la note $* : Q \times Q \to Q$

$$(x,y) \mapsto x*y \text{ (1)}$$

ou simplement : $(x,y) \in Q \times Q,\ z \in Q,\ x*y = z$.

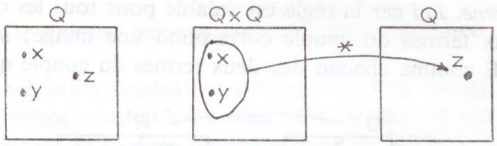


FIG. 68

L'addition des naturels est la plus familière des lois de composition interne :

$$+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

$$(x,y) \mapsto x + y \text{ ou simplement } 13 + 8 = 21.$$

De même la multiplication, $13 \times 8 = 104$.

Par contre la soustraction n'est pas une *loi* de composition interne dans $\mathbb{N}$ puisqu'il y a des couples, (13, 21) par exemple, pour lesquels l'opération n'est pas possible; $13 - 21$ n'est pas un naturel.

Arrivé à ce point, il convient de remarquer que la loi de composition est proche parente de la relation. Si l'on distingue opération et relation c'est que le point de vue auquel on se place n'est pas exactement le même.

La notion d'opération (ou de loi de composition) connote une *génèse* qui, à partir d'un certain donné, produit autre chose, comme c'est le cas lorsque la réflexion sur le miroir « produit » des images.

La notion de relation, elle, évoque plutôt les *constats* (2) que l'on peut faire quand on compare deux à deux, d'un certain point de vue, des éléments. La détection de la relation nécessite un inventaire systématique de tous les couples possibles, alors que l'opération engendre le graphe de la relation en même temps que les images issues des couples que l'on considère.

---

(1) Dans cette expression, le symbole (*) n'a pas de signification particulière, il marque la présence d'une certaine opération qu'on précise dans chaque cas particulier.

(2) Les « lectures », dit Piaget.

fiche 1.11.

Algèbre du simplexe

Structure d'un ensemble

Poursuivant les efforts commencés dans la fiche précédente, nous amorçons aujourd'hui une synthèse des acquisitions antérieures et prenons un premier contact avec les *algèbres de Boole* que nous retrouverons en œuvre par la suite dans les domaines fondamentaux de la pensée et de la technologie moderne : la logique, les circuits, les ordinateurs.

1. Algèbre du simplexe.

Les opérations exécutées sur des éléments d'un simplexe étant définies dans la perspective développée dans la fiche précédente, nous sommes en mesure d'étudier plus avant ce que l'on appelle l'algèbre du simplexe, c'est-à-dire, l'*ensemble des règles qui s'appliquent aux opérations définies sur ledit simplexe.*

L'intérêt de cette algèbre apparaîtra mieux au fur et à mesure que nous progresserons.

Quel est le problème?

Nous avons *un ensemble* noté $\mathcal{P}(E)$ dont *les éléments* sont *les parties*, c'est-à-dire les sous-ensembles d'un ensemble E donné. Chacun de ces éléments, chacune de ces parties, a son individualité (toutes ces parties sont autant de « boîtes » avec des contenus différents) (*).

Les lois de composition définies sur $\mathcal{P}(E)$ permettent de composer ces éléments deux à deux; l'élément de $\mathcal{P}(E)$, c'est-à-dire la partie de E, obtenue par cette composition pourra être appelé le résultat de l'opération sur les deux éléments composés.

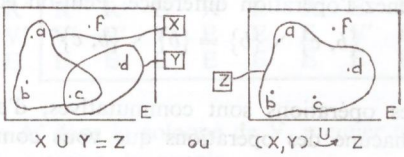


FIG. 69.

(*) Rappelons à propos de ces « boîtes » qu'il ne s'agit que d'une image qui ne doit pas être prise au pied de la lettre car elle n'est pas parfaitement adéquate : les ensembles ont leurs existence propre en dehors de tout regroupement effectif de leurs éléments.

Mais ces opérations se comportent-elles toutes de la même façon? Et qu'en est-il des éléments; les particularités de certains d'entre-eux (nous pensons à $\varnothing$ et à E) n'entraînent-elles pas quelque effet remarquable?

C'est ce que nous nous proposons de chercher en nous occupant successivement :

— des opérations,

— des éléments auxquels s'appliquent ces opérations.

1.1. *Propriétés des opérations sur le simplexe.*

1. Dans toutes les compositions de parties de E définies dans la fiche précédente, vous avez remarqué que les deux parties composées sont les deux termes d'un couple : il y a le premier terme (ou composant) et le deuxième terme (ou composant) du couple. Écrire

$$(X,Y) \mapsto X*Y$$

signifie que X est le premier élément composé par l'opération $*$ avec le deuxième élément Y.

Que se passe-t-il, selon l'opération envisagée, si l'on change l'ordre des termes? Obtiendra-t-on le même résultat? Ou bien celui-ci sera-t-il changé?

Nous vous laissons le soin de répondre pour les opérations d'union et d'intersection appliquées aux parties de $E = \{a, b, c\}$.

La réponse est que les *images sont les mêmes quand on intervertit les composants des couples.*

Vérifiez que ce résultat est général en considérant la nature même des opérations de réunion et d'intersection. Faites un schéma.

De façon générale, quelles que soient les parties X, Y de E, on peut écrire :

$$(1) \qquad \boxed{X \cup Y = Y \cup X}$$

$$(1\ bis) \qquad \boxed{X \cap Y = Y \cap X}$$

C'est la propriété de *commutativité.*

Réunion et intersection sont des opérations commutatives.

Contre-exemple : Prenez l'opération différence. Peut-on écrire, par exemple

$$\{b, c\} \setminus \{b\} = \{b\} \setminus \{b, c\}?$$

Conclusion : Certaines opérations sont commutatives, d'autres ne le sont pas.

Vérifiez-le pour chacune des opérations que vous connaissez soit dans $\mathcal{P}(E)$ soit dans les naturels.

2. Puisque les opérations considérées ici sont des lois de composition *interne*, le résultat obtenu peut entrer à son tour dans un autre couple d'éléments à composer On obtient ainsi une *chaîne d'opérations* de même nature au sein du simplexe même.

Exemple : E = $\{a, b, c, d, e, f\}$; opération de réunion dans $\mathcal{P}$(E).

Première opération : $\{a\} \cup \{b\} = \{a, b\}$ pour traduire $(\{a\}, \{b\}) \overset{\cup}{\mapsto} \{a, b\}$;

Deuxième opération : $\{a, b\} \cup \{c\} = \{a, b, c\}$;

ce que l'on écrit plus simplement :

$$(\{a\} \cup \{b\}) \cup \{c\} = \{a, b, c\}$$

Dans cette écriture la parenthèse (comme on dit, abusivement, pour « les parenthèses ») indique l'opération à effectuer en premier, son résultat étant le premier terme de la deuxième opération réunion.

Mais alors, que se passe-t-il si on commence par réunir les parties $\{b\}$, $\{c\}$ avant de réunir $\{a\}$ au résultat? Autrement dit, quel sera le résultat de :

$$\{a\} \cup (\{b\} \cup \{c\})?$$

Dessinez au besoin un diagramme d'Euler-Venn si vous n'êtes pas déjà convaincu : même résultat définitif. En passant, vous remarquez que les parenthèses ont été employées de deux façons très différentes : ou bien pour désigner un couple, exemple $(\{a\}, \{b\})$; ou bien pour indiquer une *priorité opératoire*.

De façon générale, quelles que soient les parties X, Y, Z de E :

$$(2) \qquad (X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$$

$$(2\ bis) \quad (X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$$

C'est la propriété d'*associativité*.

Réunion et intersection sont des opérations associatives.

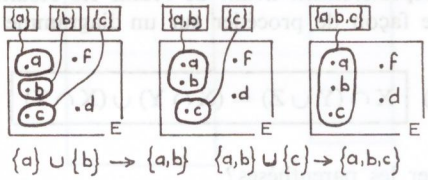


FIG. 70.

D'où la formulation générale de l'*associativité* de l'opération $*$ définie dans un ensemble F : quels que soient les éléments a, b, c de F.

$$(a*b)*c = a*(b*c)$$

Grâce à quoi on se permet d'écrire :

$$(a*b)*c = a*b*c$$

Exemple : Considérons dans l'ensemble $\mathbb{N}$ des nombres naturels l'opération addition qui compose les nombres deux à deux :

$$(2, 4) \mapsto 6 \text{ que vous écrirez : } 2 + 4 = 6$$

$$(2 + 4) + 5 = 2 + (4 + 5)$$

$$6 \quad + 5 = 2 + \quad 9$$

On peut supprimer la parenthèse et écrire : $2 + 4 + 5 = 11$.

Note : Dans cet exemple c'est le signe + qui est substitué au signe $*$ de la formule générale.

Exercice : Trouvez un contre exemple (opération non associative).

3. Un cas un peu plus compliqué se présente quand, dans la chaîne d'opérations, figurent deux *opérations* différentes.

Exemple : $X \cap (Y \cup Z)$.

Dans cette écriture on réunit d'abord Y et Z puis on intersecte le résultat par X.

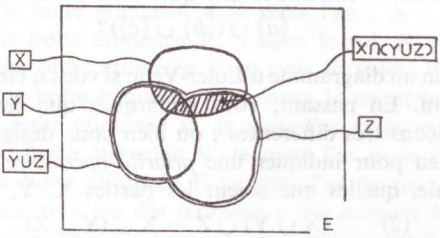


FIG. 71.

Essayons de procéder suivant un autre schéma consistant à intersecter par X les parties Y et Z respectivement avant de réunir les résultats obtenus.

Représentez cette façon de procéder sur un diagramme d'Euler-Venn. Vérifiez que

$$(3) \quad \boxed{X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)} \quad (*)$$

Peut-on supprimer les parenthèses?

On traduit la propriété exprimée par la formule encadrée en disant : « l'opération $\cap$ est *distributive* sur l'opération $\cup$ ». En est-il de même de l'opération $\cup$ sur l'opération $\cap$? Vérifiez que la réponse est oui, soit en dessinant un diagramme, soit en utilisant les cartes perforées.

> De façon générale, deux opérations notées respectivement $*$ et $\perp$ étant définies dans un ensemble F, l'opération $*$ est *distributive* sur l'opération $\perp$ si et seulement si, quels que soient les éléments a, b, c de F :
>
> $$a*(b \perp c) = (a*b) \perp (a*c)$$

(*) Essayons de voir ce qui se cache derrière ces formules. La première expression $X \cap (Y \cup Z)$ signifie : l'ensemble des éléments qui sont dans X *et* dans (Y *ou* Z). La seconde expression

$$(X \cap Y) \cup (X \cap Z)$$

signifie : l'ensemble des éléments qui sont (dans X *et* Y) *ou* (dans X *et* Z). Aidez-vous de la boîte de blocs logiques ou des cartes perforées si vous avez des doutes...

Exemple : Dans l'ensemble $\mathbb{N}$ des naturels, la multiplication est distributive sur l'addition :

$$3 \times (4 + 8) = (3 \times 4) + (3 \times 8)$$

Attention : vous vérifierez facilement que l'addition n'est pas distributive sur la multiplication :

$$3 + (4 \times 8) \neq (3 + 4) \times (3 + 8)$$

1.2. *Propriétés des éléments à l'égard des opérations.*

1. Intéressons-nous maintenant aux éléments.

Dans le simplexe il y en a deux qui retiennent notre attention : l'élément $\varnothing$ (partie vide) et l'élément E (partie pleine).

Quand nous consultons le tableau de composition des éléments de $\mathcal{P}(E)$ suivant l'opération de *réunion*, nous constatons que l'*image de tout couple formé de* $\varnothing$ *et d'un autre élément n'est autre que cet élément lui-même.*

$$\text{Exemple : } (\{a, b\}, \varnothing) \overset{\cup}{\mapsto} \{a, b\} \text{ ou encore } \{a, b\} \cup \varnothing = \{a, b\}$$

Autrement dit, $\varnothing$ ne modifie pas, dans la réunion, l'élément avec lequel il est composé.

Même constatation mais cette fois pour E et l'opération d'*intersection.*

$$\text{Exemple : } \{a,b\} \cap E = \{a, b\}$$

On dit que $\varnothing$ est élément *neutre* pour l'opération de réunion, que E est élément *neutre* pour l'opération d'intersection.

> De façon générale, l'opération $*$ étant définie dans un ensemble F, l'élément e de F est *élément neutre* pour l'opération $*$ si et seulement si, quel que soit l'élément a de F
>
> $$a*e = a$$

2. Arrivé à ce point il est indiqué d'introduire la notion d'*élément complémentaire* dont nous ne sommes pas jusqu'ici servi.

Pour toute partie X de E, pour tout élément X de $\mathcal{P}(E)$, nous pouvons déterminer une partie de E que nous noterons $\overline{X}$, complémentaire de la partie X dans E, et qui est telle que

$$X \cup \overline{X} = E \text{ et } X \cap \overline{X} = \varnothing$$

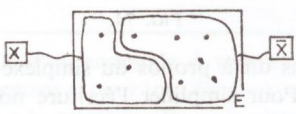


FIG. 72.

Exemple : $E = \{a, b, c\}$; si $X = \{a, b\}$, alors $\overline{X} = \{c\}$

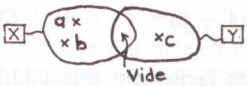


FIG. 73.

Vous vérifiez que le complémentaire de $\overline{X} = \{c\}$ est justement X; ces deux parties *sont complémentaires* dans E (vous remarquez le passage du substantif à l'adjectif, ce dernier justifié par la réciprocité).

3. Les lois de De Morgan (voir fiche 1.4, § 4) précisent, quelles que soient les parties X, Y de E, comment se comportent les opérations $\cup$ et $\cap$ vis-à-vis du passage aux complémentaires:

$$\boxed{\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cap \overline{Y}\,; \quad \overline{X \cap Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}}$$

1.3. *L'ordre dans le simplexe.*

Pour justifier pleinement son titre *d'algèbre du simplexe*, il faut dire un mot de l'ordre que la relation d'inclusion instaure dans l'ensemble $\mathcal{P}(E)$. Sinon, il aurait fallu parler seulement d'algèbre sur l'ensemble des parties d'un ensemble.

Par définition de l'inclusion, si $X \subset Y$, alors tout élément de X est élément de Y.

Exemple :

$$E = \{a, b, c, d, e\}; \quad \{a, c, e\} \subset \{a, b, c, e\}$$

Vous vérifiez : le complémentaire dans E de $\{a, b, c, e\}$ est $\{d\}$ et $\{a, c, e\} \cap \{d\} = \varnothing$.

Plus généralement, quelles que soient les parties X, Y dans E, $\overline{X}$ et $\overline{Y}$ désignant leurs complémentaires respectifs, vous vérifiez qu'il est équivalent d'écrire $X \subset Y$ ou bien $X \cap \overline{Y} = \varnothing$ ou bien $\overline{X} \cup Y = E$.

2. Cas particulier important : algèbre du simplexe défini par un singleton.

Soit $I = \{a\}$ un singleton, ensemble à un seul élément.

L'ensemble des parties de I comprend deux éléments :

la partie vide , $\{\ \} = \varnothing$ $\quad \mathcal{P}(I) = \{\varnothing, I\}$

la partie pleine, $\{a\} = I$

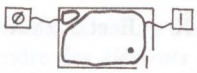


FIG. 74.

Tout ce que nous avons dit à propos du simplexe d'un ensemble de plusieurs éléments demeure valable. Pour simplifier l'écriture nous noterons

$$\varnothing = 0 \quad I = 1$$

1° *Complémentarité*

$$\bar{0} = 1 \quad \bar{1} = 0$$

2° *Lois de composition*

réunion	*intersection*
$0 \cup 0 = 0$	$0 \cap 0 = 0$
$0 \cup 1 = 1$	$0 \cap 1 = 0$
$1 \cup 0 = 1$	$1 \cap 0 = 0$
$1 \cup 1 = 1$	$1 \cap 1 = 1$
élément neutre : 0	élément neutre : 1

3° *Lois de De Morgan.* — Complétez vous-même.

Note : Nous retrouverons tout ceci quand nous parlerons de l'algèbre des circuits électriques (le courant *passe* ou *ne passe pas*).

3. Structures.

1. — La fiche qui se termine ici aura sans doute donné quelque mal au lecteur. Elle est en effet difficile et il est nécessaire d'en bien avoir compris le contenu avant d'aller de l'avant.

Pourquoi est-elle difficile? Sans doute parce que la notion de simplexe est en soi complexe (si l'on veut bien nous permettre ce jeu de mots). Un simplexe, en effet, est un ensemble constitué, comme tous les ensembles, d'éléments mais ces éléments sont composites et sont eux-mêmes des ensembles. Il faut donc, quand on travaille sur eux, être capable de changer fréquemment de points de vue, et voir dans les éléments, tantôt ce qu'ils ont de simple, tantôt ce qu'ils ont de complexe. Cela nécessite une gymnastique pédagogiquement très utile et toujours très enrichissante. Mais au début on risque d'être quelque peu dérouté.

Cette complexité est la marque d'une grande richesse. En effet, dans la mesure où, dans un simplexe, chaque élément à sa propre individualité, il n'est pas interchangeable avec n'importe quel élément. Les divers éléments se trouvent *ordonnés* les uns par rapport aux autres (par la relation d'inclusion). D'autre part ces éléments peuvent être combinés entre eux suivant certaines opérations au sein *d'un système clos* puisque au terme de chaque opération on retrouve un élément qui figure déjà dans l'ensemble. N'est-ce pas en soi très remarquable?

2. — Si l'on considère le simplexe à ce double point de vue : situation des éléments les uns par rapport aux autres et comportement de ses éléments quand ils sont composés entre eux, on découvre en son sein une *structure*, c'est-à-dire une sorte de charpente générale et une sorte de façon de se comporter que l'on retrouve inchangées dans tous les simplexes quels que soient les ensembles de base dont ils sont issus.

Cependant, en titre, nous avons écrit structures d'un ensemble au pluriel. Selon les opérations que nous définissons dans cet ensemble, nous le munissons de telle ou telle structure.

Nous retrouverons plus loin cette notion de structure. Aujourd'hui nous en signalons seulement l'existence.

fiche 1.12.

Exercices et jeux mathématiques

Comme nous le faisons de loin en loin, nous consacrons une fiche à des exercices et des jeux mathématiques destinés soit à mettre en œuvre et à illustrer des notions précédemment acquises, soit à préparer l'acquisition de nouvelles notions.

Nous conseillons vivement au lecteur de ne pas négliger ces « phases de détente » car elles constituent, au sein du processus d'apprentissage, des moments privilégiés pour l'exercice de l'imagination des participants.

Dans le cas présent cet appel à l'imagination se trouve accentué par la façon même dont certains exercices sont formulés : formulation volontairement déroutante, parfois incomplète, à l'image de la façon dont la vie elle-même formule beaucoup des problèmes qu'elle nous pose.

Comme le dit un poète : « C'est à partir de l'irrationnel, du chaos, que la pensée fonctionne..., le propre de la pensée humaine est de démêler et de classer. Elle est gourmande de chevelures bien emmêlées où porter son peigne... ».

Empoignez donc votre peigne et bon courage.

Nota. Nous indiquons pour chaque exercice son degré (approximatif) de difficulté. Vous pouvez les faire dans l'ordre que vous voulez et en les répartissant sur plusieurs séances. Il n'est pas nécessaire d'avoir terminé cette fiche pour aborder les suivantes.

1. ***Espace à 4 dimensions*** (assez difficile).

Considérez le schéma ci-dessous.

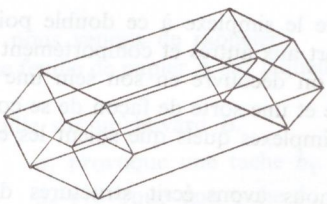


FIG. 75.

Pouvez-vous l'utiliser pour représenter l'ensemble des parties d'un ensemble de 4 éléments classées par la relation d'inclusion (simplexe)? Oui-non. Comment?

2. ***Un jeu de dominos*** (facile).

Le jeu de dominos comporte 28 pièces, que l'on peut ordonner, d'après la *somme* des « yeux » inscrits sur les deux parties de chaque domino, depuis le double zéro jusqu'au double six. Dans cet ensemble de 28 éléments, on considère la relation « ...présente la même somme d'yeux que... » S'agit-il d'une relation d'équivalence? Justifiez votre réponse (positive) et faites l'inventaire des 13 classes ainsi obtenues.

3. ***Un second jeu de dominos*** (facile).

Mêmes données mais en considérant le *produit* des « yeux » inscrits sur les deux parties de chaque domino et en appliquant la relation « ...a même produit que... » Il y a cette fois 19 classes. Combien de ces classes comportent deux pièces? Y en a-t-il qui comportent trois éléments? Quelle est la classe où figure le plus grand produit?

(Avec les jeunes élèves il y a là la possibilité de nombreux jeux mathématiques avec manipulation d'un matériel simple et courant).

4. ***Un jeu de dames*** (facile au début, plus difficile à la fin).

1° On considère quatre cases d'un damier repérées par une lettre comme indiqué sur la figure 76. On dispose 1 jeton dans chaque case. On peut retirer 1, 2, 3, 4 jetons. On désigne la configuration restant par un nom rappelant les cases occupées.

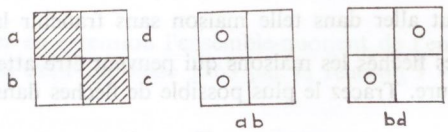


FIG. 76.

Dessinez quelques-unes des configurations possibles et désignez-les en utilisant la notation ci-dessus.

Combien peut-on former de configurations distinctes? L'écriture *aa* a-t-elle un sens? Justifiez votre réponse.

2° On superpose à cette première couche de jetons une deuxième couche de jetons (d'une autre couleur) et l'on note par exemple *aa'* le cas où la case *a* est seule à recevoir des jetons et en reçoit deux.

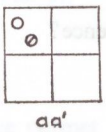


FIG. 77.

On peut ainsi former des configurations comportant 8. 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1 ou zéro jetons.

Désignez à l'aide de la convention d'écriture ci-dessus quelques configurations possibles.

Faites l'inventaire des 28 configurations possibles avec deux jetons (en une ou deux couches).

5. ***Labyrinthe*** (facile), (d'après Dienes, Fiches O.C.D.L. (relations)).

Soit le labyrinthe ci-dessous :

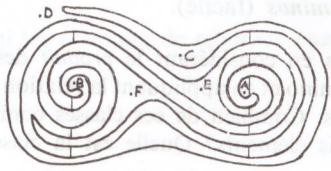


FIG. 78.

Imaginez six maisons A, B, C, D, E et F construites dans ce labyrinthe. Alain, Bernard, Charles, Denise, Étienne et Frédéric habitent respectivement les maisons A, B, C, D, E et F, Les lignes représentent des clôtures qui ne peuvent être ni traversées, ni escaladées, ni franchies en aucune façon.

1° Les six enfants jouent à « trouver la maison de quelqu'un ». Le premier enfant qui découvre toutes les maisons qu'il peut atteindre en partant de la sienne et qui s'assure qu'il faut briser la clôture pour se rendre dans les maisons restantes gagne le jeu.

Trouvez qui peut aller dans telle maison sans franchir la clôture.

2° Reliez par des flèches les maisons qui peuvent être atteintes l'une de l'autre sans traverser la clôture. Tracez le plus possible de flèches dans la figure ci-dessous :

A E F

B D G

FIG. 79.

3° Avez-vous remarqué qu'il vous est toujours possible de trouver votre propre maison sans franchir la clôture? Donc cette relation est...

4° Si une personne peut trouver une certaine maison, est-ce que la propriétaire de celle-ci peut toujours trouver la maison de la première personne? Si c'est toujours possible, cette reslation est...

5° La relation est-elle transitive?

6° Est-ce une relation d'équivalence?

6. ***Modulo*** (facile).

Considérez l'ensemble A des 10 naturels de 3 à 12.

A = {3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12} et la relation

« ... a le même reste que ... dans la division par 3 »

1° Complétez le tableau suivant :

Nombre considéré	Reste dans la division par 3
3	0
4	1
5	2
. . . . .	. . . . .

2° Faites la représentation sagittale et assurez-vous que la relation étudiée est réflexive, symétrique, transitive.

La relation donne naissance aux classes :

$$\text{reste } 0 = \{3,\ 6,\ 9,\ 12\}$$
$$\text{reste } 1 = \{4,\ 7,\ 10\}$$
$$\text{reste } 2 = \{5,\ 8,\ 11\}$$

que l'on appelle « classes des restes modulo 3 ».

On vérifie que ces classes sont disjointes, qu'aucune des classes n'est vide et que

$$(\text{reste } 0) \cup (\text{reste } 1) \cup (\text{reste } 2) = A$$

C'est les conditions pour que l'on ait une *partition de A*.

7. *Arbres généalogiques et liens de parenté* (plus difficile).

On donne le schéma suivant. On sait seulement que *a, b, ... e* désignent des personnes et que *a* est le grand-père de *k*.

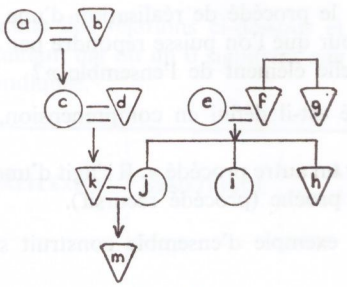


FIG. 80.

1° Trouvez une signification pour les symboles utilisés dans la figure 80 dont certains désignent des caractéristiques des membres d'une population, d'autres des liens de parenté unissant lesdits membres.

2° Quel lien de parenté unit *m* à *h*

e à *g*

e à *d*

8. ***Exercice de codification*** (facile).

Nous avons vu qu'avec deux signes (0, 1) et quatre positions en ligne (ou colonne) on pouvait réaliser 16 configurations distinctes du type ci-dessous

0
1
0
0

1	1	0	1

1° Imaginez un code, c'est-à-dire une correspondance terme à terme, qui fasse correspondre à ces diverses configurations les nombres 0 à 15.

2° Pourriez-vous, avec les *deux seuls* signes 0 et 1, trouver d'autres configurations qui vous permettraient de prolonger la correspondance au delà du nombre 15? Donnez des exemples.

9. ***Jeu d'allumettes*** (facile).

Prenez des allumettes. Disposez-en une sur la table parallèlement à

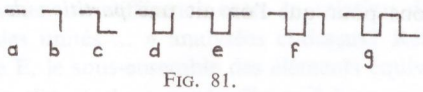


FIG. 81.

l'un de ses bords et appelez *a* cette configuration. Réalisez ensuite les configurations *b*, *c*, *d*, etc... représentées ci-dessus.

1° Ces configurations peuvent-elles être considérées comme éléments d'un ensemble? Oui-non. Justifiez votre réponse.

La réponse est oui : le procédé de réalisation d'une configuration quelconque est suffisamment précis pour que l'on puisse répondre par *oui* ou *non* à la question : « telle configuration est-elle élément de l'ensemble »?

2° L'ensemble trouvé est-il défini en compréhension, en extension ou par un autre procédé?

La réponse est : « par un autre procédé ». Il s'agit d'une définition par un procédé constructif de proche en proche (procédé récursif).

3° Donnez un autre exemple d'ensemble construit suivant un procédé de ce type.

10. ***Rébus*** (assez long, sauf pour les esprits très méthodiques).

1° Cinq maisons alignées de couleurs différentes sont habitées par des hommes de nationalités et de professions diverses, ayant chacun son animal favori et sa boisson préférée.

2° L'Anglais habite la maison rouge.

3° Le chien appartient à l'Espagnol.

4° On boit du café dans la maison verte.

5° L'Ukrainien boit du thé.

6° La maison verte est située à côté de la blanche sur la droite de l'alignement (votre droite).

7° Le sculpteur élève des escargots.

8° Le diplomate habite la maison jaune.

9° On boit du lait dans la maison du milieu.

10° Le Norvégien habite la première maison, à gauche.

11° Le médecin habite la maison voisine de celle où demeure le propriétaire du renard.

12° La maison du diplomate est à côté de celle où il y a un cheval.

13° Le violoniste boit du jus d'orange.

14° Le Japonais est acrobate.

15° Le Norvégien demeure à côté de la maison bleue.

Questions : Qui boit de l'eau et à qui appartient le zèbre?

Réfléchissez à la « *stratégie* » que vous avez adoptée pour résoudre le problème.

11. ***Jeux de mots*** (simple exercice de réflexion).

1° A propos des relations mathématiques nous avons insisté sur la correspondance existant entre la *relation* mathématique unissant deux à deux les éléments d'un ensemble d'une part, et le *verbe* au sein de la phrase, d'autre part.

« Le verbe — lit-on dans Dauzat (*) — est le moteur qui transmet les ordres, qui ordonne la structure, en reliant le sujet aux attributs ou aux compléments ».

Il est instructif d'approfondir un peu ladite correspondance en portant son attention sur les trois *voix* du verbe en français : la voix active, la voix passive et la voix pronominale.

« Pierre frappe le chien »	voix active
« Le chien est frappé par Pierre »	voix passive
« Juliette se regarde »	voix pronominale
« Les enfants se sont querellés »	voix pronominale

Examinez ces phrases à la lumière de ce que vous savez des relations mathématiques. Faites divers rapprochements. Le terme « transitif » a-t-il le même sens en mathématique et en grammaire?

2° A propos de la *significatian* des mots, on n'oubliera pas que les mots ont rarement le même sens pour le maître et pour l'élève comme en témoigne cette anecdote :

« Tu vas chez l'épicier acheter six cents de bonbons, demandait l'expérimentateur

(*) DAUZAT : Grammaire raisonnée de la langue française IAC, Paris, 1952.

à un écolier du Kentucky dont il voulait tester l'aptitude à compter : tu donnes dix cents. Combien doit-on te rendre?

— Je n'ai jamais possédé dix cents, répondit l'écolier, et si je les avais eus je n'aurais pas acheté de bonbons... des bonbons, maman en fait. »

L'expérimentateur essaya de formuler autrement sa question :

« Si dans une école il y a dix élèves, et si, parmi eux, six sont absents parce qu'ils ont la rougeole, combien d'élèves restera-t-il à l'école?

— Aucun, répondit l'enfant, parce que les autres auront peur de la contagion et resteront chez eux. »

Vue d'ensemble à mi-parcours.

Avant d'abandonner le présent *Cahier*, alors que nous sommes arrivés à mi-parcours de la présente série, jetons un coup d'œil récapitulatif sur les matières traitées jusqu'ici, en essayant de dégager les lignes directrices de notre progression.

On peut, semble-t-il, en noter trois.

Il y a d'abord une *progression du simple au complexe*, bien visible quand on passe d'un ensemble fait d'éléments simples à des ensembles constitués d'éléments composites, parties d'ensemble, par exemple, ou couples d'éléments.

Il y a aussi une sorte de *progression du statique vers le dynamique* lorsqu'on passe de la *relation* entre éléments deux à deux d'un même ensemble, essentiellement descriptive d'un certain type de situation, à l'*opération* sur ces éléments, sorte de machine à transformer des couples d'éléments en d'autres éléments. C'est, en somme, la genèse après le constat.

Il y a enfin, intimement liée à ces deux progressions, une *progression de l'amorphe vers le structuré:* entre un ensemble d'objets quelconques tels que ceux que nous envisagions dans le premier *Cahier*, peu fertile en récoltes mathématiques, et le simplexe qui nous a donné du fil à retordre tant il est riche de virtualités mathématiques, il y a une différence du même ordre qu'entre un tas de briques indifférenciées et l'édifice structuré qu'on peut fabriquer avec ces briques...

En résumé, le terrain est maintenant bien préparé pour que nous puissions aborder l'ensemble des nombres naturels qui cache sous ses aspects familiers une étonnante richesse mathématique.

Avant de le faire toutefois, nous procéderons au début du prochain *Cahier* à un détour par les terres passionnantes de la *logique moderne*, et cela parce que la logique est le soubassement commun à tout l'édifice que nous sommes, de fiches en fiches, en train de construire.

Correction d'exercices

Vous êtes invité à prendre connaissance de ces corrections d'exercices avant d'entreprendre les fiches suivantes.

Fiche 1.5.

1, p. 35. Les rues du 8e arrondissement. L'expression :

$$\{x;\ x \in \mathrm{E} \mid p\} = \varnothing$$

se lit : « L'ensemble dont les éléments sont les rues du 8e arrondissement à sens unique est vide », ce qui peut s'écrire :

$$\forall x,\ x \in E,\ \text{non-}p$$

qui se lit : « pour tout élément x de E, pas de sens unique ».

2. p. 37. Correspondance terme à terme :

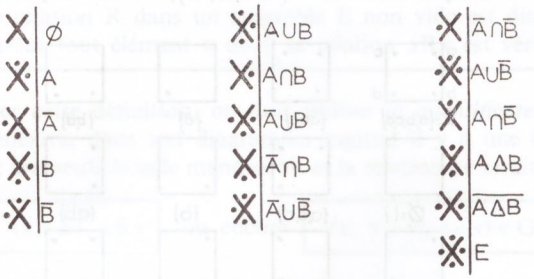


FIG. 82.

Fiche 1.6.

1, p. 41. Liste des parties de E = {1, 4, 9, 7, 5}. On peut écrire ces parties comme suit en utilisant le tiret (—) pour noter l'absence de l'élément correspondant :

1, 4, 9, 7, 5	1, 4, –, 7, 5	1, –, 9, 7, 5	1, –, –, 7, 5
1, 4, 9, 7, –	1, 4, –, 7, –	1, –, 9, 7, –	1, –, –, 7, –
1, 4, 9, –, 5	1, 4, –, –, 5	1, –, 9, –, 5	1, –, –, –, 5
1, 4, 9, –, –	1, 4, –, –, –	1, –, 9, –, –	1, –, –, –, –
–, 4, 9, 7, 5	–, 4, –, 7, 5	–, –, 9, 7, 5	–, –, –, 7, 5
–, 4, 9, 7, –	–, 4, –, 7, –	–, –, 9, 7, –	–, –, –, 7, –
–, 4, 9, –, 5	–, 4, –, –, 5	–, –, 9, –, 5	–, –, –, –, 5
–, 4, 9, –, –	–, 4, –, –, –	–, –, 9, –, –	–, –, –, –, –

Dans la mesure où les différents éléments (ici des chiffres) peuvent être repérés par le rang qu'ils occupent dans l'écriture des diverses parties considérées, les rangs vides étant occupés par des tirets, on peut envisager une notation positionnelle et présenter les résultats sous la forme d'un tableau dont voici l'amorce :

1	4	9	7	5	significations
1	1	1	1	1	{1, 4, 9, 7, 5}
1	1	1	1	0	{1, 4, 9, 7, –}

2, p. 41. Ensembles égaux.

Les deux ensembles notés {1, 4, 9} et {9, 4, 1} sont égaux puisque les éléments de chacun sont éléments de l'autre; ils ont les mêmes éléments.

3, p. 42. « Mots » réalisables avec deux lettres :

a, aa, ab, b, ba, bb

4, p. 32. Jeu de cartes. Avec un jeu de 32 cartes on peut constituer 32 « mains » différentes d'une seule carte : les 32 parties ne comprenant chacune qu'un élément. On peut constituer une seule « main » de 32 cartes : la partie pleine.

Fiche 1.7.

1, p. 43. Liste des parties de E = $\{a, b, c, d\}$, donnée ici par leur représentation figurée :

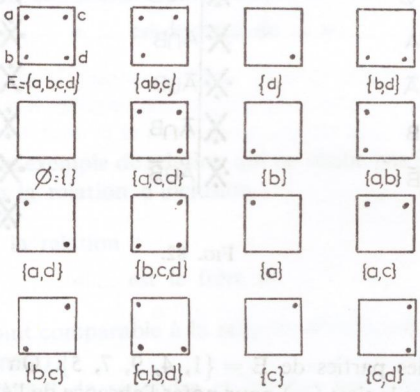


FIG. 83.

4° Les deux représentations suivantes sont à rapprocher :

FIG. 84.

5° $\cap$ dans la 1re ligne, $\cup$ dans la seconde.

6°

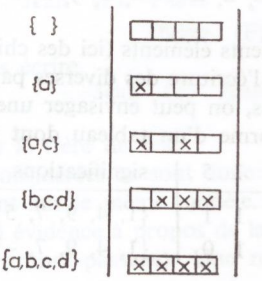


FIG. 85.

Le reste de la liste se complète sans difficulté; en tout seize lignes.

7° $1110 = \overline{1101 \cap 0001}$
$= \overline{0001}$

8°

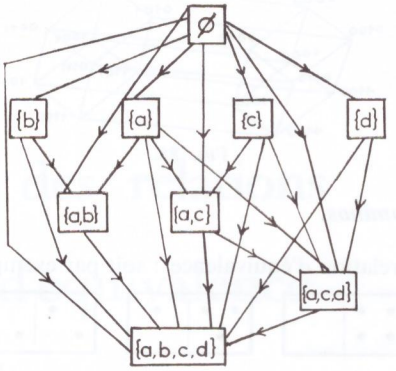


FIG. 86.

9° Toutes les réunions donnent E (par exemple $A \cap B = E$).
Toutes les intersections sont vides (par exemple $F \cap D = \varnothing$).
Aucune partie n'est vide.
Dans tous les cas on a affaire à ce que l'on appelle une *partition* de l'ensemble.
Pour qu'il y ait partition il faut que les sous-ensembles obtenus

— soient *disjoints*,

— qu'aucun sous-ensemble ne soit vide,

— qu'aucun élément ne soit omis.

Il est très fréquent de rencontrer des partitions.

Par exemple, quand on dispose un ensemble de fleurs en plusieurs bouquets on réalise une partition dans cet ensemble : toutes les fleurs sont réparties entre les vases, aucun bouquet ne compte aucune fleur (ce ne serait pas un bouquet), aucune fleur ne figure dans deux vases à la fois.

10° Triangles qu'on peut former à partir de 4 points disposés aux sommets d'un carré.

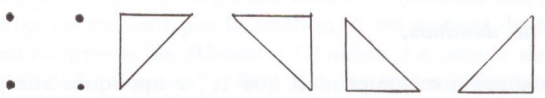


FIG. 87.

Fiche 1.12.

1. ***Espace à 4 dimensions.***

Adoptons la notation « mot standard », par exemple (0 1 1 0) représente la partie $\{b, c\}$ de l'ensemble $\{a, b, c, d\}$.

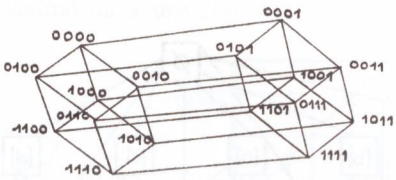
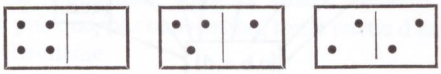


FIG. 88.

2. *Premier jeu de dominos.*

— Il s'agit d'une relation d'équivalence : soit par exemple les 3 dominos *a*, *b*, *c*



dont la somme des yeux est égale à 4.

Soit R la relation « ... à la même somme d'yeux ... »

On vérifie que *a*R*a*, *b*R*b*, *c*R*c* réflexive

*a*R*b*, *b*R*a*, etc... symétrique

*a*R*b*, *b*R*c*, *a*R*c* transitive

— Inventaire des classes d'équivalence

{(0, 0)}	somme zéro	{(0, 6), (1, 5), (2, 4), (3, 3)}	somme six
{(0, 1)}	somme un	{(1, 6), (2, 5), (3, 4)}	somme sept
{(0, 2), (1, 1)}	somme deux	{(2, 6), (3, 5), (4, 4)}	somme huit
{(0, 3), (1, 2)}	somme trois	{(3, 6), (4, 5)}	somme neuf
{(0, 4), (1, 3), (2, 2)}	somme quatre	{(4, 6), (5, 5)}	somme dix
{(0, 5), (1, 4), (2, 3)}	somme cinq	{(5, 6)}	somme onze
		{(6, 6)}	somme douze

Nota. Cet exercice constitue une bonne introduction aux « carrés magiques ». Si vous ne savez pas ce qu'est un « carré magique » renseignez-vous. Nous y reviendrons sans doute plus tard.

3. *Second jeu de dominos.*

La relation « ... a même produit que ... » appliquée aux produits des yeux inscrits dans les deux cases d'un même domino partage l'ensemble des produits en 19 classes :

produit égal à 0 : 0 × 0, 0 × 1, 0 × 2, 0 × 3, 0 × 4, 0 × 5, 0 × 6

égal à 1 : 1 × 1	égal à 2 : 1 × 2	égal à 3 : 1 × 3 –
à 4 : 1 × 4 et 2 × 2	à 5 : 1 × 5	à 6 : 1 × 6 et 2 × 3
à 8 : 2 × 4	à 9 : 3 × 3	à 10 : 2 × 5
à 12 : 2 × 6 et 3 × 4	à 15 : 3 × 5	à 16 : 4 × 4
à 18 : 3 × 6	à 20 : 4 × 5	à 24 : 4 × 6
à 25 : 5 × 5	à 30 : 5 × 6	à 36 : 6 × 6

Trois classes sont formées de 2 dominos. Aucune classe ne compte trois éléments. La classe 6 × 6 est formée de l'élément dont les facteurs sont les plus grands possibles et dont le produit est le plus grand.

4. *Un jeu de dames.*

1°

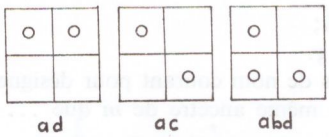


FIG. 89.

On peut former 16 configurations distinctes. C'est, sous une autre forme, le problème des parties d'un ensemble de 4 éléments.

L'écriture *aa* n'a pas de sens : chaque lettre désigne une case : *aa* revient à désigner deux fois la même case.

2° *abcd'c'd'* : configuration comportant 6 jetons.

On a 28 configurations possibles avec deux jetons.

ab	*ac*	*ad*	*aa'*	*ab'*	*ac'*	*ad'*
	bc	*bd*	*ba'*	*bb'*	*bc'*	*bd'*
		cd	*ca'*	*cb'*	*cc'*	*cd'*
			da'	*db'*	*dc'*	*dd'*
				a'b'	*a'c'*	*a'd'*
					b'c'	*b'd'*
						c'd'

5. *Labyrinthe.*

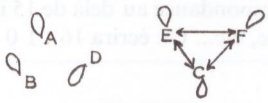


FIG. 90.

La relation est *réflexive*, *symétrique*, *transitive*. C'est une *relation d'équivalence*. Elle définit une *partition* de l'ensemble des maisons en quatre classes d'équivalence.

6. *Modulo.*

1° 6 reste 0, 7 reste 1, 8 reste 2,
9 reste 0, 10 reste 1, 11 reste 2,
12 reste 0.

2° Représentation sagittale.

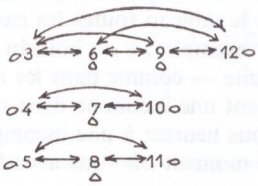


FIG. 91.

7. ***1° Signification des symboles de parenté.***

○ personne du sexe masculin; ▽ personne du sexe féminin;
= « ... est l'époux (ou l'épouse) de ... » (alliance);
⊓ « ... est le frère ou la sœur de ... » (collatéralité);
↓ « ... a pour enfant ... » (filiation).

2° *m* est la nièce de *h*;
e est le beau-frère de *g*.

Il n'y a pas en français de nom courant pour désigner la relation liant *e* à *d* : on pourrait dire « ... est même ancêtre de *m* que ... ».

9. ***Codification.***

1° Correspondance terme à terme entre deux notations des nombres :

NUMÉRATION USUELLE	NUMÉRATION A DEUX SIGNES	NUMÉRATION USUELLE	NUMÉRATION A DEUX SIGNES
0	0 0 0 0	09	1 0 0 1
1	0 0 0 1	10	1 0 1 0
2	0 0 1 0	11	1 0 1 1
3	0 0 1 1	12	1 1 0 0
4	0 1 0 0	13	1 1 0 1
5	0 1 0 1	14	1 1 1 0
6	0 1 1 0	15	1 1 1 1
7	0 1 1 1		
8	1 0 0 0		

2° Pour prolonger la correspondance au delà de 15 il faut faire appel à une cinquième position, puis à une sixième, etc... On écrira 16 : 1 0 0 0 0, 17 : 1 0 0 0 1, etc...

10. ***Rébus.***

maisons	jaune	bleue	rouge	blanche	verte
boissons....	EAU	thé	lait	jus orange	café
nations.....	norvégien	ukrainien	anglais	espagnol	japonais
professions .	diplomate	médecin	sculpteur	violoniste	acrobate
animaux ...	renard	cheval	escargot	chien	ZÈBRE

Stratégie recommandée : Notez systématiquement toute l'information donnée par l'énoncé; remplissez dans le tableau toutes les cases qui peuvent l'être de façon certaine, soit directement (par exemple : « on boit du lait dans la maison du milieu), soit par déduction; faites ensuite — comme dans les mots croisés — une hypothèse, c'est-à-dire placez arbitrairement une inconnue dans une case disponible et déduisez ce qui en découle : si vous vous heurtez à une incompatibilité vous reprenez le problème au point où il était au moment où vous avez fait cette hypothèse et vous en essayez une autre.

Printed in France *Le Directeur de la publication : :* G. WALUSINSKI

FD - Imp. Alençonnaise, B. P. 57, 61-Alençon - Dépôt légal 1969 : 8.556 - C.P.P.P. 35.996