de pédagogie mathématique

cahiers pour la formation permanente

Série 1. Initiation à la mathématique de base

1.17.	JMÉRATION	ENU	SYSTÈMES D	
1.18.	NATURELS	DES	L'ADDITION	
1.19.	NATURELS	DES	MULTIPLICATION	LA
1.20	NATURELS	DES	L'ENSEMBLE	

avril 1969 Régionale Parisienne de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

Numération et ensemble numérique

En même temps que l'enfant découvre le nombre en tant que tel, c'est-à-dire en tant qu'« être mathématique », indissolublement cardinal et ordinal, il se trouve en mesure de construire l'ensemble numérique ordonné :

$$IN = \{0, 1, 2, ..., n, ...\}$$

et de procéder sur cet ensemble à des compositions de termes deux à deux qui sont la transposition au niveau des naturels des compositions que nous avons précédemment étudiées entre parties d'un ensemble fini prises deux par deux.

C'est de ces compositions, plus connues sous le nom d'opérations arithmétiques, que nous allons principalement parler dans le présent *Cahier*. Toutefois, avant de le faire, nous allons examiner comment sont représentés et comment sont nommés les naturels dans différents systèmes de numération.

Nos étapes seront donc les suivantes :

Fiche 1.17 : Systèmes de numération. Numération en différentes bases.

Fiche 1.18: Opération sur les naturels : l'addition. Il s'agit là d'un sujet familier. Toutefois, pour certains, la façon de l'aborder sera peut-être nouvelle. Et nous insisterons sur les aspects pédagogiques du sujet.

Fiche 1.19: Opération sur les naturels : multiplication. La question sera traitée dans le même esprit que l'addition.

Fiche 1.20: Structure de l'ensemble des naturels. Concept d'isomorphisme. Autres ensembles numériques. Il s'agit cette fois d'une fiche de réflexion qui cherche à donner une vue générale des ensembles numériques en général et de leur structure. Elle est complétée par des exercices variés portant sur les divers sujets abordés dans le Cahier.

Vous trouverez aussi:

- page 179, un index de symboles relatifs aux ensembles numériques;
- page 180, le rappel de quelques ouvrages édités ou qui vont l'être par l'A.P.M.E.P., l'annonce de quelques projets ou projets de projets qui deviendront des réalités si certains d'entre vous s'y intéressent.

Systèmes de numération

Numération en différentes bases

D'où vient l'écriture des nombres ?

Dans l'ancienn	e Égypte,	les	habitants	utilisaient
----------------	-----------	-----	-----------	-------------

- | pour représenter « un »
- opour représenter « dix »
- 9 pour représenter « cent »

000 999

- Lisez le nombre représenté comme suit || ∩∩∩ 999
- Traduisez à l'intention des anciens Égyptiens les nombres suivants : sept, treize, vingt-huit, deux cent un
- Avez-vous utilisé un signe correspondant à notre zéro? (La réponse est « non », évidemment.)
- L'ordre dans lequel on place les divers signes dans la notation égyptienne a-t-il une importance ?

(La réponse est également « non », alors que dans le système de numération que nous utilisons cet ordre a une importance capitale. Notre système de numération, à la différence du système que nous venons de voir, est un système où la position des signes (les chiffres) joue un rôle. Notre système est « positionnel ».)

Un jeu d'échanges.

Procurez-vous une vingtaine d'allumettes, une dizaine de pièces de monnaie de même valeur, quelques boîtes d'allumettes vides dont vous ne conservez que le bac. Vous décidez que vous pouvez échanger :

- 3 allumettes contre une hofte d'allumettes
- 3 pièces contre une boîte d'allumettes valent □

Quelques allumettes étant disposées sur la table, on vous demande de leur substituer par échange avec des pièces et des boîtes un ensemble d'allumettes, de pièces et de boîtes comportant le moins grand nombre d'éléments possible. L'ensemble obtenu sera appelé réduction de l'ensemble donné.

Par exemple (lisez de la droite vers la gauche):

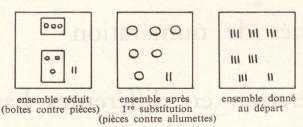
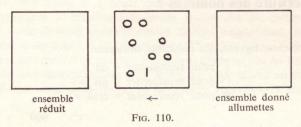


Fig. 109.

Exercice 17.1. — Complétez le schéma de réduction suivant :



L'écriture (, o, |) peut être considérée comme une façon d'exprimer le nombre d'allumettes se trouvant dans l'ensemble donné, c'est-à-dire le cardinal dudit ensemble.

Exercice 17.2. — Soit deux ensembles A et B disjoints comportant respectivement 7 et 10 allumettes. Effectuez la réduction de chacun d'eux et la réduction de leur réunion.

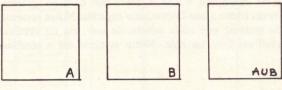


Fig. 111.

Si l'on exprime les cardinaux suivant l'écriture précédemment indiquée on pourra écrire :

$$\frac{0}{7} + \frac{1}{10} = \frac{0}{17}$$
Fig. 112.

Suivant une méthode déjà utilisée, on peut convenir d'affecter une position à chaque catégorie d'éléments (boîtes, pièces, allumettes) dans une écriture normalisée.

Décidons de ne pas mettre de croix, une croix ou deux croix dans la colonne correspondante suivant qu'elle compte 0, 1 ou 2 éléments de l'espèce considérée. Avec ces conventions 7, 10 et 17 se représentent comme indiqué ci-dessous.

	regroupement d mités), « regroup e de trois « regro	rang 2	rang 1	rang 0
A	111111	ACTIONS	++	+
В		+	N EU	g(+)
C		+01	+ + + + + + + + + + + + + + + + + + + +	++++

Exercice 17.3. — Ces conventions étant supposées adoptées, complétez la colonne vide du tableau ci-dessous.

Que remarquez-vous ? (Songez au procédé de la retenue).

an de	and made		0	
			b +obs	
			1+	
A + B	TOGUE S	+	+	BES Jah

Principe de la notation positionnelle

La méthode de la réduction nous a montré la voie. Elle permet de partager un ensemble comptant de nombreux éléments en sous-ensembles dont on sait exprimer le cardinal dans le système de numération retenu.

Ainsi dans le jeu d'échanges précédent (fig. 109), les vingt allumettes à dénombrer se sont trouvé représentées à la fin de la réduction comme suit :

- « deux » boîtes valant chacune « trois » pièces,
- « zéro » pièce.
- « deux » allumettes.

On vérifie que pour dénombrer les boîtes, les pièces ou les allumettes restant après réduction il suffit de « savoir compter » jusqu'à trois. On remarque que pour passer d'une catégorie à la catégorie supérieure on utilise toujours la même règle de « cardinalité » : une « pièce » vaut *trois* allumettes, une « boîte » vaut *trois* pièces.

Si l'on avait continué, il eût été naturel de prolonger cette façon de faire. La catégorie suivante, la « valise » par exemple, aurait valu *trois* boîtes, la « malle » aurait valu *trois* « valises », etc.

On appelle *base* le nombre retenu pour opérer les regroupements successifs. Dans le cas présent la base du système de numération est *trois*.

Pour faciliter la généralisation de l'exemple ci-dessus, abandonnons les « pièces » et les « boîtes » et convenons d'appeler « regroupement de rang un », le premier regroupement effectué (ensemble de trois unités), « regroupement de rang deux », le deuxième regroupement effectué (ensemble de trois « regroupements de rang un »). Le nombre vingt — cardinal de l'ensemble de vingt allumettes — s'exprime alors en base trois comme suit :

deux « regroupements de rang deux », zéro « regroupement de rang un », deux unités.

On remarque qu'on peut, par souci d'unification de la terminologie, appeler l'unité : « regroupement de rang zéro ».

On peut donc transcrire le nombre vingt comme suit :

rang deux rang un rang zéro deux zéro deux

Si j'utilise les chiffres 0, 1, 2 pour les naturels inférieurs à la base, j'écris : 2 0 2 pour le naturel vingt. Cette écriture doit se lire : « deux, zéro, deux » et non « deux cent deux ».

Remarque. — En numération de position, l'ordre des naturels apparaît immédiatement. En base trois, 202 < 1212 puisque ce dernier nécessite un « regroupement » de rang trois; de deux naturels, celui qui est écrit avec le plus de chiffres est le plus grand. De même 202 < 212; ici il y a 2 « regroupements » de rang deux dans chacun des naturels; mais au rang un, la supériorité du second sur le premier apparaît.

Numération binaire

En possession de la méthode générale qui vient d'être utilisée, on est conduit à envisager le mode de regroupements successifs le plus simple qui soit : le mode de regroupement « par deux ».

Chaque fois qu'on aura *deux* unités on les regroupera en une « paire » (songez à la paire du Poker), quand on aura *deux* paires on les regroupera en une « double-paire », quand on aura *deux* « doubles-paires » on les regroupera en une « double-double-paire », c'est-à-dire en une « huitaine », etc. Ainsi, quand on fera une réduction d'un nombre quelconque d'unités sur cette base, on aura au plus *un* regroupement de chaque rang, parfois *zéro*. Par exemple il n'y aura pas d'unité laissée seule si le cardinal de l'ensemble à réduire est pair.

Il suffira donc de deux signes pour transcrire un naturel en binaire, par exemple 0 et 1, ou + et -, ou haut et bas, ou (sur une carte perforée) fente et pas fente...

Les machines électroniques pourront « lire » de telles cartes : le courant passe quand il y a fente par exemple, il ne passe pas quand il n'y a pas fente.

Exercice 17.4. — On donne l'ensemble de points :

Faites-en la réduction en base deux. Complétez le tableau ci-dessous :

nombre d'unité:

nombre de « paire »:

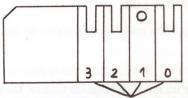
nombre de « double-paire » :

nombre de « huitaine » :

Transcrivez ce résultat en utilisant le signe 1 pour « un » et le signe 0 pour « zéro ».

(La réponse est 1 1 0 1).

Exercice 17.5. — On donne la carte perforée ci-dessous. Indiquez quel nombre elle représente en numération binaire (base deux) puis en numération décimale (base dix)*.



rangs successifs des regroupements

Fig. 113.

Remarque: — Les rangs successifs vont de la droite vers la gauche, ce qui choque parfois les enfants. On aurait pu adopter l'ordre inverse, en mettant les unités à gauche. Peut-être cette coutume vient-elle des Arabes (réflexion d'un participant du Chantier) (**).

Transcription des premiers naturels en base deux.

Nous utilisons comme signe

0 pour « pas de regroupement de rang considéré »

1 pour « un regroupement du rang considéré »

Nous avons:

ensemble vide : card $\{ \} = 0$ singleton : card $\{ + \} = 1$

paire : card $\{++\}=10$ (lire « un, zéro »)

(un regroupement de rang un, zéro unité)

^(*) A la manière des cabbalistes et chez quelques auteurs, on pourrait dire : numération dénaire.

^{(**) (}N.D.L.R.) Cela est douteux puisque la numération de position utilisée par les Babyloniens ou celle utilisée par les Grecs de l'Antiquité respectaient le même ordre d'écriture.

triplet : card $\{+++\}=11$ (lire « un, un »)

(un regroupement de rang un, une unité).

Le lecteur verra sans peine que pour le nombre huit, par exemple, nous aurons la transcription

1000

signifiant : « un regroupement de rang trois, zéro regroupement de rang deux, zéro regroupement de rang un, zéro regroupement de rang zéro. ou encore : « une huitaine, zéro double-paire, zéro paire, zéro unité ».

Exercice 17.6. — Transcrivez sur une feuille volante que vous conserverez sous la main les nombres de 0 à trente-deux en base deux.

Examinez la liste obtenue et faites à son sujet le maximum de remarques. Soit le naturel *treize*; écrivez-le en numération décimale; puis en base deux; représentez-le sur un dessin de carte perforée.

Comment pouvez-vous extraire d'un paquet de cartes perforées du type ci-dessus toutes les cartes correspondant à des nombres impairs ? Même question pour les nombres divisibles par huit.

Autre notation.

Nous venons de voir un mode de notation binaire. On en utilise un autre faisant appel aux puissances de la base. Posons deux = b.

On sait que

b peut s'écrire b^1 (lire « deux puissance un »)

 $b \times (b^1)$ peut s'écrire b^2 (lire « deux puissance deux »)

 $b \times (b^2)$ peut s'écrire b^3

 $b \times b \times \ldots \times b$ peut s'écrire b^n (lire « deux puissance n ») (n facteurs deux).

On fait en outre la convention d'écriture (dont on vérifie par la suite qu'elle est légitime)

 $b^0 = 1$ (lire « deux puissance zéro »)

Or, suivant le processus de réduction précédemment indiqué, tout nombre naturel peut s'exprimer sous forme d'une somme de puissances de deux.

Par exemple: 13 = 8 + 4 + 1 $13 = b^3 + b^2 + b^0$

et vous remarquez que les *exposants* des divers regroupements ne sont autres que les *rangs* de ces regroupements de la droite vers la gauche dans l'ordre croissant.

Exemple. Nous transcrivons dans le système décimal le nombre écrit en base deux : 1 1 0 1

Nous trouvons:

$$1.b^3 + 1.b^2 + 0.b^1 + 1.b^0$$

 $1 \times 8 + 1 \times 4 + 0 + 1 = 13$

Compteur binaire (*).

Il est intéressant d'examiner comment pourrait être constitué un compte-tours exprimant ses résultats en binaire.

Vous connaissez les compte-tours (du genre compteur d'eau) décimaux. Ils comportent un voyant disposant de cases où viennent s'inscrire de la droite vers la gauche les unités, les dizaines, les centaines, etc...

Il en sera de même avec le compte-tours binaire, mais, dans chaque case seuls s'inscriront des 0 ou des 1.

Dans la case des unités (de rang 0), au fur et à mesure que défilent les nombres apparaissent successivement des 0 et des 1. Mais le passage de 0 à 1 ne se répercute pas sur les cases de rang 1, 2, 3 (à gauche de la case des unités) de la même façon que lorsqu'on passe de 1 à 0.

Le passage de 0 à 1 n'entraîne aucun changement à gauche. Si le nombre inscrit était 10 010, il deviendra 10 011, le chiffre des unités passant de 0 à 1, les chiffres des rangs supérieurs restant inchangés.

Au contraire le passage de 1 à 0 entraîne un changement dans la case de rang 1. Si celle-ci était occupée par 0, elle passe à 1 ; si elle était occupée par un 1, elle passe à 0, mais cela entraîne alors — vous avez reconnu le principe de la *retenue* — le changement du chiffre inscrit dans la case de rang 2.

Ainsi si on ajoute 1 à 10 011, on obtient 10 100.

La « vague » déclenchée de proche en proche par le premier passage de 1 à 0 ne s'arrête que lorsqu'on arrive à une case contenant un 0.

Un tel dispositif — qui s'apparente à une machine — peut facilement être réalisé avec des élèves placés côte à côte comme l'indique la figure et qui lèvent ou ne lèvent pas leur bras gauche. Si l'élève de rang n lève le bras, cela signifie 1 dans la case correspondante. S'il ne le lève pas, cela signifie zéro.

Le disposition ci-dessous se lit 0011.

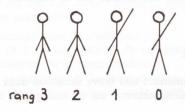


Fig. 114.

L'élève de rang 0 change la position de son bras. chaque fois que le maître émet un signal approprié. Les autres élèves ne changent la position de leur bras que lorsque leur voisin de gauche abaisse le sien.

Vérifiez que l'on obtient ainsi le résultat désiré.

Pour augmenter l'intérêt on peut munir les élèves d'un carton sur lequel est inscrit le nombre de tours qu'il comptabilise quand il a le bras levé (pour l'élève de rang 1 ce nombre est égal à $b^1 = 2$, pour l'élève de rang 2 à $b^2 = 4$, etc..).

^(*) D'après Engelbart repris par Fletcher p. 20 et suivantes de « L'apprentissage de la mathématique aujourd'hui », O.C.D.L.

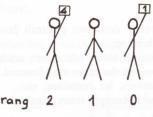


Fig. 115.

Quand un nombre est inscrit en binaire sur le dispositif, il suffit d'additionner les nombres inscrits (en décimal) sur les cartons levés pour connaître ce nombre.

Les bricoleurs pourront réaliser une telle machine en accouplant des engrenages comptant de proche en proche un nombre double de dents.

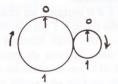


Fig. 116.

Dans cette machine, un demi-tour fait passer l'index de la roue unité (rang 0 à droite) de la position « 0 » (en haut) à la position « 1 » (en bas) ; dans le même temps la roue adjacente à gauche parcourt un quart de tour et son index n'arrive en position « bas » ou « 1 » que lorsque la roue unité a parcouru un tour entier, l'index de celle-ci revenant en position « 0 ». Vous vérifiez que ce dispositif s'apparente au dispositif humain décrit ci-dessus.

Extension aux fractions.

Permettons-nous maintenant une brève incursion dans le domaine de certaines fractions, celles dont le dénominateur est un multiple de deux (partages successifs en deux parties égales).

Il nous suffit pour cela de prolonger la suite des puissances de b (b = deux) par divisions successives. En passant, cela justifie la convention b^0 = 1 (puisque b/b = 1). Ensuite viennent les exposants négatifs, les rangs négatifs : $\frac{1}{b} = b^{-1}$ occupe le rang moins un, $\frac{1}{b^2} = b^{-2}$ occupe le rang moins deux.

...
$$b^4$$
 b^3 b^2 b 1 b^{-1} b^{-2} b^{-3} b^{-4} ... valeum ... 4 3 2 1 0 -1 -2 -3 -4 ... rang

Par analogie avec ce que nous avons vu plus haut (principe de la numération de position), et en étendant aux rangs négatifs ce qui était fait pour les rangs positifs, il apparaît naturel d'établir la correspondance suivante :

en numération	décimale	1/b	$1/b^2$	$1/b^{3}$	$1/b^4$	
en numération	binaire	0,1	0,01	0,001	0,0001	

la virgule étant placée entre le chiffre de rang zéro (unité) et le chiffre de rang moins un (*).

Faites le rapprochement entre l'exposant et le rang utilisé dans l'écriture binaire. On retrouve tout cela quand on aborde les *logarithmes*.

Exercices

- 17.7. En musique : une ronde (o) vaut deux blanches ; une blanche vaut deux noires ; une noire vaut deux croches.

 Écrivez le nombre neuf en utilisant les signes convenables, la croche étant supposée désigner l'unité.
- 17.8. Quel est le plus grand nombre que l'on puisse écrire en binaire avec six chiffres ? L'exprimer en numération décimale.
- 17.9. Combien faut-il de chiffres pour écrire en binaire le nombre qui est écrit 512 en numération décimale?
- 17.10. En vous inspirant de ce qui a été fait pour la base deux, écrivez en base trois les dix premiers naturels à l'aide des chiffres 0, 1, 2.
- 17.11. Dans ce système de base trois, on vous donne le « nombre à virgule » 0,1. A quoi correspond-il dans le système décimal?
- 17.12. Écrire en base douze les vingt-quatre premiers naturels à l'aide des chiffres 0, 1, 2, ...9 et des signes α pour dix et β pour onze.

Si vous savez écrire *vingt* en numération décimale et en numération binaire, alors vous n'oublierez pas qu'en remplissant le *bulletin de souscription* (feuille jaune insérée dans le *cahier 4*) vous aiderez à l'édition du dictionnaire.

la mathématique parlée par ceux qui l'enseignent

et vous profiterez de cet ouvrage écrit par ceux qui enseignent pour ceux qui en font autant.

^(*) Dans les pays anglo-saxons, on utilise le point à la place de la virgule.

L'addition des naturels

Nous revenons à l'ensemble des nombres naturels sous la forme qui nous est familière : la notation et la dénomination en base dix. Nous ferons toutefois appel en diverses occasions à d'autres systèmes de numération.

1. Opérations sur les parties d'un ensemble et sur leurs cardinaux.

Les compositions opératoires sur les nombres naturels apparaissent au troisième stade de la « construction du nombre » décrit par Piaget, stade dont nous avons rappelé les principales caractéristiques dans une précédente fiche.

Partant d'un ensemble E de dix jetons (card E=10), les enfants de cet âge (en général après 6 ans) savent partager cet ensemble en un ensemble A comportant 6 jetons, bleus par exemple, (card A=6) et un ensemble \overline{A} (A barre) comportant le reste des jetons (non bleus), le complémentaire de A, de cardinal 4.

Quand on leur demande de réunir A et \overline{A} (qui par construction sont *disjoints*), ils savent qu'ils vont retrouver l'ensemble de référence avec son cardinal (conservation des quantités)*.

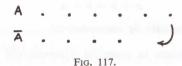
Prenant la même collection d'objets, nous leur demandons maintenant de la partager en deux parties « égales » (de même cardinal). Ils savent le faire ; au besoin en tâtonnant un peu, et ils obtiennent deux nouvelles parties P et \overline{P} , dont les cardinaux sont égaux entre eux (5 et 5) et différents des cardinaux des parties \overline{A} et \overline{A} de tout à l'heure. Ils savent que s'ils réunissent les 6 jetons bleus aux 4 jetons non bleus, ils obtiennent le même ensemble qu'en réunissant les deux collections \overline{P} et \overline{P} .

Ainsi, à l'opération de réunion de deux sous-ensembles disjoints ils font correspondre l'opération additive des cardinaux de ces sous-ensembles. De même qu'on utilise un signe distinctif pour noter l'opération de réunion, il faut un signe pour noter l'opération additive des cardinaux, c'est le signe + qui se lit « plus ».

Ce qui vient d'être dit peut, avec ces notations, s'écrire :

^(*) De même, ils reconnaissent la relation d'inclusion $A\subseteq E$ et la relation d'ordre sur les cardinaux : card $A\le c$ ard E.

A ce stade, quand on demande à l'enfant ce qu'il doit faire pour « égaliser » les deux ensembles A et \overline{A} de cardinaux respectifs 6 et 4, il indique qu'il faut transférer un jeton de l'ensemble A vers l'ensemble \overline{A} de façon à pouvoir réaliser la correspondance terme à terme, gage de l'égalisation des cardinaux.



Ceci implique que l'enfant :

- perçoit que card $A > \text{card } \overline{A}$;
- se rend compte qu'il y a en A un « surplus » de jetons de deux unités :

card
$$(A \setminus \overline{A}) = 2$$

et qu'il faut diviser cette différence en deux pour pouvoir la répartir également entre A et \overline{A} .

Tout ceci se synthétise dans le jeu d'opérations suivant :

$$6 - 4 = 2$$
 (la différence entre 6 et 4 est 2)
 $6 - 1 = 4 + 1$

Dans cette notation le signe (—) indique qu'on retranche : il connote au niveau des cardinaux l'opération différence opérée sur les ensembles correspondants.

Si nous rappelons ici quelques-unes des conclusions des études de Piaget, c'est qu'il nous paraît important de marquer que la maîtrise du maniement de l'ensemble numérique exige l'acquisition d'opérations quasi-simultanées de mises en correspondance terme à terme, de comparaisons, de partitions et d'équipartitions, de sommations et de différences, ensemble d'opérations dont l'enfant découvre le maniement en même temps qu'il apprend à construire la notion de nombre sous son double aspect cardinal et ordinal.

Sur le plan pédagogique, ces constatations entraînent deux conséquences.

En premier lieu, le travail préliminaire qu'il est donné aux enfants de faire dans les toutes premières années d'école en matière de rangement, de classement, de mise en correspondance, etc, joue un rôle essentiel dans la préparation du « terrain » pour les acquisitions sur les nombres.

En second lieu, il faut éviter les cloisonnements trop rigides entre, par exemple, l'addition et la soustraction. Plutôt que de se conformer strictement aux programmes, il convient de suivre l'enfant dans sa démarche de découverte et de construction où peuvent se mêler addition, soustraction, partition.

2. Propriétés de l'addition

Ayant à l'esprit les propriétés des opérations effectuées sur des ensembles, on retrouve facilement les propriétés des opérations effectuées sur les cardinaux de ces mêmes ensembles.

Voici, à titre d'exemple, comment on peut raisonner.

1º Soit les ensembles A et B disjoints de cardinaux respectifs a et b

card
$$(A \cup B) = \text{card } A + \text{card } B$$

card $(B \cup A) = \text{card } B + \text{card } A$;

puisque

$$A \cup B = B \cup A$$
$$a + b = b + a$$

C'est la propriété fondamentale de commutativité.

2º On retrouve de même la propriété d'associativité en partant de

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

Si on suppose A, B et C deux à deux disjoints, on peut écrire :

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

Il y aura avantage à faire « découvrir » ces propriétés aux enfants à l'aide de manipulations très diverses, par exemple avec des jetons (ou les traditionnels haricots) regroupés dans des boîtes ou des gobelets, en utilisant des représentations figurées comme celle du genre ci-dessous, en faisant manipuler des réglettes du genre du matériel Cuisenaire (« les nombres en couleurs ») avec lesquelles le schéma est aussitôt réalisé, ou bien encore grâce à des jeux sur un escalier (monter de deux marches puis de trois marches est-ce que cela permet d'accéder au même niveau que monter d'abord trois marches puis deux ?), etc...

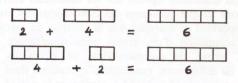


Fig. 118.

On peut remarquer que ces propriétés ont été implicitement utilisées quand il a été question des systèmes de numération positionnelle. Ainsi, le cardinal de l'ensemble $\{a, b, c, d, e\}$ s'écrit 12 en base trois et 101 en base deux parce que, dans le premier cas on réduit l'ensemble comme suit $\{a, b, c\} \cup \{d, e\}$ et dans le second cas comme suit $\{a, b, c, d\} \cup \{e\}$. Autrement dit (en utilisant la numération décimale):

$$3+2=4+1$$
.

Remarquons en passant que le recours, pour l'écriture des naturels, à différentes bases aura comme avantage, entre beaucoup d'autres, de familiariser les enfants avec les propriétés des naturels et de l'addition : de les familiariser avec ces propriétés en profondeur puisqu'ils constateront ce qu'elles impliquent au-delà de ce qui n'est que leur traduction écrite.

A propos de l'associativité de l'addition, puisque :

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

on écrira, en supprimant les parenthèses :

$$(a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c$$

Et c'est justement parce qu'il y a l'associativité et seulement à cause d'elle qu'on pourra utiliser la notation simplifiée dépourvue de parenthèses.

3º Désignons toujours le cardinal de A par a le cardinal de B par b

et employons le symbole ≤ pour signifier « ...inférieur ou égal à ... » ; vous constaterez sans peine, en vous reportant aux ensembles, que

 $A \subseteq A \cup B$, donc $a \le a + b$; $B \subseteq A \cup B$, donc $b \le a + b$.

O O B O O AUB

Fig. 119.

Question: si a = a + b, que dire de b?

La réponse est évidemment b=0 (correspondant à $B=\varnothing$). $A=A\cup\varnothing$, quel que soit l'ensemble A; a=a+0 quel que soit le naturel a.

Zéro, noté 0, est neutre pour l'addition des naturels.

 4° La réunion à l'ensemble A d'un singleton non inclus dans A conduit au résultat : quel que soit le naturel a, a+1= le naturel qui suit a. C'est la propriété des naturels qui sera utilisée dans la construction axiomatique des naturels connue sous le nom d'axiomatique de Peano (du nom du mathématicien italien qui la formula à Turin en 1899).

5° Si deux ensembles A et B vérifient la relation d'inclusion $A \subseteq B$, vous savez déjà écrire card $A \le \text{card } B$.

Réunissez alors (au moins par la pensée) un même troisième ensemble C (tel que A et C sont disjoints, tel que B et C sont disjoints). Vous vérifiez encore $A \cup B \subseteq B \cup C$ et par conséquent card A + card $C \leqslant card$ B + card C.

Autrement dit, quel que soit le naturel c, si $a \le b$, alors $a + c \le b + c$: la relation d'ordre \le dans $I\!N$ est compatible avec l'addition.

6º L'opération de soustraction est implicitement présente dans l'opération d'addition. Dans les manipulations citées plus haut, il est aisé de considérer chacune des situations d'un point de vue qui pourra être dit « inverse ». Exemple, avec des réglettes Cuisenaire, il est demandé à l'élève : quelle réglette ajouter à la réglette vert clair (trois) pour obtenir la réglette jaune (cinq) ? Autrement dit, quel naturel écrire dans la case vide de l'écriture suivante :

$$3 + \Box = 5$$

Ou encore : quelle valeur donner au naturel x pour que l'égalité 3+x=5 soit vraie ?

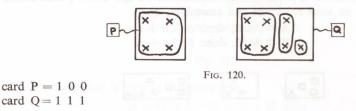
Quand cette équation admet une racine, vous savez qu'elle est unique. Cela résulte d'une propriété : tout naturel est régulier pour l'addition :

$$\forall x \ (x \in \mathbb{N}) \quad (a + x = b + x) \Rightarrow (a = b)$$

dont les enfants prendront conscience à force de manipulations.

3. Modes opératoires en différentes bases

1º Soit à additionner les cardinaux des ensembles P et Q disjoints exprimés en base deux.



La somme est le cardinal de $P \cup Q$ (puisque $P \cap Q = \emptyset$).

Dans cette réunion, je trouve:

une unité (rang 0) fournie par Q,

un regroupement de rang 1 (paire) fourni par Q,

deux regroupements de rang 2 (double paire) : un fourni par Q, l'autre par P.

Mais en base deux, ces deux regroupements doivent être réunis en un seul de rang immédiatement supérieur : ils laissent donc la place à : un regroupement de rang 3 (une huitaine).

J'ai donc :

card $Q = 1 \ 1 \ 1$

card
$$(P \cup Q) = 1 \ 0 \ 1 \ 1$$

Pour familiariser les enfants avec ce mode opératoire il est conseillé d'utiliser un support quadrillé (damier) sur lequel les colonnes matérialisent les rangs des regroupements, tandis qu'on place en lignes les nombres à représenter, le nombre de regroupements de chaque rang étant matérialisé par un jeton (ou pas de jeton) avec des couleurs différentes suivants les rangs. L'examen du schéma ci-joint vous aidera à comprendre comment utiliser un tel matériel.

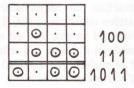


Fig. 121.

Ouel que soit le rang où l'on opère, si la réunion donne deux jetons on doit les regrouper et leur substituer un jeton unique de rang immédiatement supérieur. Autrement dit:

$$1 + 1 = 10$$

Nota: nous avons déjà opéré de cette façon avec nos « compteurs binaires » dans la fiche précédente.

Exercice 18.1.

Effectuez les additions suivantes en base deux:

Présentez également les résultats à l'aide des puissances de deux.

Exercice 18.2. — Effectuez en base trois la réduction des cardinaux des ensembles P et Q précédents et opérez l'addition correspondante.

Vous constatez à cette occasion que P se caractérise par la présence d'une unité (rang 0) et d'un regroupement de rang 1 (on aurait pu l'écrire en décimal 3+1). Q se décompose en 3+3+1 et comporte donc une unité et deux triplets (regroupements de rang 1). La réunion $P \cup Q$ comporte donc :

une unité plus une, soit deux unités,

un triplet plus deux, ce qui donne un « triple triplet » (regroupement de rang 2). Le card $P \cup Q$ s'exprime ainsi sous l'une ou l'autre des formes suivantes :

1 0 2 ou
$$1.t^2 + 0.t^1 + 2.t^0$$

en désignant la base trois par t.

Vous vérifiez qu'en décimal, le nombre onze est la somme de neuf (trois fois trois) et de deux (9 + 2).

Exercice 18.3. — Effectuez des exercices similaires avec les bases de votre choix jusqu'à ce que vous soyez parfaitement familiarisé avec le procédé de l'addition en différentes bases. Essayez de formuler le principe de ce procédé. Vérifiez que la formulation que vous aurez trouvée convient bien à l'addition courante des nombres écrits en base dix.

Pour chaque base, les calculs seront simplifiés si vous construisez d'abord la « table d'addition » correspondante, c'est-à-dire la table de Pythagore donnant les sommes de toutes les paires de naturels inférieurs à la base. Exemples :

table en	+	0	1			table en	2400	0	1	2	
base deux	0	0	1 10			base trois	0	0	1 2	2	
	1	1	10				2	2	10	11	
table en	+	0	1	2	3						
base quatre	0	0	1	2	3						
	1	1	2	3	10						
	2	2	3	10	11						
	3	2	10	11	12						

Remarque: Les difficultés que rencontrent les adultes dans ce domaine paraissent essentiellement provenir de la grande habitude qu'ils ont de l'addition en base dix. Le regroupement par dix, par cent, leur paraît beaucoup plus « naturel » que par, deux, quatre, huit. Mais c'est pure habitude et quelle bonne gymnastique intellectuelle que de s'amuser à vaincre ces automatismes! Les difficultés sont moindres chez les jeunes enfants surtout si on prend soin, avant de les faire calculer sur le papier,

de leur donner la possibilité de se familiariser avec les jeux d'échange. On trouve d'ailleurs dans le commerce du matériel spécialement conçu pour faciliter l'expression des naturels dans différentes bases, par exemple :

4. L'addition des naturels considérée comme loi de composition interne

Dans les pages qui précèdent, nous avons considéré les naturels comme des cardinaux. Autrement dit, entre toutes les propriétés qui pouvaient être observées sur les ensembles, nous avons distingué celle qui exprime « l'effectif » de certains ensembles (nous écartons pour l'instant les ensembles pour lesquels nous ne saurons pas « compter combien ils ont d'éléments »).

Les cardinaux étant liés congénitalement aux ensembles, à la relation d'inclusion sur des ensembles correspond la relation d'ordre sur les cardinaux; à la réunion d'ensembles disjoints, correspond l'addition de leurs cardinaux. Aux propriétés de l'inclusion et de la réunion correspondent (à quelques changements près au sujet desquels la vigilance s'impose) les propriétés de l'ordre et de l'addition des cardinaux.

Cependant, suivant une démarche fondamentale de la mathématique, nous devons considérer les naturels indépendamment des ensembles qui, par l'intermédiaire des cardinaux, leur ont donné naissance. Nous devons considérer les naturels comme des êtres mathématiques, éléments d'un ensemble spécifique. Telle est en tout cas l'amorce de la démarche axiomatique que nous esquissons ci-dessous.

Les naturels sont les éléments, notés $0, 1, 2, \dots$ d'un ensemble lui-même désigné par la lettre spéciale \mathbb{N} .

Il est défini sur $I\!N$ une loi de composition interne dite addition qui, à tout couple de naturels (a,b) fait correspondre un naturel noté a+b et appelé somme des deux naturels du couple.

Dans cette perspective, l'addition apparaît comme une application de $I\!\!N \times I\!\!N$ dans $I\!\!N$. Ce qui conduit à la notation (les naturels étant, ici, écrits en numération décimale).

$$\begin{array}{l} + : I\!\!N \times I\!\!N \to I\!\!N \\ + : (2, 3) \mapsto 2 + 3 \\ + : (2, 4) \mapsto 2 + 4 \end{array}$$

Écriture qui se lit : « le composé par l'addition des naturels 2 et 4 est 2 + 4 ».

La table de cette loi de composition interne (à ne pas confondre avec la table d'addition relative à chaque base de numération) est aussi illimitée que IN luimême :

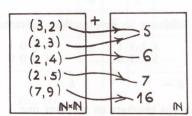
+	0	1	2	3	
0	0	1	2	3	
1	1	2	3	4	
2	2 3	3	4	5	
3	3	4	5	6	

La commutativité, le fait que zéro est neutre pour l'addition apparaissent immédiatement sur cette table. Cependant, dans l'axiomatique de Peano, ces propriétés sont démontrées pas à pas. Il s'agit d'une étude approfondie qui n'a pas sa place ici.

Pour faciliter la compréhension de l'écriture flêchée ci-dessus on peut l'accompagner d'un schéma qui fait apparaître l'addition comme le fruit de l'intervention d'une « machine » sur les couples de naturels.



machine à addition



application de N × N dans N

Fig. 123.

Une machine de ce genre existe sous forme d'un instrument appelé « levier arithmétique » particulièrement apte à rendre des services à la pédagogie active. Il s'agit d'un fléau supporté en son milieu par un pied et dont chaque bras porte des crochets également espacés, numérotés de 1 à 10 de part et d'autre du point de pivotement, sur lesquels on peut placer une ou plusieurs rondelles métalliques de même poids.



Fig. 124.

Quand un élève place une rondelle d'un côté, par exemple en A5, l'équilibre est rompu. Pour le rétablir il peut mettre une rondelle en B5 ou deux rondelles, une en B1 par exemple, l'autre en B4 : 5 apparaît comme la contrepartie de 4 et de 1. Le jeu consiste à trouver la contrepartie de tout couple inscrit sur un des bras, par exemple le couple (4, 5). Chaque fois les élèves inscrivent sur leur cahier le résultat trouvé. La correspondance terme à terme entre les couples et leur image se trouve ainsi excellement illustrée. La présentation sur le cahier permet de mettre en évidence le mécanisme général de l'application. Enfin, concernant la mémorisation des tables d'addition, ces manipulations ne peuvent qu'être bénéfiques.

Remarque: Si l'addition des naturels est une *loi* de composition interne, il n'en est pas de même pour la soustraction des naturels : écrire a-b suppose $b \le a$.

On parlera alors *d'opération* de soustraction en réservant l'expression de *loi de composition* aux opérations définies pour *tous* les couples : la loi s'applique à tous, comme chacun sait (même dans les « démocraties » où, comme disait Orwell, il y a des citoyens qui sont plus égaux que les autres...).

Exercices:

18.4. — Complétez par le naturel qui convient les schémas ci-dessous représentant des machines à additionner.

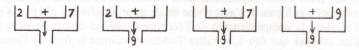


Fig. 125.

18.5. — Effectuez les soustractions suivantes en base deux

Contrôlez vos résultats en vérifiant que

$$a + 1 1 1 0 = 1 1 1 1 b + 1 0 0 0 = 1 0 0 1 c + 1 1 0 = 1 1 0 1$$

18.6. — Placez-vous en base trois et effectuez la soustraction suivante

$$1 \ 0 \ 0 \ -2 =$$

18.7. — Examinez la représentation ci-dessous et essayez de lui trouver une signification :

0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0
0	0	1	1	0	1	0	1	0	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0

18.8. — Certains compteurs électroniques — utilisés par exemple pour compter les impacts de particules atomiques sur un écran — enregistrent les résultats de ces « bombardements » sur des cadrans circulaires portant 8 lampes dont une seule est allumée à un instant donné. La figure ci-dessous montre l'enregistrement d'un décompte : A indique les unités, B les « huitaines », etc. Que lit-on sur D? Écrivez le nombre ainsi représenté d'abord en base huit puis en base dix. Quel est le plus grand nombre que peut enregistrer le compteur? Transcrivez-le en puissances de huit.

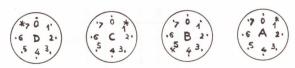


Fig. 126.

(d'après School Mathematics Project, Book 1, Cambridge University Press).

18.9. — A propos des carrés magiques, voici comment Bachet, sieur de Meziriac (1581-1638), explique la façon de fabriquer le carré ci-dessous à 9 cases.

					1	- 1	
4	9	2		4	13220	2	213
3	5	7	7		5		3
8	1	6	(2,27 %	8	4 5	6	97
	10 95	ini d imani eura dispos		enab	9	1 110	Bye p a

Fig. 127.

Il écrit les naturels de 1 à 9 en biais trois par trois. Les nombres 2, 6, 8, 4 se trouvent ainsi disposés aux quatre coins d'un carré de neuf cases dont la case centrale est occupée par 5 et dont les quatre autres cases sont vides. La somme de chacune des diagonales est 15. Il place alors dans les cases vides les nombres laissés à l'extérieur de ce carré, de façon que la somme des nombres inscrits dans chaque ligne ou dans chaque colonne soit 15.

Essayez d'appliquer ce procédé pour fabriquer un carré magique de 25 cases.

Remarque: Les lecteurs intéressés par les « mystères des nombres », dont les « carrés magiques » sont d'illustres représentants, trouveront dans « La pensée chinoise » de Marcel Granet (A. Michel, 1950) de très intéressantes indications sur les liens que les anciens Chinois voyaient entre l'édifice des nombres et l'édifice du monde (cf le diagramme ci-dessous).

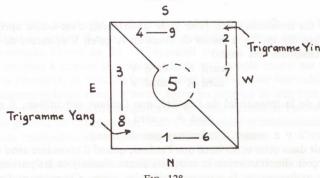


Fig. 128.

La multiplication des naturels

1. Correspondance multiple et multiplication numérique.

1.1. Duplication.

Considérons l'exercice suivant.

On dispose devant un enfant des vases et on lui demande de mettre dans chaque vase une anémone qu'il prend dans un tas de fleurs disposées sur une table voisine. Il opère alors la correspondance terme à terme vase/anémone. On lui demande ensuite de placer une rose dans les mêmes vases, il le fait, opérant la correspondance terme à terme vase/rose. On lui demande enfin de sortir les fleurs des vases et de les disposer sur la table tandis qu'on retire les vases. On demande à l'enfant de considérer l'ensemble F des fleurs se trouvant devant lui (sur la table), ensemble qui apparaît comme la réunion des ensembles disjoints suivants : l'ensemble A des anémones, l'ensemble R des roses.

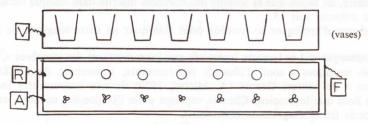


Fig. 129.

A partir du troisième stade (voir *fiche* antérieure), c'est-à-dire après 6 ans en général, l'enfant sait qu'il y a *autant* de fleurs en A qu'en V et *autant* de fleurs en R qu'en V (V ensemble des vases)

card A = card Vcard R = card V

En vertu de la transitivité de l'égalité, que l'enfant sait utiliser, il sait que card $A={\rm card}\ R$

(c'est-à-dire qu'il y a autant d'anémones que de roses).

Il apparaît dans cette expérience que l'enfant, quand il considère ainsi deux sortes de fleurs, perçoit simultanément le tout (les fleurs réunies) et les parties : le sous-ensemble des anémones et le sous-ensemble des roses. Considérant l'ensemble F

dont R et A sont les parties, l'enfant sait qu'il a affaire à une équipartition (partage en deux parties « égales ») ou encore que la « collection » des roses se trouve doublée par la « collection » des anémones.

Ces différents aspects de la situation proposée à l'enfant sont pour lui solidaires. On le constate quand, lui demandant combien il y a de fleurs en tout, il répond :

« il y a une fois sept roses et une fois sept anémones ».

Si on pousse un peu l'enfant en lui posant la question : « une fois sept et une fois sept, combien cela fait-il de fois sept? », la réponse « ça fait deux fois sept » vient assez facilement.

Par comptage direct l'enfant trouve par ailleurs qu'il y a sur la table quatorze fleurs. Il découvre alors que : « deux fois sept » est une autre façon de désigner le cardinal quatorze.

Pour arriver à ce résultat remarquons que l'enfant a dû considérer chaque classe de fleurs comme un tout, il a dû constater que ces deux classes étaient équivalentes quant au nombre d'éléments les constituant, et il a dû tenir implicitement compte du fait que les deux classes réunies formaient la totalité de l'ensemble des fleurs.

Dans cette « constellation » d'opérations logiques, figure notamment l'opération multiplicative qui, comme nous l'avons souligné à maintes reprises, se caractérise par le *croisement de plusieurs points de vue différents;* ici le point de vue consistant à considérer les fleurs comme appartenant à des classes, et le point de vue consistant à considérer les classes comme parties d'un même ensemble équivalentes entre elles (par leur cardinal).

Contre épreuve:

Si on avait pris des ensembles de fleurs au hasard, par exemple un ensemble Q de quatre roses et un ensemble S de six anémones, il n'y aurait pas eu équivalence numérique de Q et de S; on n'aurait pas pu considérer le cardinal de l'ensemble réunion de Q et S comme deux fois le cardinal d'une des parties, on aurait pu faire une addition mais pas une duplication.

Ainsi la duplication est déjà autre chose qu'une addition. Pour qu'elle ait lieu il faut que les collections à réunir aient même cardinal. C'est une multiplication.

On remarquera que la *division* à reste nul est également présente dans le raisonnement. Car l'égalisation numérique des ensembles R et A a pour effet de partager l'ensemble F en *deux* parties d'égal cardinal et met en évidence le cardinal du quotient.

La duplication exprimée en base deux.

Plaçons-nous dans le système de numération de base deux et regardons comment on peut exploiter la situation analysée ci-dessus.

Je dois exprimer le cardinal de R en base deux, ce qui me conduit à répartir mes roses en trois sous-ensembles : le premier comporte *une* unité, le second *un* regroupement de deux unités, le troisième *un* regroupement (de rang 2) de deux regroupements de rang 1 (voir la figure).

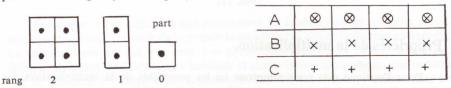


Fig. 130.

Dans la duplication, chacune de ces parties sera doublée et donnera donc naissance à un regroupement de rang supérieur.

Par duplication, le cardinal de R qui s'écrivait en base deux

1 1 1

devient 1 1 1 0.

D'où cette règle simple : en base deux, doubler un nombre revient à décaler tous ses chiffres d'un rang vers la gauche, ce qui s'obtient en ajoutant un zéro à droite du nombre dont on part.

1.2. La multiplication en général.

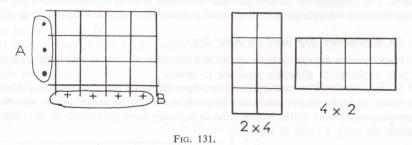
La multiplication « en général » apparaît comme la généralisation de la duplication.

Soit par exemple (figure ci-dessus) trois ensembles A, B, C disjoints de même cardinal. Je peux mettre en évidence la correspondance terme à terme entre les éléments de ces ensembles pris deux à deux en disposant les ensembles en lignes et les éléments en rangées. Le cardinal de la réunion de A, B, C ne sera autre que le cardinal du *produit cartésien* « lignes × rangées. » Ce cardinal prend le nom de *produit* de deux *facteurs*: le premier est le cardinal commun aux ensembles considérés (nombre de colonnes du tableau cartésien), le second est le nombre de ces ensembles de même cardinal (nombre de lignes du tableau).

Le recours à cette façon de faire est possible dans de nombreux cas : trois paires de chaussures, deux mains de cinq doigts, quatre semaines de congé de sept jours chacune, douze douzaines d'œufs, dix wagons de quarante places assises, etc.

Chaque fois, on peut représenter la situation par un diagramme cartésien en faisant intervenir d'une part le cardinal commun aux ensembles considérés (semaines, douzaines d'œufs, etc), d'autre part le nombre de ces ensembles : *quatre* semaines, *douze* douzaines, etc.). Le premier cardinal détermine le nombre de colonnes du diagramme cartésien, le second indique le nombre de lignes à considérer.

Ce qu'on cherche c'est le nombre total d'éléments en présence, par exemple le nombre de jours dans les quatre semaines ou le nombre d'œufs dans les douze douzaines. Le diagramme cartésien avec ses cases identifiables se prête au décompte. Là s'arrête son rôle. Il s'applique à toutes les situations. Peu importe qu'il s'agisse d'œufs ou de jours. Dans tous les cas il fournit sa grille pour aider au décompte.



2. Propriétés de la multiplication.

Dans l'optique que nous adoptons ici les propriétés de la multiplication des naturels découlent de la nature même du produit cartésien.

2.1. — Il est très apparent en premier lieu que l'ordre dans lequel on fait intervenir les nombres à multiplier ne change pas le résultat (cf. figure 131)

$$a \times b = b \times a$$
;

c'est la propriété de commutativité.

On peut faire ici une remarque incidente. Comment peut-on reconnaître des naturels qui sont eux-mêmes des produits de naturels?

Soit le naturel sept. Peut-on le considérer comme un produit de naturels, en excluant le « produit trivial » que constitue 1×7 ?

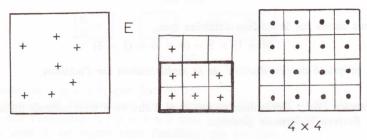


Fig. 132.

Pour répondre nous considérons 7 comme le cardinal d'un ensemble E de sept jetons et nous cherchons si nous pouvons disposer ces jetons sur un damier de façon à former un rectangle. Nous constatons qu'aucune disposition ne s'y prête. Même exercice avec 12 puis avec 16. Ceci conduit à introduire la notion de *nombre premier*, de nombre *rectangle* (les « rectangle numbers » des Anglo-saxons), de nombre *carré* (« square number »).

On n'insistera jamais assez sur l'intérêt pédagogique qu'il y a à faire ainsi jouer les jeunes enfants avec les nombres considérés comme cardinaux d'ensembles aux configurations diverses. Ils y acquièrent une familiarité avec ces êtres abstraits et complexes que sont les nombres qui ne vient que beaucoup plus tard — et parfois jamais — si l'enfant n'a pas eu la chance de pouvoir, par ses propres manipulations, explorer les multiples visages que peut prendre tel ou tel naturel.

2.2. — Comparons deux produits qui ne diffèrent que par un de leurs facteurs, par exemple

 3×4 et 3×6 : 4 < 6

Formons-les sur un diagramme cartésien. Nous constatons que le produit qui a un même nombre de rangées mais moins de colonnes est un nombre plus petit

$$3 \times 4 < 3 \times 6$$

La propriété est générale : si $a \le b$ alors $a \times c \le b \times c$. La relation d'ordre \le dans $I\!N$ est compatible avec la multiplication.

2.3. — Soit à faire la multiplication de 5 par 3. Passons aux jetons et aux cardinaux. Nous savons qu'on peut décomposer 5 en 4+1, par exemple.

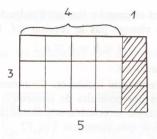


Fig. 133.

Nous lisons sur le schéma cartésien que

$$(4+1) \times 3 = (4 \times 3) + (1 \times 3)$$

c'est la propriété de distributivité de la multiplication sur l'addition.

Exercice 19.1: Généraliser ce qui vient d'être vu à trois naturels quelconques a, b, c. Écrivez la formule générale.

2.4. — Le produit de deux naturels étant un naturel, nous pouvons prendre ce dernier comme point de départ d'une nouvelle multiplication; nous considérons alors le « tout » comme faisant intervenir deux multiplications et trois nombres. Par exemple :

$$(2 \times 3) \times 4$$

En passant aux jetons et aux cardinaux on obtient la représentation suivante :

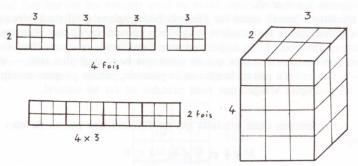


Fig. 134.

On voit sur le schéma que pour décompter le résultat final on peut procéder comme l'indique la seconde représentation de la figure.

$$(2\times3)\times4=2\times(3\times4)$$

De façon générale :

$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$$

C'est la propriété d'associativité. Elle permet que l'on écrive, sans parenthèses : $a \times b \times c$ ou encore a.b.c ou enfin abc.

2.5. — Dans l'addition des naturels, zéro a été un élément distingué (il est neutre pour l'addition).

Pour la multiplication, vous constatez quel que soit le naturel $a, a \times 0 = 0$: zéro est absorbant pour la multiplication.

Réciproquement, si le produit de deux naturels est nul, l'un des naturels au moins est nul.

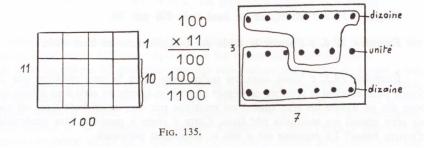
2.6.—Il y a aussi un élément neutre pour la multiplication, c'est 1. Ce qui justifie l'écriture (pour tout naturel x) $1 \times x = x$.

Vous vérifiez également que si le produit de deux naturels est égal à 1, ces deux naturels sont égaux à 1.

3. Techniques opératoires.

3.1. En base deux.

Soit à multiplier les deux naturels écrits en binaire 11 et 100.



Je sais que je peux décomposer 11 en 10+1 et que d'après la distributivité je peux écrire :

$$11 \times 100 = (10 + 1) \times 100 = (10 \times 100) + (1 \times 100)$$

or, multiplier par l'unité ne change rien et multiplier par 10 revient à faire la duplication. Pour cela, nous l'avons vu, il suffit d'ajouter un zéro à droite (décalage de tous les chiffres du nombre d'un rang vers la gauche). L'expression devient :

$$1\ 000 + 100 = 1\ 100$$

naturel qui se lit : *une* huitaine plus *une* double-paire (*une* dizaine plus *deux* unités en numération décimale).

On pourra présenter l'opération comme indiqué (fig. 135).

Exercice 19.2: Effectuez les opérations suivantes (base deux)

Exprimez également les résultats en numération de base dix.

3.2. Soit à multiplier 13 par 7 (numération décimale). On décompose 13 en trois unités et une dizaine (regroupement de rang 1): 13 = 10 + 3

$$(10 + 3) \times 7 = (10 \times 7) + (3 \times 7)$$

 $3 \times 7 = deux$ dizaines + une unité (voir réduction sur le dessin) $10 \times 7 = sept$ dizaines

 $13 \times 7 = neuf$ dizaines + une unité, soit 91.

Remarque: pour faciliter le calcul, il est bon de connaître la table de multiplication qui, sans dénombrer les éléments, permet de savoir que $7 \times 3 = 2$ dizaines + 1 unité (21). En numération binaire cette table de Pythagore se réduisait à

$$\begin{array}{c|cccc}
\times & 0 & 1 \\
\hline
0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1
\end{array}$$

3.3. En d'autres bases.

Nous vous laissons le soin de généraliser ce qui vient d'être vu à d'autres bases et vous proposons les exercices suivants.

Exercice 19.3: Multipliez en base trois 201 par 20.

Exercice 19.4.: Formez la table de multiplication en base trois.

Exercice 19.5.: Vous avez vu qu'en base deux la multiplication par deux donne pour résultat le nombre de départ auquel on ajoute un zéro à sa droite, qu'en base dix on ajoute un zéro quand on multiplie par dix, qu'en base trois on ajoute un zéro quand on multiplie par trois. Cette « règle » peut-elle être généralisée à d'autres bases? La réponse est « oui ». Expliquez pourquoi.

Exercice 19.6.: Effectuez, en base cinq, 4321×1234 .

Exercice 19.7.: En base dix on rencontre pour les naturels les désignations suivantes : onze, douze, dix-neuf, soixante, soixante-dix, quatre-vingts, quatre-vingt-dix, c'est-à-dire un mode de désignation assez hétérogène (qui complique la tâche des enfants ou des étrangers quand ils apprennent le français). Réfléchissez-y. A quoi peut-on attribuer cette hétérogénéité?

4. La multiplication des naturels considérée comme loi de composition interne.

Comme nous l'avons fait pour l'addition, nous pouvons définir la multiplication comme loi de composition interne dans $I\!\!N$: à tout couple de naturels (a,b) elle fait correspondre un naturel noté $a\times b$ ou simplement ab, appelé produit des deux facteurs a et b (« facteur », celui qui fait, nous rappelle Littré; cette fois la terminologie est homogène).

Dans cette perspective, la multiplication apparaît comme une application de $I\!\!N \times I\!\!N$ dans $I\!\!N$. Ce qui conduit à la notation (les naturels écrits en numération décimale) :

 $\times : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $\times : (3, 7) \mapsto 3 \times 7$ $\times : (12, 12) \mapsto 12 \times 12 = 144$ $\times : (7, 3) \mapsto 21$

La table de la loi de composition interne (illimitée comme celle de l'addition et au contraire des tables de Pythagore qui dépendent de la base de la numération choisie) est

La commutativité, le fait que zéro est absorbant, celui que 1 est neutre, apparaissent immédiatement sur cette table où les carrés parfaits figurent sur la diagonale...

Avec les très jeunes enfants on pourra utiliser des schémas de machine du type ci-dessous et leur faire compléter ces schémas.



Fig. 136.

A propos de machines, si on dispose d'une machine à calculer manuelle, on pourra faire faire des multiplications sur des nombres assez grands et faire présenter les résultats sous forme de correspondance terme à terme entre tels ou tels couples de facteurs et les produits correspondants. Si on dispose du *levier arithmétique* décrit dans la fiche précédente on pourra faire découvrir aux enfants le produit qui s'obtient quand on place plusieurs anneaux sur un même crochet du levier. Les enfants constateront que trois anneaux sur le crochet portant le numéro 4 équilibrent quatre anneaux placés sur le numéro 3 de la branche opposée.

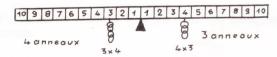


Fig. 137.

Exercice 19.8.: Établissez sur une feuille de papier quadrillée un tableau carré de 100 cases dont la première ligne en partant du bas reçoit, de la gauche vers la droite, les naturels de 0 à 9, la seconde les naturels de 10 à 19 et ainsi de suite. Considérez l'ensemble E des 100 premiers naturels. Marquez sur le tableau à l'aide

d'un crayon de couleur la partition obtenue en lui appliquant la relation R « a même chiffre des unités que ». Quel est le cardinal de l'ensemble quotient E/R? Mettez en évidence sur le tableau l'ensemble A des multiples de 3 en entourant d'un cercle chacun de ces nombres. Mettez en évidence l'ensemble des multiples de 5 en entourant chacun d'eux par un triangle. Comment reconnaissez-vous sur le diagramme les nombres qui sont multiples de 3 ou multiples de 5? Comment reconnaissez-vous les nombres qui sont multiples de 3 et multiples de 5? Comment reconnaissez-vous les nombres qui sont multiples de 3×5 ?

Exercice 19.9.: Dans l'ensemble IN des naturels on définit l'opération \(\triangle \) telle que

 $a \perp b = a + b + ab$

montrez que cette opération est commutative et associative (d'après Évariste Dupont : Apprentissage mathématique)*.

Remarque: C'est parce que l'addition des naturels est associative que l'itération de l'addition (des additions répétées, de la forme a + a + a) conduit à la définition de la multiplication.

Celle-ci étant associative, l'itération de la multiplication conduit à l'exponentiation: $a \times a \times a = a^3$.

L'exponentiation n'étant pas une loi associative,

$$(2^3)^5 = 2^{15}, \quad 2^{(3^5)} = 2^{243}$$

il ne sera pas possible de définir une nouvelle loi par itération de l'exponentiation.

spécifique 1, 7, *, etc. L'addition et la multiplication restent cependant les lois fondamentales.

Structure de l'ensemble des naturels Notion d'isomorphisme

Autres ensembles numériques (*)

Nous voici désormais bien familiarisés avec les naturels tels que les aborde la mathématique d'aujourd'hui. Chaque naturel nous est d'abord apparu comme le moyen de désigner la propriété commune à plusieurs ensembles (« autant de »), mais rapidement nous avons constaté que ces « êtres mathématiques » avaient leur propre personnalité et qu'on pouvait les considérer comme éléments d'un ensemble se prêtant merveilleusement aux compositions binaires internes que sont l'addition et la multiplication.

Étudiant solidairement ces lois de composition, nous avons constaté qu'elles obéissaient à cinq règles essentielles :

a + b = b + a, commutativité de l'addition ;

(a + b) + c = a + (b + c), associativité de l'addition ;

a.b = b.a, commutativité de la multiplication;

(a.b).c = a.(b.c), associativité de la multiplication ;

a(b+c) = (a.b) + (a.c), distributivité de la multiplication sur l'addition.

A propos de ces « cinq règles » remarquons que, grâce à elles, nous pouvons ignorer l'origine cardinale des nombres. En quelque sorte, elles sont le dépositaire invisible des propriétés cardinales des naturels.

Ainsi donc, équipés de ces deux opérations fondamentales et de leurs règles d'utilisation, nous pouvons aller de l'avant pour étudier l'ensemble des naturels et lui chercher d'éventuels dépassements. Pour cela il nous faut au préalable revenir un peu sur un concept important effleuré dans la fiche 1.11, le concept d'isomorphisme.

^(*) Dans les pages qui suivent nous adoptons un mode d'exposition proche de celui utilisé par Irving Adler dans son ouvrage « Initiation à la mathématique d'aujourd'hui » (O.C.D.L.). Nous engageons le lecteur à se reporter à cet ouvrage d'une lecture relativement facile s'il se trouve mis en appétit par les quelques hors-d'œuvre faisant l'objet de la présente fiche.

1. Isomorphisme et structure.

Pour nous faire bien comprendre, nous développons un exemple. Soit un premier ensemble $\{0, 1, 2, 3, ...\} = IN$ dans lequel nous définissons deux lois de composition notées + et \times . Les tables de ces lois sont connues :

+	0	1	2	3	4	 ×	0	1	2	3	4	
0	0	1	2	3	4	0	10	0	0	0	0	
	1					1	0					
2	2	3	4	5	6	 2					8	
3	3	4	5	6	7	 3	0	3	6	9	12	
	4					4	0	4	8	12	16	
:						 use tring to						

Considérons d'autre part l'ensemble $E = \{0, 1, 10, 11, 100, 101, ...\}$ dans lequel nous définissons deux lois de composition notées respectivement \bot et * qui sont complètement définies par les tables suivantes :

	0	1	10	11	100	101		神	0	1	10	11	100	101	_
0	0	1	10	11	100	101		0	0	0	0	0	0	0	
1	1	10	11	100	101	110		1	0	1	10	11	100	101	
10	10	11	100	101	110	111	111151	10	0	10	100	110	1000	1010	
11	11	100	101	110	111	1000		11	0	11	110	1001	1100	1111	
100	100	101	110	111	1000	1001		100	0	100	1000	1100	10000	10100	
101	101	110	111	1000	1001	1010		101	0	101	1010	1111	10100	11001	
								misoqm							

Il apparaît possible de définir une application f de $I\!N$ dans E, application dont nous amorçons la table :

(où vous avez sans doute deviné que l'élément de E qui correspond à 6, par exemple, n'est autre que 110 c'est-à-dire l'écriture de 6 en numération binaire). Cette application f est une bijection (puisqu'elle réalise entre les deux ensembles une correspondance terme à terme). Mieux encore, cette bijection respecte les lois de composition dans les deux ensembles, ce que fait apparaître le schéma ci-dessous :

Ce qui signifie : au composé de 2 et 5 par +, soit 7, correspond par f dans E l'élément 111 qui est le composé par \bot de 10 et 101 (lesquels correspondaient par f à 2 et 5).

De même : au composé de 2 et 5 par \times , soit 10, correspond par f dans E l'élément 1010 qui est justement le composé par * de 10 et 101.

Ce que nous venons de vérifier sur un exemple est tout à fait général; en désignant par x, y deux éléments quelconques de $I\!N$, par f(x) et f(y) les éléments de E qui leur correspondent dans la bijection, nous pourrons écrire :

$$f(x) \perp f(y) = f(x + y)$$

$$f(x) * f(y) = f(x \times y)$$

Deux remarques s'imposent :

 1° Si, au lieu de considérer l'application f, nous avions réalisé une autre correspondance terme à terme, par exemple g telle que

les dernières formules écrites ne seraient plus vraies quels que fussent les éléments x, y de $I\!\!N$.

 2° Il y a longtemps que vous avez reconnu, en E, un ensemble qui n'est autre que $I\!N$ lui-même (les naturels y étant écrits en numération binaire), les lois de composition notées \bot et * étant respectivement l'addition et la multiplication.

Autrement dit, l'isomorphisme de $I\!N$ muni des lois + et \times sur l'ensemble E muni des lois \bot et * n'est rien d'autre que l'identification : de $I\!N$ et E, de + et \bot , de \times et *.

Autre exemple d'isomorphisme.

On pourra reprocher à l'exemple précédent d'être « cousu de fil blanc » : rien d'étonnant à ce que $(E, \bot, *)$ ressemble à $(I\!\!N, +, \times)$ puisque c'est le même ensemble et les mêmes opérations. Voici donc un autre exemple où les deux ensembles seront des êtres différents.

Soit $B = \{0, 1\}$, l'ensemble de ces deux naturels étant muni de la loi de composition interne connue, la multiplication. En voici la table :

Soit F un singleton et $\mathfrak{T}(F) = \{\emptyset, F\}$ l'ensemble des parties de ce singleton (voir fiche 1.11, p. 86); munissons $\mathfrak{T}(F)$ de la loi de composition notée \cap . En voici la table :

Soit alors g la bijection de B sur $\mathfrak{I}(F)$ définie par $g(0)=\varnothing$, g(1)=F; vous vérifiez sans peine

 $g(0 \times 0) = \emptyset \cap \emptyset$, $g(0 \times 1) = \emptyset \cap F$, $g(1 \times 0) = F \cap \emptyset$, $g(1 \times 1) = F \cap F$

La bijection g est un isomorphisme de B muni de la loi \times sur l'ensemble $\mathfrak{T}(F)$ muni de la loi \cap . Cet isomorphisme établit un *dictionnaire* permettant de traduire toute expression utilisant les éléments de B et le signe \times en les éléments correspondants de $\mathfrak{T}(F)$ et le signe \cap .

La bijection réciproque* permettrait, évidemment, de définir l'isomorphisme de $\mathfrak{I}(F)$, \cap sur (B, \times) .

Le concept de structure.

A partir du moment où nous avons mis en évidence l'isomorphisme de (B, \times) sur $\mathfrak{T}(F)$, \cap , nous disposons d'un dictionnaire permettant de passer, « les yeux fermés » d'une proposition relative à (B, \times) à sa traduction dans $\mathfrak{T}(F)$, \cap . Méfiez-vous toutefois de l'expression « les yeux fermés »; en réalité, il faut avoir les yeux ouverts pour respecter scrupuleusement les indications du dictionnaire. Ce qui peut être fermé, en l'occurrence, c'est le bureau des inventions : si nous savions tout sur (B, \times) , nous saurions tout, à la traduction près, à l'isomorphisme près, sur $\mathfrak{T}(F)$, \cap . Ce que résume l'expression : les ensembles B et $\mathfrak{T}(F)$ sont munis par les lois \times et \cap respectivement de structures isomorphes ou encore de la même structure.

Au lieu d'étudier séparément (B, \times) puis $\mathfrak{T}(F)$, \cap , il suffit d'étudier *la structure commune*. Au delà de certaines apparences, en mettant à découvert la structure, nous atteignons un niveau supérieur d'abstraction; c'est acquérir de nouveaux moyens de comprendre et d'agir.

Nous avons déjà rencontré une possibilité de ce genre à propos des ensembles munis de certaines opérations ayant fait l'objet de nos études précédentes sur l'algèbre des parties d'un ensemble, l'algèbre des propositions et l'algèbre des circuits. Nous avions noté à l'époque la profonde « parenté » existant entre ces algèbres. Aujourd'hui nous pouvons dire que cette parenté n'est autre qu'un isomorphisme.

2. Autres ensembles numériques

2.1. L'ensemble Z des entiers.

L'ensemble des naturels IN, étudié jusqu'ici n'est pas le seul ensemble numérique étudié par la mathématique.

Une première extension peut lui être donnée par l'introduction des *entiers* (dits aussi entiers relatifs), êtres mathématiques proches parents des naturels, auxquels ils empruntent d'ailleurs en partie leurs symboles représentatifs puisqu'on utilise pour les désigner ces symboles agrémentés d'un signe + ou d'un signe - (ex. : -12, -9, +33, +76, etc.).

Nous n'indiquerons pas ici, car la place nous est mesurée et la démarche, sans être difficile, est relativement longue, comment est défini l'ensemble dits des *entiers*.

^(*) La bijection réciproque de g est la bijection de $\mathcal{T}(F)$ sur B qui fait correspondre : à \emptyset , 0 ; à F, 1.

Ce qui importe davantage, peut-être, c'est de connaître l'intérêt de ce nouvel ensemble. Cet intérêt est le suivant : les entiers sont tels qu'une équation de la forme

$$x + b = a$$

a une solution et une seule quels que soient les entiers a et b ce qui n'est pas le cas, vous le savez, quand on travaille dans $I\!N$: par exemple on ne sait pas trouver un naturel x tel que x+7=3.

En termes plus simples, nous dirons que cette première extension apportée à l'ensemble *IN* a pour but de construire un ensemble de nombres pour lequel la soustraction soit toujours possible, comme l'addition l'est dans *IN*.

On démontre que l'ensemble des entiers, généralement désigné par Z

$$\mathbb{Z} = \{...-n, ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ..., n, ...\}$$

obéit lui aussi aux « cinq règles » rappelées au début de la présente fiche.

Remarque importante : Chaque entier, chaque élément de \mathbb{Z} , peut être considéré comme le représentant d'une classe d'équivalence de couples de naturels. Expliquons-nous.

Dans IN, nous savons effectuer les soustractions suivantes 7-5=2; 35-33=2; 1033-1031=2; 2-0=2. Nous pouvons dire que pour tous les couples (7, 5), (35, 33), (1033, 1031), (2, 0) la différence du premier au deuxième terme est la $m\hat{e}me$. Ce qui s'écrit 7-5=35-33 et tout aussi bien 7+33=5+35; sous cette dernière forme, il est possible de définir, dans l'ensemble $IN \times IN$ des couples de naturels une relation R tout à fait indépendante du fait que le premier terme du couple soit supérieur au deuxième ou ne le soit pas :

$$(x, y) R(x', y') \Leftrightarrow x + y' = y + x'$$

Vous vérifiez alors que cette relation entre couples est une relation d'équivalence (vous pouvez dire : les couples (x, y) et (x', y') sont équivalents si et seulement si la somme des termes extrêmes, x + y', est égale à la somme des termes moyens, y + x'). Chaque couple de naturels est alors élément d'une classe d'équivalence laquelle peut être désignée par l'un quelconque de ses éléments pris pour « portedrapeau » ou pour « emblème ». En réalité il serait plus rigoureux de poser

$$(\overset{\bullet}{2},0) = \{(2, 0), (3, 1), (4, 2), \ldots\}$$

en prenant le plus simple des couples de la classe surmonté d'un point pour désigner celle-ci. De même

 $(0,5) = \{(0, 5), (1, 6), (2, 7), ...\}$

La théorie qui consiste à construire \mathbb{Z} par l'intermédiaire de ces classes d'équivalence consistera à munir l'ensemble de ces classes de deux lois de composition dans lesquelles on reconnaîtra l'addition et la multiplication. En fin de compte, on posera (2, 0) = +2, (0, 5) = -5 ce qui permettra de retrouver toutes les propriétés des entiers. (Voir cette étude complète dans Évariste Dupont, Apprentissage mathématique, chap. 8.)

2.2. L'ensemble Q des rationnels.

Dans \mathbb{Z} , toute équation de la forme x+b=a a une solution et une seule. Il n'en est pas de même pour une équation de la forme $b \times x = a$, ce qui justifie une nouvelle extension du concept de nombre (voir, dans le même ouvrage, le chap. 9).

Les couples d'entiers que l'on considère ici sont des *fractions*; il y a une restriction très importante à poser pour le deuxième terme b qui ne doit pas être nul (on peut aussi se limiter à choisir b strictement positif). Les fractions (12, 4), (9, 3), (6, 2), (3, 1) sont *équivalentes* parce que

$$12/4 = 9/3 = 6/2 = 3/1 = 3$$

ou, encore mieux, les fractions 12/4 et 9/3 sont équivalentes car $12 \times 3 = 4 \times 9$. Cela permet d'exprimer l'équivalence de deux fractions quelconques, éléments de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^{*+}$: (x, y) est équivalente à (x', y') si et seulement si $x \times y' = y \times x'$ (le produit des termes extrêmes est égal au produit des termes moyens). La notation \mathbb{Z}^{*+} signifie que le deuxième terme du couple est un entier y strictement positif.

Les fractions se trouvent réparties en classes d'équivalence; chaque classe peut être désignée par son emblème :

$$(2, 3) = \{(2, 3), (4, 6), (6, 9), (8, 12), ...\}$$

 $(-5, 4) = \{(-5, 4), (-10, 8), (-15, 12), ...\}$

C'est à l'ensemble de ces classes qu'est donné le nom d'ensemble des rationnels, celui-ci étant désigné par le symbole Q.

Dans cet ensemble, les lois de composition + et \times sont étendues grâce aux définitions suivantes

$$\begin{pmatrix} \frac{a}{b} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{c}{d} \end{pmatrix} = \frac{ad + bc}{bd}$$
$$\begin{pmatrix} \frac{a}{b} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{c}{d} \end{pmatrix} = \frac{a.c}{b.d}$$

On démontre alors que les propriétés de ces lois dans \mathbb{Z} se retrouvent ici; de plus, comme on le souhaitait *a priori*, toute équation de la forme $b \times x = a$, avec $b \neq 0$, a une solution et une seule.

2.3. L'ensemble IR des réels.

Cette extension de \mathbb{Z} à \mathbb{Q} n'est pas encore suffisante. En effet, il n'existe pas de rationnel vérifiant l'équation $x^2=2$. Une nouvelle extension de la notion de nombre est rendue nécessaire; celle-ci présente des difficultés d'un ordre supérieur. C'est pourquoi nous nous contentons de signaler l'existence d'un ensemble de nombres, les réels, ensemble désigné par \mathbb{R} . Parmi ces nombres, signalons $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, π , etc... (on sait, que $\sqrt{2}$ se lit « racine de 2 » et que c'est le réel dont le carré est 2).

L'extension de \mathcal{Q} à \mathbb{R} permet de donner des solutions à l'équation $x^2 = 2$ mais ne permet pas d'en donner à l'équation $x^2 + 1 = 0$. Ainsi naîtra l'idée d'une nouvelle extension, l'ensemble \mathcal{C} des *complexes* que nous nous contenterons d'avoir nommé.

2.4. En guise de conclusion.

On réunit sous le vocable d'ensembles numériques les ensembles étudiés dans ce *Cahier*. Ils ont tous le caractère commun qu'on peut y définir deux lois de composition interne, l'addition et la multiplication, toutes deux commutatives et associatives, la multiplication étant distributive sur la multiplication (« les cinq règles »).

A partir de l'ensemble $I\!\!N$ des naturels, il est possible de construire axiomatiquement l'ensemble $I\!\!\!Z$ des entiers, puis l'ensemble $I\!\!\!Q$ des rationnels, puis l'ensemble $I\!\!\!R$

des réels, puis l'ensemble $\mathbb C$ des complexes. Cette construction est possible mais nous l'avons seulement esquissée pour $\mathbb Z$.

Au sein de \mathbb{Z} , les entiers positifs $0, +1, +2, \ldots$ peuvent, sans inconvénient être représentés de la même façon que les naturels $0, 1, 2, \ldots$ Autrement dit le sous-ensemble \mathbb{Z}^+ des entiers positifs est isomorphe à l'ensemble \mathbb{N} des naturels. C'est pourquoi, à un isomorphisme près, on peut se permettre d'écrire :

$$IN \subset \mathbb{Z}$$

De la même façon, les rationnels représentables par des fractions irréductibles de dénominateurs 1 peuvent être confondus avec des entiers. A un isomorphisme près, on écrira :

 $Z \subset Q$

Il en est de même pour les autres ensembles numériques et, aux isomorphismes indispensables près, on peut écrire l'emboîtement

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

des divers ensembles numériques usuels.

Exercices

Exercice 20.1. Calculer avec cinq décimales s'il y a lieu

$$a = \frac{1}{2} + 1$$

$$b = a + \frac{1}{4}$$

$$c = b + \frac{1}{8}$$

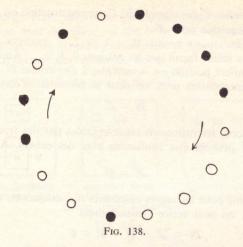
$$d = c + \frac{1}{16}$$

etc...

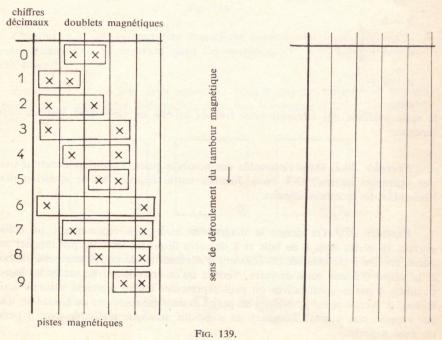
la suite indéfinie des éléments ainsi trouvés est-elle un ensemble? Justifiez votre réponse.

Exercice 20.2. Dans l'ensemble des nombres pairs, l'addition constitue-t-elle une opération interne? Oui. Non. Justifiez votre réponse. Même question pour l'ensemble des nombres impairs.

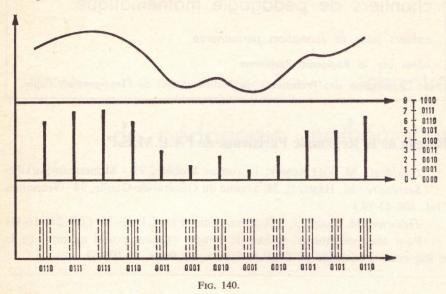
Exercice 20.3. On donne le diagramme ci-dessous représentant un collier portant 16 perles dont 8 de bois et 8 de verre disposées les unes par rapport aux autres comme il est indiqué. On convient d'attribuer la valeur 1 à une perle de bois et la valeur 0 à une perle de verre. Vérifiez qu'en considérant de toutes les façons possibles 4 perles consécutives on peut représenter les 16 premiers naturels écrits en base 2. Aurait-ce été possible si les perles avaient été disposées au hasard les unes par rapport aux autres? Imaginez un dispositif analogue réalisable avec 8 perles ou avec 4 perles.



Exercice 20.4. Dans le système quinaire de transcription des naturels sur tambour magnétique de certains ordinateurs, chacun des dix chiffres décimaux est représenté à l'aide de deux signes (formant doublet magnétique), positionnés dans cinq pistes qui se déroulent dans le sens de marche du tambour (voir figure) si bien que les chiffres successifs d'un nombre se trouvent situés les uns au-dessous des autres dans la bande correspondante aux cinq pistes. Le code utilisé est celui indiqué sur le schéma. Employez-le pour transcrire le nombre 10 9999 4321 sur le diagramme vierge joint.



Exercice 20.5. Examinez la représentation ci-dessous. Essayez d'en trouver une signification.



Symboles utilisés pour les ensembles numériques

 $IN = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$, ensemble des naturels.

 $\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3,\}$, ensemble des *entiers*.

Q = ensemble des rationnels; exemple : $-\frac{2}{3} \in Q$.

IR = ensemble des réels; exemple : $-\sqrt{2} \in IR$.

 ${\Bbb C}=$ ensemble des complexes; exemples : i tel que $i^2=-1,\ i{\in}\,{\Bbb C}.$

L'un de ces symboles affecté d'une astérique en exposant signifie que l'élément zéro a été enlevé de l'ensemble noté; exemples :

$$IN^* = IN \setminus \{0\}, IR^* \cup \{0\} = IR.$$

Z⁺ désigne l'ensemble des entiers positifs; exemples :

$$0 \in \mathbb{Z}^+, +3 \in \mathbb{Z}^+, -1 \notin \mathbb{Z}^+.$$

De même pour Q^+ , IR^+ .

Notations à ne pas confondre :

$$\mathbb{Z}^+ = \{x, x \in \mathbb{Z}, x \ge 0\}; \mathbb{Z}^+$$
 est un sous-ensemble;

 $(\mathbb{Z}, +)$ désigne *le groupe* additif des entiers, c'est-à-dire un ensemble et une structure qui lui est associée.

chantiers de pédagogie mathématique

cahiers pour la formation permanente

édités par la Régionale Parisienne

de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

Bureau de la Régionale Parisienne de l'A.P.M.E.P.

Président: M. VILLIAUMEY, 1, avenue Molière, 77 - Montereau-Surville. Secrétaire: M. HAMEAU, 38, avenue du Général-de-Gaulle, 94 - Vincennes (Tél. 808-43-79.)

Trésorier: M. BLANZIN, 150, avenue Félix-Faure, Paris-15e (Tél. 250-16-41)
Pour tous versements, utilisez le compte courant postal au nom de la « Régionale Parisienne de l'A.P.M.E.P. ». Cc Paris. 25 108 63.

Parmi les publications de l'A.P.M.E.P.

- Charte de Chambéry, 1969, 1971, 1973, 1976, 1980, ..., étapes et perspectives d'une réforme de l'enseignement des mathématiques; date de l'édition : octobre 1968; une brochure de 32 pages, prix 2 F.
- Matériaux pour une histoire des nombres complexes, par Jean Itard, édition janvier 1969, 32 pages illustrées, prix 3 F.
- La mathématique parlée par ceux qui l'enseignent, premier recueil de 91 fiches (125 × 200 mm) contenant 64 notices relatives à plus de 100 mots de la langue mathématique usuelle : le premier dictionnaire réalisé par ses propres utilisateurs et que ceux-ci remettront continuellement au point selon l'évolution de la langue très vivante qu'est la mathématique parlée par ceux qui l'enseignent. En souscription : 20 F (voir p. 151).
- Un Bulletin spécial de l'A.P.M.E.P. (n° 269) daté juillet-août 1969 publiera un ensemble de textes relatifs à l'enseignement mathématique dans les classes de Sixième et Cinquième. Renseignez-vous auprès de votre « chantier » pour vous procurer cet important numéro (au moins 160 pages).

Les Journées des Chantiers

La Régionale parisienne de l'A.P.M.E.P. organise les 21 et 22 juin 1969 deux journées d'étude au Centre International d'Études Pédagogiques, à Sèvres (Hauts-de-Seine), sur le thème : formation permanente des maîtres et recherche pédagogique.

Si vous désirez y participer. renseignez-vous auprès de votre « Chantier » ou auprès du secrétariat.

Le Directeur de la publication: G. WALUSINSKI