CAHIER 6

chantiers de pédagogie mathématique

cahiers pour la formation permanente

Série 1. Initiation à la mathématique de base

OPÉRATEURS	1.21.
GROUPES	1.22.
GROUPE DE KLEIN	1.23.
GROUPES NUMÉRIQUES	1.24.

juin 1969

Régionale Parisienne

de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

fiche 1.21.

Opérateurs

Lois de composition externe

1. Notion d'opérateur.

Dans les *fiches* sur la logique, nous avons utilisé à plusieurs reprises le terme d'*opérateur* soit pour désigner des « connecteurs » reliant des propositions soit pour désigner le « foncteur » servant à nier une proposition (« non », « ne ... pas »).

Les opérateurs auxquels nous allons nous intéresser aujourd'hui seront de ce deuxième type. Ils ne seront pas « connecteurs » mais « transformateurs » comme l'est le « nom » qui fait changer la valeur de vérité de la proposition à laquelle on l'applique.

Considérons quelques *exemples*.

1.1. *Un jeu avec les blocs à caractéristiques multiples.*

Prenons un ensemble d'objets — par exemple des « blocs logiques » Hull-Dienes — en ne conservant que *deux couleurs* différentes (rouge, bleu) et *deux formes* différentes (triangle, carré) et définissons les trois consignes de jeu suivantes :

consigne F : « changer de forme »
consigne C : « changer de couleur »
consigne FC : « changer de forme *et* de couleur »

Le jeu consiste en ceci : étant donné un élément quelconque si la consigne est F on lui fait correspondre un élément qui s'en distingue par la forme et par la forme seulement, si la consigne est C on lui fait correspondre un élément qui s'en distingue par la couleur et par la couleur seulement.

Les consignes peuvent être matérialisées par des cartons portant l'indication voulue. Le jeu conduit à fabriquer des chaînes telles que :

triangle rouge	F	carré rouge
carré bleu	F	triangle bleu
triangle rouge	FC	carré bleu
triangle bleu	C	triangle rouge

Certains maîtres expliquent aux enfants que les consignes en cause pourraient être réalisées par des « machines ». Dans cette façon imagée de présenter les choses la caractéristique commune aux chaînes ci-dessus est qu'elles constituent toutes des triplets ordonnés qu'on peut schématiser comme suit :

(bloc logique)	(machine)	(bloc logique);
1	2	3

ou encore, dans une perspective active :

(entrée) (opération) (sortie).

1.2. *Une ronde.*

Traçons un cercle d'un mètre environ de diamètre sur le sol et repérons trois emplacements 1, 2, 3 équidistants sur ce cercle. Trois enfants A, B, C y prennent place. Ils peuvent changer de place, tous ensemble, en faisant dans le même sens soit un pas qui les décale d'un rang par rapport à la position de départ, soit deux pas qui les décalent de deux rangs; soit trois pas qui leur font faire un tour complet et revenir dans leur position de départ. Les trois consignes correspondantes sont : « un pas », « deux pas », « trois pas ».

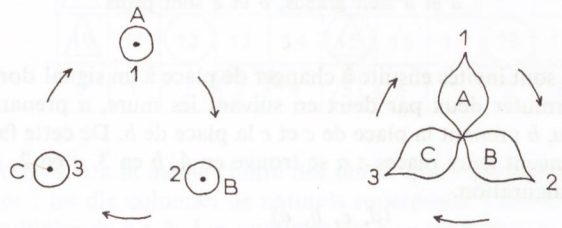


FIG. 141.

Nous définissons une situation de départ par la notation (A1, B2, C3) indiquant que A se trouve en 1, B en 2 et C en 3. Nous donnons la consigne « un pas ». Chaque enfant se déplace d'un pas et nous obtenons la situation d'arrivée (A2, B3, C1). Pour simplifier l'étude on peut opérer sur une représentation adéquate, en faisant tourner par exemple un trèfle découpé dans du carton (voir figure) à l'intérieur d'un disque.

Ici encore on a un schéma à trois termes tel que

(A1, B2, C3) (« deux pas ») (A3, B1, C2) pour la ronde

ou

(A1, B2, C3) (« 2/3 de tour ») (A3, B1, C2) pour le déplacement de la figure géométrique.

1.3. *Jeu d'ombre et de lumière.*

Considérons une ampoule électrique commandée par un interrupteur à deux positions. Quand on actionne le commutateur, si l'ampoule est allumée elle s'éteint,

si elle est éteinte elle s'allume. L'intervention de l'opération « actionner le commutateur » fait passer de l'un des états à l'autre.

A nouveau nous sommes en présence d'un triplet. Ici il revêt la forme suivante :

(état) (*action fonctionnelle*) (état)

1.4. *Jeu des quatre coins.*

Les quatre coins d'une cour sont repérés par les numéros 1, 2, 3, 4 inscrits dans le sens des aiguilles d'une montre.

Au début du jeu quatre enfants a, b, c, d occupent respectivement les places 1, 2, 3, 4; on note cette configuration (a, b, c, d).

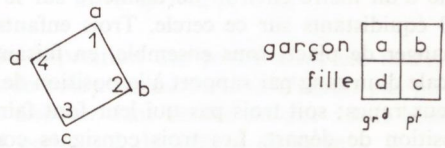


FIG. 142.

a et b sont des garçons, c et d des filles,
a et d sont grands, b et c sont petits

Les enfants sont invités ensuite à changer de place à un signal donné. Ils peuvent par exemple permuter deux par deux en suivant les murs, a prenant la place de d et d la place de a, b prenant la place de c et c la place de b. De cette façon les garçons et les filles échangent leurs places : a se trouve en 4, b en 3, c en 2, d en 1. On note la nouvelle configuration.

$$\begin{matrix} (d, & c, & b, & a) \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix}$$

Désignons par p_1 la correspondance qui est complètement décrite par la notation

$$p_1 = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & c & b & a \end{pmatrix}$$

Selon cette notation, p_1 est une *bijection* de l'ensemble $\{a, b, c, d\}$ sur lui-même telle qu'à a correspond d, à b correspond c, etc. Cette disposition est celle de la table de l'application bijective : en première ligne les éléments du *départ*, en deuxième ligne les éléments qui leur correspondent dans l'*arrivée*.

Les enfants peuvent également changer de place suivant la bijection p_2 définie par

$$p_2 = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \end{pmatrix}$$

(les grands et les petits échangent leurs places), ou suivant la bijection p_3

$$p_3 = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & d & a & b \end{pmatrix}$$

(le grand garçon prend la place de la petite fille, le petit garçon la place de la grande fille). On pourrait tout aussi bien écrire :

$$(a\ b\ c\ d)\ \ p_1\ \ (d\ c\ b\ a)$$

Remarque : on donnera le nom de *permutation* des lettres de $\{a, b, c, d\}$ à l'un des états, tel que $(a\ b\ c\ d)$, $(d\ c\ b\ a)$, etc., réservant le nom de *bijection* à l'action qui fait passer d'une permutation à une autre. Dans les anciens ouvrages, on avait la fâcheuse habitude de donner le même nom, qui était celui de permutation, aux états et aux actions qui les font se correspondre. La notion d'application bijective d'un ensemble sur lui-même éclaire une question qu'un vocabulaire imparfait compliquait.

1.5. *Des exemples à la notion.*

Analysons ces divers exemples en cherchant ce qu'ils ont de commun par delà leurs apparences diverses (processus d'abstraction). Dans tous les exemples, nous avons trois termes se présentant dans un ordre bien défini, ce qui nous a conduits à parler de « départ » et « d'arrivée ».

Le premier et le troisième terme sont de même « nature », c'est-à-dire qu'ils peuvent jouer des rôles semblables au sein d'une même classe d'équivalence. Dans le cas des blocs à caractéristiques multiples, par exemple, le premier terme est un bloc, le troisième également. Dans le cas de l'ampoule et de l'interrupteur, le premier terme est un état (« être allumée »), le troisième également (« être éteinte »). Dans chaque exemple, on peut donc considérer les termes de départ et d'arrivée (ou d'entrée et de sortie) comme éléments d'un même ensemble E.

Le terme intermédiaire est d'une nature différente de celle des termes extrêmes. Il « agit » sur le premier terme d'une façon bien définie d'où découle le troisième terme. A son propos nous avons parlé *d'opérateur*, *d'action fonctionnelle*, *de machine*, *de consigne*, *de déplacement*, tous termes qui évoquent une *action*. Nous pouvons unifier ces dénominations en employant l'expression « opérateur fonctionnel ».

Dans cette expression le mot « opérateur » rappelle le rôle actif joué par l'élément ainsi désigné, le mot « fonctionnel » indique que le résultat de son intervention est déterminé de façon unique, l'état de départ et l'opérateur étant fixés. Ainsi, dans l'exemple des blocs logiques, l'opérateur F fait correspondre au bloc carré le bloc triangulaire; de même, dans la ronde, l'opérateur « un tiers de tour » fait correspondre à la position marquée 2 la position marquée 3 et seulement celle-là.

Cependant les différents opérateurs que nous avons fait intervenir dans un même exemple sont de « nature » voisine. « Faire un pas », « Faire deux pas », « Faire trois pas » sont des consignes. On peut donc considérer que les opérateurs en question sont les éléments d'un même ensemble que nous appellerons G et qui sera, dans ce dernier exemple, l'ensemble des consignes données.

Exercice 21.1. — Recherchez dans chacun des exemples 1.1 à 1.5 quels sont les ensembles ayant fourni les opérateurs mentionnés.

En *résumé*, dans chaque exemple étudié, nous faisons obligatoirement appel à *deux* ensembles.

Le premier ensemble est formé par les éléments de départ et d'arrivée. Ces

éléments correspondent à ce qu'on peut appeler des « états » (exemple « être éteint », « être allumé » ou encore « occuper la position 1, 2, 3, 4 », « occuper la position 4, 3, 2, 1 »).

Le deuxième ensemble est formé par les éléments appelés à « agir » sur lesdits « états ». Ces éléments sont des opérateurs fonctionnels. Les différents opérateurs de cet ensemble sont appelés à agir tour à tour sur les différents états de l'ensemble précédent. Ils le font suivant les modalités qui leur sont propres et qui les caractérisent. Dans l'exemple des permutations, p_1 agit d'une certaine façon, p_2 d'une autre.

Pour que les modalités d'intervention de chaque opérateur soient parfaitement déterminées il faut définir, pour chaque état de départ et chaque opérateur, l'état d'arrivée correspondant. C'est bien ce que nous avons fait quand, dans le cas des permutations par exemple, nous avons posé

$$p_1 = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & c & b & a \end{pmatrix}$$

qui nous indique que p_1 fait correspondre d à a, c à b, b à c, a à d. Si on donne l'état d, c, b, a et qu'on fasse agir p_1, on sait qu'on obtiendra a, b, c, d puisque p_1 fait correspondre d à a, etc.

2. Loi de composition externe

Les considérations qui précèdent débouchent sur la notion de *loi de composition externe*.

Appelons a un élément quelconque de l'ensemble E défini tout à l'heure, appelons α un élément quelconque de l'ensemble G (ce dernier ensemble est parfois appelé « domaine des opérateurs » ou ensemble des opérateurs).

A chaque couple (a, α) correspond un élément b de E, ce qui se note :

$$(a, \alpha) \mapsto b$$

Les couples (a, α) sont extraits du produit cartésien $E \times G$:

$$(a, \alpha) \in E \times G$$

Appelons $\perp$ l'opération qui se trouve définie par la façon dont agissent les opérateurs considérés. A chaque couple (a, α) élément de $E \times G$ correspond un b (et un seul) élément de E, on est donc ici encore en présence d'une application, l'application $\perp$ de $E \times G$ dans E, ce qui se note

$$\perp : E \times G \to E$$
$$(a, \alpha) \mapsto a \perp \alpha = b$$

(Nous avons utilisé ce type de notation p. 80 à propos des lois de composition interne).

On donne à l'opération $\perp$ définie ci-dessus le nom d'*opération externe* parce que les ensembles E et G sont distincts (les opérateurs ne sont pas éléments de E). De même on appelle « *loi de composition externe* » la loi qui permet d'associer à chaque couple (a, α) l'image b correspondante.

Exercice 21.2. — Établissez la loi de composition externe correspondant au jeu du § 1.1 où

E = {triangle rouge, triangle bleu, carré rouge, carré bleu}

G = {F, C, FC}

Présentez la loi, notée $\top$, sous forme d'une table à double entrée.

Exercice 21.3. — Même question pour le jeu des quatre coins du § 1.4. Définissez l'ensemble E′ des états et l'ensemble G′ des opérateurs, notez $\top'$ cette loi. Comparez la table de composition de $\top'$ à la table de $\top$ dans l'exercice précédent.

Corrigés

Exercice 21.2 :

cb = carré bleu

E	*cb*	*tb*	*cr*	*tr*
	cr	*tr*	*cb*	*tb*
	tb	*cb*	*tr*	*cr*
	tr	*cr*	*tb*	*cb*
	$\top$	F	C	FC
			G	

Exercice 21.3 :

E′ = {*abcd*, *dcba*, *badc*, *cdab*}

G′ = {p_1, p_2, p_3}

Table de la loi externe $\top'$:

cdab	*badc*	*dcba*	*abcd*
badc	*cdab*	*abcd*	*dcba*
dcba	*abcd*	*cdab*	*badc*
abcd	*dcba*	*badc*	*cdab*
$\top'$	p_1	p_2	p_3

La comparaison des tables de $\top$ et de $\top'$ montre que l'une peut être déduite de l'autre par la « clef de correspondance » ou le « dictionnaire » suivant :

$\top \mapsto \top'$

F	p_2	*abcd*	*tr*
C	p_1	*dcba*	*tb*
FC	p_3	*badc*	*cr*
		cdab	*cb*

fiche 1.22.

Opérateurs

Groupes

1. Étude des opérateurs.

Les exemples d'opérateurs étudiés dans la fiche précédente nous ont permis de pressentir l'importance de cette notion qu'on trouve à l'œuvre dans un grand nombre de contextes variés. Il importe donc de pousser un peu plus avant leur étude.

Repartons pour cela du triplet fondamental « état, opérateur, état », qui met en évidence le rôle spécifique de l'opérateur au sein d'une chaîne d'états successifs résultant de déplacements, de transformations, etc.

Nous remarquons qu'un tel triplet ne va pas sans rappeler le triplet propre aux relations dans un ensemble, triplet qui comporte lui aussi deux termes extrêmes de même nature reliés par un terme intermédiaire représentatif du type de la relation considérée : (a, R, b) ou encore (aRb).

Cette remarque nous suggère une voie d'étude pour les opérateurs, proche de celle que nous avions suivie quand nous avons examiné les propriétés des relations. A propos des relations, nous nous étions demandé s'il n'existait pas des cas où l'on retrouvait, quel que soit a le premier terme, comme troisième terme le terme dont on partait : (a R a). Oui, avions-nous vu, et dans ce cas il y avait *reflexivité* et, dans le diagramme sagittal, une boucle en chaque point.

1.1. *Élément neutre.*

N'est-il pas pareillement possible dans une chaîne « état-opérateur-état » que l'état d'arrivée soit semblable à l'état de départ? Autrement dit qu'on ait :

$$(a, \alpha) \mapsto a \text{ (premier } a \text{ départ, second } a \text{ arrivée).}$$

Il faut pour cela que l'opérateur α soit tel qu'*il ne change pas* l'élément a sur lequel il opère et cela, quel que soit l'élément a choisi dans E. Un tel opérateur est facilement concevable, encore qu'il puisse apparaître comme tellement trivial qu'on ne doive pas s'en soucier. « Pourquoi introduire une « machine à ne rien faire » diront certains? Nous verrons par la suite l'utilité de cette introduction qui, comme c'est

le cas avec l'ensemble vide, se révèle rapidement nécessaire, si on veut être à même de traiter par des démarches et des énoncés généraux tous les cas — dont certains singuliers — qui peuvent se présenter.

Un tel opérateur porte le nom d'*opérateur neutre*. On le désigne parfois par la lettre *e*, initiale du mot allemand « Einheit » qui signifie « unité ».

L'opérateur e ($e \in G$) est *neutre* pour la loi de composition externe notée $\perp$ de $E \times G$ dans E si et seulement si, pour tout élément x de E,

$$x \perp e = x$$

En somme, comme nous le faisait remarquer un compagnon de chantier, l'opérateur neutre est semblable à un duplicateur, machine qui transmet les éléments qu'on lui confie sans les modifier.

Cet élément neutre vient naturellement prendre place dans le domaine des opérateurs. Par exemple, dans le cas des blocs à caractéristiques multiples, à l'ensemble $G = \{F, C, FC\}$ des trois opérateurs précédemment introduits vient se substituer le nouvel ensemble d'opérateurs $H = \{F, C, FC, e\}$.

1.2. *Élément inverse d'un élément donné.*

A propos des relations dans l'ensemble E nous avons étudié la *symétrie*. Il y avait symétrie quand la relation était vérifiée *dans les deux sens* (aller et retour); on avait alors aussi bien a R b que b R a.

En matière d'opérateur, étant donné un élément a et un opérateur α, on a, en règle générale :

$$(a, \alpha) \mapsto b \quad (a \text{ dans le départ, } b \text{ dans l'arrivée})$$

Par analogie avec ce qui vient d'être dit, on est conduit à se demander si on ne pourrait pas envisager le « retour » après l' « aller », ce qui permettrait de *revenir au point de départ*. Pour cela il faudrait trouver, dans le domaine des opérateurs, un opérateur β tel que

$$(b, \beta) \mapsto a.$$

Examinons si c'est le cas dans les exemples étudiés précédemment.

Prenons le jeu sur les blocs à caractéristiques multiples. Considérons la transformation :

(triangle rouge, F) $\mapsto$ carré rouge.

Pour retrouver le triangle rouge à partir du carré rouge il faut changer la forme, c'est-à-dire faire appel à F :

(carré rouge, F) $\mapsto$ triangle rouge.

L'opérateur que nous cherchons se trouve dans l'ensemble des opérateurs; c'est F lui-même.

Quand un premier opérateur appliqué à un élément de départ donne un certain élément d'arrivée et qu'un second opérateur appliqué à cet élément d'arrivée donne l'élément initial, on dit que ces deux opérateurs sont des opérateurs *inverses*.

> Si l'opérateur α ($\alpha \in G$) est tel que pour la loi de composition externe notée $\perp$ de $E \times G$ dans E on ait $x \perp \alpha = y$ et s'il existe dans G un opérateur β, tel que pour tout x ($x \in E$) $y \perp \beta = x$, alors les opérateurs α et β sont dits *inverses* pour l'opération $\perp$.

L'expression d'opérateurs inverses peut surprendre. Elle va tout de suite s'éclairer par la considération d'une « chaîne » faisant intervenir successivement plusieurs opérateurs.

1.3. *Opérateurs successifs d'effet équivalent à un opérateur unique.*

Restons dans le domaine des changements de forme et de couleur et désignons les blocs par leurs initiales (*cr*, par exemple, désignant carré rouge). Voici une chaîne où interviennent successivement les *deux* opérateurs F, FC :

$$(cr,\ \mathrm{F}) \mapsto tr$$
$$(tr,\ \mathrm{FC}) \mapsto cb$$

Partant de *cr*, on aboutit à *cb*. Mais nous savons qu'on peut directement obtenir *cb* en appliquant à *cr* l'opérateur C qui change la couleur. On peut donc substituer à la succession des opérateurs F et FC, l'opérateur *unique* C.

Est-ce fortuit?

Examinez la question, vous verrez que non. Dans tous les cas, c'est-à-dire *quel que soit l'élément dont on parte*, C a un effet équivalent à F et FC appliqués successivement. En terme de « machines », on dira que C « fait le même travail » que les machines F et FC placées en série, c'est-à-dire l'une à la suite de l'autre, l'entrée de la seconde étant approvisionnée par la sortie de la première. S'il s'agit de déplacements on pourra parler de « *raccourci* ».

Considérons d'autres associations en série d'opérateurs, par exemple l'association FC, FC.

Complétez vous-même la chaîne

$$(cr,\ \mathrm{FC}) \mapsto \ldots\ldots$$
$$(\ldots\ldots,\ \mathrm{FC}) \mapsto \ldots\ldots$$

Comparez l'élément d'arrivée avec l'élément de départ (*cr*). Que constatez-vous?

Quel opérateur unique a le même effet que FC et FC?

Vous avez trouvé que cet opérateur est l'opérateur neutre *e;* et ainsi commence à apparaître l'intérêt qu'il y a à introduire cet opérateur « trivial ».

Nous pouvons traduire ces différents résultats sous forme d'un tableau tel que celui-ci, que vous êtes prié de compléter

association de deux opérateurs	*opérateur unique de même effet*
F, F	*e*
FC, F	C
FC, C	F

etc.

On peut également porter les résultats sur un tableau à double entrée analogue à celui qu'on utilise quand on fait le produit cartésien H × H, et cela afin de n'oublier aucun couple susceptible d'être formé à l'aide des éléments de H. Naturellement parmi ces éléments de H nous devons faire figurer l'élément neutre. D'où le tableau :

	FC	FC	C	F	*e*
deuxième	C	C	FC	*e*	F
terme	F	F	*e*	FC	C
	e	*e*	F	C	FC
•		*e*	F	C	FC
		(premier terme)			

Ce mode de présentation montre tout de suite qu'en faisant intervenir successivement deux opérateurs nous réalisons une *composition interne au sein de l'ensemble H* des opérateurs. Le tableau précédent définit complètement cette loi de composition interne : si nous convenons de noter cette composition par un point (•), nous pourrons écrire, par exemple :

$$F \bullet F = e;\ FC \bullet e = FC;\ \text{etc.}$$

2. Étude des « systèmes d'opérateurs ».

Proposons-nous maintenant d'étudier cette loi de composition interne (cette opération sur des opérateurs) en tant que telle. En nous plaçant dans le cas particulier ci-dessus, nous poserons les *questions* suivantes :

a) L'opération (•) est-elle associative?

b) Existe-t-il dans l'ensemble H des opérateurs un élément neutre pour l'opération (•)?

c) Existe-t-il. pour chaque opérateur de H, un opérateur de H capable « d'annuler » (d'effacer) l'effet de la première intervention?

Réponses.

a) Oui, l'opération est *associative*. On peut le vérifier sur un exemple :

$$(F \bullet C) \bullet F = F \bullet (C \bullet F)^*$$

(*) Dans cette écriture, les parenthèses indiquent qu'on commence par exécuter les opérations figurant entre parenthèses.

Calcul du premier membre :

$$F \bullet C = FC \quad \text{puis} \quad FC \bullet F = C.$$

Calcul du deuxième membre :

$$C \bullet F = FC \quad \text{puis} \quad F \bullet FC = C.$$

Ceci n'est qu'un exemple. Pour affirmer l'associativité, il faudrait vérifier dans tous les cas (leur nombre est nécessairement fini puisque H l'est). On peut aussi remarquer que l'un de ces opérateurs réalise une bijection de l'ensemble $\{cr, cb, tb, tr\}$ sur lui-même et que la composition interne dans H, notée (•), ayant la signification d'une composition de bijections est associative puisque toute composition d'applications l'est.

b) On constate, de la même façon, que *e* étant un opérateur neutre pour la loi externe notée ⊥, e *est un élément neutre pour l'opération interne* (•) *dans H*. Sur la table de l'opération (•), on vérifie d'ailleurs en lisant la ligne de *e* ou la colonne de *e* que *e* est bien neutre pour la loi (•).

c) Oui, pour tout opérateur, il existe un opérateur annulant l'effet du premier. Autrement dit, pour tout opérateur il est possible de le composer selon la loi (•) avec un opérateur pour trouver finalement l'opérateur neutre. Pour F, c'est F : $F \bullet F = e$; pour C, c'est C : $C \bullet C = e$; pour FC, c'est FC : $FC \bullet FC = e$. Pour *e*, c'est aussi *e*: on a l'égalité « supertriviale » $e \bullet e = e$ ce qui peut se traduire par l'expression « par deux fois ne rien faire, c'est toujours ne rien faire ».

Comme on le voit, ce que nous étudions maintenant c'est un « système » d'opérateurs. Nous employons ce terme de « système », provisoirement, parce qu'il appartient à la langue courante et qu'il évoque bien l'existence d'interactions au sein d'un même ensemble. Ce « système » est caractérisé d'une part par les éléments auxquels il fait appel définis par l'*ensemble H*, d'autre part par l'*opération interne* qui traduit « l'articulation » des divers éléments en présence.

Pour noter ce système, nous devons donc faire appel au *couple* (ensemble, opération interne), soit, dans notre exemple, au couple (H, •).

Quelles sont les particularités du système étudié? Nous en décomptons cinq :

1° Les éléments et l'opération en cause sont tels que l'opération (•) agissant sur tout couple d'éléments redonne un élément de l'ensemble. C'est le propre de l'opération interne. Nous ne rappelons donc cette particularité que pour mémoire. On dit parfois que le « postulat de fermeture » est vérifié (on opère en « circuit fermé »).

2° L'opération (•) est associative.

3° Il y a un élément neutre pour l'opération (•).

4° A tout élément, correspond un élément d'effet inverse (appelé *élément inverse*).

5° L'opération (•) est commutative, c'est-à-dire que pour tout couple (x, y) de l'ensemble

$$(x \bullet y) = (y \bullet x).$$

Les mathématiciens ont donné un nom spécial aux « systèmes » qui présentent les quatre premières des particularités énoncées ci-dessus : le nom de *groupe*.

En outre les groupes dont l'opération est commutative sont appelés *groupes commutatifs* ou groupes *abéliens* (en souvenir du mathématicien Niels Abel — 1811-1832 — considéré comme un des précurseurs de la théorie des groupes).

Une loi de composition interne (notée $*$ par exemple) ayant été définie sur un ensemble E, celui-ci est muni par la loi $*$ d'*une structure de groupe* si et seulement si

1° la loi $*$ est *associative :*

$$\forall(x, y, z) \quad (x, y, z) \in E \times E \times E \quad (x*y)*z = x*(y*z);$$

2° il existe un élément neutre pour la loi $*$:

$$\exists e, \quad e \in E, \quad \forall x, \quad x \in E, \quad x*e = e*x = x;$$

3° tout élément de E a un inverse pour la loi $*$:

$$\forall x, \quad x \in E, \quad \exists x', \quad x' \in E, \quad x*x' = x'*x = e.$$

Si, de plus, la loi $*$ est commutative, le groupe noté (E, $*$) est dit *commutatif* ou *abélien.*

Remarques: Si une autre loi de composition interne (notée $\perp$ par exemple) est définie sur E et si cette loi vérifie les axiomes de la structure de groupe, l'ensemble E aura été muni par les lois $*$ et $\perp$ de deux structures de groupe distinctes. On ne confondra pas le groupe (E, $*$) et le groupe (E, $\perp$). L'un pourrait être abélien, l'autre pas.

Le nom d'Abel a été cité à propos de la théorie des groupes. Il serait injuste de ne pas citer celui d'Evariste Galois (1810-1831); c'est à lui que revient le mérite (entre autres) d'avoir dégagé la notion. A cette époque, les mathématiciens mouraient jeunes lorsqu'ils avaient du génie!

3. Étude du groupe d'ordre deux.

Ce que nous venons de faire à partir de l'ensemble $H = \{F, C, FC, e\}$ nous pouvons le refaire pour d'autres ensembles d'opérateurs à l'œuvre dans les exemples donnés au début de la *fiche 1.21.* C'est ce que nous allons faire pour terminer cette fiche à propos du groupe d'ordre deux (*).

Référons-nous au « jeu d'ombre et de lumière » de la précédente fiche. Les deux opérateurs à l'œuvre étaient : « tourner le bouton », « ne rien faire ».

Appelons T le premier de ces opérateurs, R le second

$$G_2 = \{T, R\}$$

(*) Un groupe est dit d'ordre *n* lorsque le cardinal de l'ensemble sur lequel est définie la loi de composition interne du groupe est égal à *n*.

L'opération interne ($\bullet$) associée à cet ensemble est définie par la façon dont agit tel ou tel couple de ces opérateurs intervenant successivement.

On a par exemple la chaîne :

(ampoule *éteinte*, T) $\mapsto$ amp. *allumée*

(amp. *allumée*, T) $\mapsto$ amp. *éteinte*

donc

$$(T \bullet T) = R;$$

de même

$$(R \bullet R) = R.$$

Vous vérifiez sans difficulté que

$$(T \bullet R) = T \quad \text{et} \quad (R \bullet T) = T$$

Vous pouvez dès lors dresser la table de composition de l'opération ($\bullet$). Faites-le.

Vérifiez l'associativité. Trouvez l'élément neutre.

Vérifiez que chaque élément possède un inverse. On a donc bien affaire à un groupe. Vous vérifiez en outre qu'il est commutatif.

Ce groupe sera noté (G_2, $\bullet$).

Un tel groupe se retrouve chaque fois qu'on a affaire à un « système » à deux positions (par exemple Haut /Bas) qui change de position chaque fois qu'on applique une certaine action qu'on peut désigner par le vocable « changer » et qui ne change pas de position quand on applique l'opérateur « rien ».

Ces deux opérateurs forment l'ensemble

$$G_2' = \{\text{« changer », « rien »}\}$$

Convenons pour simplifier l'écriture d'adopter le code suivant :

le signe 1 signifie « changer »,

le signe 0 signifie « ne rien changer ».

$$G_2' = \{1, 0\}$$

Vous vérifiez sans difficulté que la table de composition définissant l'opération notée ($*$) s'établit comme suit :

$$(1*1) = 0 \qquad (0*0) = 0$$
$$(1*0) = 1 \qquad (0*1) = 1$$

Vous noterez au passage que cette table ne diffère pas d'une table de vérité d'un des connecteurs logiques étudiés dans le *cahier 4*. Cherchez lequel.

Elle convient également pour transcrire la « règle des signes » dans la multiplication des entiers, ou pour transcrire la *règle de parité* dans l'addition de naturels pairs et impairs.

Sous la forme « squelettique » suivante :

$$G_2' = \{1, 0\} \qquad \begin{array}{c|cc} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline * & 0 & 1 \end{array}$$

le groupe étudié $(G'_2, *)$ est en quelque sorte un « moule » prêt à recevoir tout contenu adéquat que l'on voudra, un « modèle » prêt à décrire toutes sortes de situations. C'est pourquoi, certains mathématiciens lui donnèrent, il y a quelques décennies, le nom de « groupe abstrait ». Expression abandonnée aujourd'hui, le caractère abstrait de toute notion mathématique n'étant plus contesté par personne.

Quant au « contenu » qui peut être versé dans ce « moule », il peut ne pas être évident. Prenons, par exemple, comme ensemble G''_2 celui des parties d'un singleton (ensemble à un seul élément). Si I est ce singleton,

$$G''_2 = \mathcal{P}(I) = \{I, \varnothing\};$$

prenons, comme loi de composition interne, la différence symétrique notée Δ dont la table est

I	I	$\varnothing$
$\varnothing$	$\varnothing$	I

Δ	$\varnothing$	I

Moyennant le recours au « dictionnaire » suivant :

$$\varnothing \leftrightarrow 0, \quad I \leftrightarrow 1, \quad \Delta \leftrightarrow *$$

on définit un isomorphisme du groupe (G''_2, Δ) sur le groupe $(G'_2, *)$. Ces deux groupes sont deux représentations distinctes de *la même structure :* on dira qu'à un isomorphisme prêt, (G''_2, Δ) et $(G', *)$ sont *le même groupe.*

Remarque : voici une autre façon de présenter cet isomorphisme. Il est possible de traduire toute égalité du type $I \Delta \varnothing = I$ qui a un sens dans G''_2 en une égalité qui a un sens dans G'_2.

$$\begin{array}{ccccc} & G''_2 & \rightarrow & G'_2 & \\ & I & \mapsto & 1 & \\ & \varnothing & \mapsto & 0 & \\ \text{Opération } \Delta & \downarrow & & \downarrow & \text{Opération } * \\ & I\Delta\varnothing & \mapsto & 1*0 & \end{array}$$

Ce *diagramme commutatif* (deux itinéraires équivalents pour aller du coin haut gauche au coin bas droit) exprime : cette bijection de G_2 sur G'_2 respecte les structures qu'y définissent les opérations Δ et $*$ respectivement.

fiche 1.23.

Groupes (suite)

Groupe de Klein

1. Étude de certains groupes d'ordre quatre.

Plus intéressants peut être encore que le groupe d'ordre deux étudié précédemment sont les groupes d'ordre quatre. Aussi allons-nous y consacrer la majeure partie de la présente fiche.

1.1. *Groupe « changement de forme et de couleur ».*

Il s'agit du groupe (H, •) où H = {F, C, FC, e}, l'opération (•) étant complètement définie par la table de composition donnée page 191. Nous connaissons bien désormais ce groupe et nous ne l'indiquons que pour mémoire.

1.2. *Groupe du « jeu des quatre coins ».*

Nous en avons amorcé l'analyse page 184. Nous adjoignons la bijection p_0

$$p_0 = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$$

(les enfants restent en place). L'ensemble C = $\{p_0, p_1, p_2, p_3\}$ des quatre bijections considérées est muni par la composition des bijections d'une loi de composition interne, notée $\uparrow$, qui munit C d'une structure de groupe. Nous l'appellerons le groupe (C, $\uparrow$).

Dans la chaîne « état-opérateur-état », nous aurons par exemple (voir *fiche 1.21*) :

$$\begin{array}{ccccc} (dcba) & p_1 & (abcd) & p_2 & (badc) \\ (dcba) & & p_3 & & (badc) \end{array}$$

donc :

$$p_1 \uparrow p_2 = p_3$$

Établissez le tableau complet de l'opération ($\uparrow$). Comparez-le à la table de composition de l'opération ($\bullet$) sur l'ensemble $\{F, C, FC, e\}$. Vous constatez la parfaite correspondance des deux tableaux et donc des deux lois, correspondance que vous pourrez matérialiser sous forme d'un *dictionnaire*, comme nous l'avons fait à propos du groupe d'ordre deux.

Ce dictionnaire définit une bijection de H sur C qui respecte les lois de composition dans H et C respectivement; construisez un diagramme commutatif sur le modèle de celui de la page 195. Cette bijection est un isomorphisme; *les groupes* (H, $\bullet$) et (C, $\uparrow$) sont *isomorphes*.

1.3. *Groupe des isométries du rectangle.*

Sur les deux faces d'une plaque rectangulaire (non carrée) découpée dans du carton, on a figuré (par des couleurs ou des hachures différentes) les quatre « quartiers »; recto et verso, un même « quartier » est marqué de la même façon. Chaque quartier de la plaque peut être numéroté 1°, 2°, 3°, 4° pour faciliter les explications suivantes.

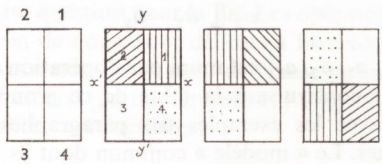


FIG. 143.

On peut appliquer de quatre façons différentes la plaque sur son « empreinte » dessinée sur une feuille de papier.

Pour dessiner cette empreinte, nous appliquons la plaque sur la feuille de papier et nous répétons en marge les numéros des quartiers. Nous désignons par r_0 l'application amenant 1° en 1, 2° en 2, etc.; par r_1 le retournement recto-verso de la plaque autour de l'axe de symétrie $y'y$ (le grand axe); par r_2 le retournement recto-verso de la plaque autour de l'axe de symétrie $x'x$ (le petit axe).

Si nous effectuons successivement r_1 puis r_2, quelle est la définition géométrique de l'application obtenue que nous noterons r_3?

Les quatre façons r_0, r_1, r_2, r_3 d'appliquer la plaque sur son empreinte sont appelées des *isométries* car elles laissent les longueurs invariantes.

$$L = \{r_0, r_1, r_2, r_3\}$$

est l'ensemble des isométries du rectangle (il n'y a pas d'autre manière d'appliquer le rectangle sur son empreinte). La composition de ces applications, notée ($\div$) munit L d'une structure de groupe. Vérifiez-le en construisant la table de l'opération ($\div$).

1.4. *Groupe des quatre opérations.*

Définissons les quatre bijections suivantes de $\mathcal{Q}^*$ sur $\mathcal{Q}^*$ (on sait que $\mathcal{Q}^*$ désigne l'ensemble des rationnels privé de zéro) :

a_0 est l'*identité;* $\quad a_0 : x \mapsto x;$

a_1 est la *symétrisation;* $\quad a_1 : x \mapsto -x;$

a_2 est l'*inversion;* $\quad a_2 : x \mapsto \dfrac{1}{x}$

a_3 est la « *symversion* » (1); $a_3 : x \mapsto -\dfrac{1}{x}$

Ces bijections peuvent évidemment être composées :

$$x \overset{a_3}{\longmapsto} -\frac{1}{x} \overset{a_1}{\longmapsto} \frac{1}{x}$$

$$x \xmapsto[a_2]{} \frac{1}{x}$$

Ce que nous pourrons écrire :

$$a_3 \downarrow a_1 = a_2$$

L'ensemble $A = \{a_0, a_1, a_2, a_3\}$ est muni par l'opération notée $\downarrow$ d'une structure de groupe. Vérifiez-le en construisant la table de ce groupe.

Le rapprochement avec les exemples des paragraphes précédents s'impose : *ces groupes sont isomorphes.* Le « modèle » commun dont ils sont des représentations distinctes est le groupe, $(K, *)$ où $K = \{x, y, z, t\}$ et où $*$ désigne la loi de composition définie par la table :

t	t	z	y	x
z	z	t	x	y
y	y	x	t	z
x	x	y	z	t
$*$	x	y	z	t

Ce groupe, dont on pressent désormais l'importance, est souvent désigné par son nom allemand de *Vierergruppe* (de la racine « vier », « quatre » en allemand) ou encore de « groupe de Klein » en souvenir de Félix Klein (1849-1925) autre pionnier de la théorie des groupes en particulier pour leur application à la géométrie.

1.5. *Autres groupes isomorphes.*

Dans toutes les représentations du groupe de Klein, on a affaire à une « situation » caractérisée par quatre états possibles et quatre opérateurs. Désignons les états par AB, $\overline{A}B$, $A\overline{B}$, $\overline{A}\overline{B}$; repérons-les par quatre cases marquées de leurs noms (fig. 144).

(*) Les mathématiciens n'ont pas de nom pour cette bijection; un humoriste nous propose « symversion »; mais, est-il bien utile d'ajouter ce barbarisme au vocabulaire usuel?

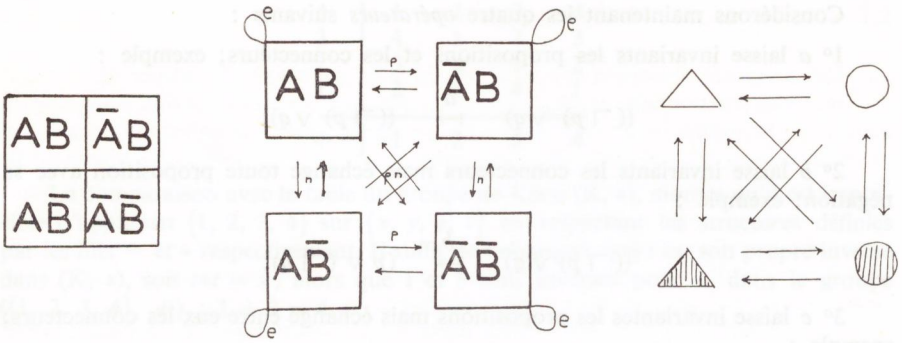


FIG. 144.

Désignons les opérateurs par *e*, *p*, *n* et *pn* représentés sur la figure par des flèches qui permettent de passer de tel état à tel autre. Ce schéma nous aidera à découvrir d'autres exemples de représentation du groupe de Klein.

Convenons, par exemple, de poser que chaque état est une proposition au sens grammatical du mot :

AB = Anne aime Bernard;

$\overline{A}B$ = Anne est aimée de Bernard;

$A\overline{B}$ = Anne n'aime pas Bernard;

$\overline{A}\overline{B}$ = Anne n'est pas aimée de Bernard.

Les opérateurs nécessaires pour passer d'une de ces propositions à une autre seront :

— l'opérateur (*p*) qui rend *passive* une proposition *active* et qui rend *active* une proposition *passive ;*

— l'opérateur (*n*) qui rend *négative* une proposition *positive* et qui rend *positive* une proposition *négative ;*

— l'opérateur (*pn*) qui « combine » les deux précédents rendant par exemple, *passive et négative* une proposition *active et positive ;*

— l'opérateur (*e*) qui ne change rien.

On aura, par exemple :

$$(A\overline{B},\ p) \mapsto \overline{A}\overline{B} \qquad (\overline{A}\overline{B},\ pn) \mapsto AB$$

Remarque : Comme le fait remarquer Piaget dans « Le structuralisme » (PUF, p. 29), ces modèles simples de groupe à quatre éléments sont accessibles aux enfants dès 7-8 ans.

Autre exemple (peut-être plus difficile et qu'un lecteur pressé pourrait sauter sans inconvénient). Dans un domaine voisin, celui de la logique, nous pouvons construire une représentation du groupe de Klein moins évidente mais instructive. Considérons comme états les assemblages que nous pouvons réaliser avec deux propositions (au sens de la logique) *p* et *q*, leurs négations (notées $\neg p$, $\neg q$) et les connecteurs logiques $\wedge$ et $\vee$ (qui signifient *et*, *ou* respectivement). Par exemple, nous pouvons considérer comme état initial une expression telle que $(p \vee q)$, $((\neg p) \vee q)$, etc.

Considérons maintenant les quatre *opérateurs* suivants :

1° a laisse invariants les propositions et les connecteurs; exemple :

$$((\neg p) \vee q) \overset{a}{\mapsto} ((\neg p) \vee q);$$

2° b laisse invariants les connecteurs mais échange toute proposition avec sa négation; exemple :

$$((\neg p) \vee q) \overset{b}{\mapsto} (p \vee (\neg q);$$

3° c laisse invariantes les propositions mais échange entre eux les connecteurs; exemple :

$$((\neg p) \vee q) \overset{c}{\mapsto} ((\neg p) \wedge q);$$

4° d échange toute proposition avec sa négation en même temps qu'elle échange entre eux les connecteurs; exemple :

$$((\neg p) \vee q) \overset{d}{\mapsto} (p \wedge (\neg q)).$$

L'exemple choisi présente cet intérêt que la table de vérité de $((\neg p) \vee q)$ est justement celle de l'implication notée $(p \Rightarrow q)$. Construisons les tables de vérité des quatre états considérés de $(p \Rightarrow q)$ et de ses transformés par a, b, c, d respectivement.

p q	par a $p \Rightarrow q$ $(\neg p) \vee q$	par b $p \vee (\neg q)$	par c $(\neg p) \wedge q$	par d $p \wedge (\neg q)$
1 1	1	1	0	0
1 0	0	1	0	1
0 1	1	0	1	0
0 0	1	1	0	0

L'opérateur a ne transforme rien. L'opérateur b remplace $(p \Rightarrow q)$ par $(q \Rightarrow p)$ c'est-à-dire l'*implication réciproque* ou *converse*. L'opérateur c remplace $(p \Rightarrow q)$ par la négation de sa réciproque, $\neg (q \Rightarrow p)$. L'opérateur d remplace $(p \Rightarrow q)$ par sa négation $\neg (p \Rightarrow q)$.

1.6. *Autre groupe d'ordre quatre.*

Les exemples précédents ne doivent pas laisser croire que tout groupe d'ordre quatre est isomorphe au groupe de Klein. On le vérifiera aisément en étudiant les rotations qui appliquent un carré sur lui-même en un quart de tour, deux quarts de tour, trois quarts de tour, quatre quarts de tour. La signification de la table suivante est évidente :

4	1	2	3	4
3	4	1	2	3
2	3	4	1	2
1	2	3	4	1
+	1	2	3	4

La comparaison avec la table du groupe de Klein (K, $*$), montre qu'il est impossible d'appliquer $\{1, 2, 3, 4\}$ sur $\{x, y, z, t\}$ en respectant les structures définies par les lois $+$ et $*$ respectivement. Il suffit de remarquer que t est son propre inverse dans (K, $*$), soit $t*t = x$; alors que 1 et 3 sont inverses pour $+$ dans le groupe $(\{1, 2, 3, 4\}, +)$: $1 + 3 = 4$.

2. Réflexions générales sur les groupes.

Les quelques indications données dans le présent *cahier* sur les groupes, bien que sommaires, nous permettent de présenter quelques réflexions à leur sujet.

2.1. *Universalité des groupes.*

Une première remarque concerne ce qu'on pourrait appeler l'*universalité des groupes.*

Nous avons vu, par exemple, le groupe de Klein à l'œuvre dans des disciplines variées comprenant la *géométrie* (groupes de déplacements), la *combinatoire* (groupes de permutations), l'*algèbre* (groupes d'applications), la *linguistique*, la *logique.*

Le groupe apparaît donc comme un facteur d'unité au sein de la diversité. Cependant on doit noter, comme le signalait déjà Elie Cartan il y a environ trente ans (cité par A. Chatelet dans « Arithmétique et Algèbre modernes », P.U.F. 1966) que la parenté entre des notions particulières et « concrètes » telles que celles mentionnées précédemment, n'est apparue que tardivement et le concept de *groupe abstrait* n'a été explicité qu'au XIXe siècle.

Mais, dira-t-on, à quoi est imputable cette universalité?

Piaget, dans son ouvrage, sur le structuralisme (P.U.F., 1968), pose la question et y répond de la façon suivante (pp. 18, 19, 20). La première raison, selon lui, tient à ce que le groupe s'intéresse non pas aux objets mais aux actions qu'on peut exercer sur les objets et plus précisément aux coordinations entre ces actions, notamment *a*) la possibilité d'un retour au point de départ (opération inverse) et *b*) la possibilité d'atteindre un même but par des chemins différents et sans que ce point d'arrivée soit modifié selon l'itinéraire parcouru (associativité).

Par exemple, indique Piaget, « l'ensemble des déplacements dans l'espace forme un groupe (puisque deux déplacements successifs sont encore un déplacement, puisqu'un déplacement peut être annulé par le déplacement inverse ou « retour », etc.) ».

La seconde raison tient à ce que le groupe est un instrument essentiel de transformations, mais, ajoute Piaget, « de transformations rationnelles qui ne modifient pas tout à la fois et dont chacune est solidaire d'un invariant : c'est ainsi que le déplacement d'un solide dans l'espace usuel laisse inchangées ses dimensions, que la répartition d'un tout en fractions laisse invariante la somme totale, etc. ».

2.2. *Niveaux successifs d'abstraction.*

La deuxième remarque concerne les niveaux successifs d'abstraction.

Si, dans une première étape, la pensée s'intéresse aux objets et aux états, s'efforçant de les identifier, de les mettre en correspondance entre eux en vue de classements et de sériations; si, dans une deuxième étape, les opérations reliant les objets ou les états sont elles-mêmes prises comme sujets d'études — c'est-à-dire qu'on s'efforce de les identifier, de les mettre en correspondance entre elles, etc., finalement on recherche ce qu'on peut appeler les lois de totalité des « systèmes » d'opérations c'est-à-dire des lois qui assurent la coordination et la cohérence des diverses opérations intervenant au sein d'un même domaine.

On est bien là au niveau le plus élevé d'un cheminement de la connaissance collective qui ne fait d'ailleurs que refléter les étapes de la formation de l'intelligence individuelle depuis la petite enfance jusqu'à l'adolescence. La dernière des étapes du développement de l'intelligence est atteinte à l'époque de l'adolescence (stade hypothético-déductif) quand l'enfant devient capable de raisonner sur le raisonnement lui-même considéré comme une totalité.

BIBLIOGRAPHIE

Z. P. Dienes, E. W. Golding. — *La géométrie par les transformations, groupes et coordonnées*, O.C.D.L.

Daniel Duclos. — Le groupe à l'école primaire. *Bulletin de l'A.P.M.E.P.*, n° 260.

fiche 1.24.

Opérateurs et groupes numériques

Avant d'en terminer avec les opérateurs et les groupes il nous reste une importante question à traiter qui aura le mérite de nous faire revenir au domaine familier de l'arithmétique.

Nous avons gardé cette question pour la fin. Les opérateurs numériques, en effet, bien que familiers à chacun de nous, sont délicats à bien comprendre dans la multiplicité de leurs aspects. Aussi nous a-t-il paru de bonne pédagogie d'étudier d'abord, de façon intégrée, les opérateurs non numériques et les groupes qu'ils forment quand on les articule en « totalités » structurées.

1. Opérateurs numériques.

Considérons un segment [AB]; il a une certaine longueur; faisons lui correspondre un segment $[A_1B_1]$ de longueur triple, considérons un segment [CD] et le segment $[C_1D_1]$ trois fois plus grand. On dit qu'on a multiplié [AB] par trois, [CD] par trois.

L'analogie avec les opérations externes mentionnées dans la fiche précédente est claire. Ici aussi nous avons affaire à une transformation qui opère sur un segment pour donner quelque chose de différent mais de même « classe » (un segment).Nous retrouvons le triplet (état — *opérateur* — état), l'opérateur étant la machine qui « multiplie par 3 ».

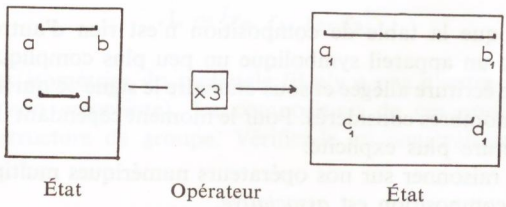


FIG. 145.

On pourrait aussi bien utiliser une autre machine, de même espèce, par exemple la machine qui « double » (ou qui « multiplie par 2 ») ou encore la machine qui « réduit de moitié », c'est-à-dire qui « multiplie par 1/2 ».

Pour représenter ce genre d'opérateurs qui fait appel à des nombres et à une certaine façon de faire jouer ces nombres, on peut songer à rappeler dans le symbole choisi le nombre utilisé et, d'autre part, un signe spécifique marquant la façon dont ce nombre opère. Ici on utilisera le signe de la multiplication ($\times$). Les opérateurs mentionnés à l'instant s'écriront alors :

$\times$ 3 pour l'opérateur « multiplie la longueur par 3 »,

$\times$ 2 pour l'opérateur « multiplie la longueur par 2 »,

$\times$ 1/2 pour l'opérateur « multiplie la longueur par 1/2 »,
et en généralisant, n étant un nombre positif,

$\times$ n pour l'opérateur « multiplie la longueur n fois ».

De tels opérateurs sont appelés *opérateurs numériques* car ils sont issus des ensembles de nombres.

On peut à leur propos se poser des questions analogues à celles que nous nous sommes posées dans les *fiches* précédentes à propos des autres opérateurs. En premier lieu nous nous demandons s'il est possible d'associer plusieurs opérateurs arithmétiques de même nature qui interviennent en série dans des chaînes « état-*opérateur*-état-*opérateur*-état ».

Exemple : Tout à l'heure l'opérateur $\times$ 3 agissant sur [AB] donnait $[A_1B_1]$, ce que nous pouvons écrire

$$([AB], \times 3) \mapsto [A_1B_1]$$

Faisons agir l'opérateur $\times$ 2 sur $[A_1B_1]$, nous obtenons $[A_2B_2]$, de même espèce que [AB].

$$([A_1B_1], \times 2) \mapsto [A_2B_2]$$

Pouvons-nous trouver un opérateur unique ($\times$ n) qui agissant sur [AB] donne $[A_2B_2]$?

$$([AB], \times n) \mapsto [A_2B_2]$$

Nous connaissons la réponse. C'est l'opérateur ($\times$ 6). Nous pouvons donc considérer que l'opérateur ($\times$ 6) est l'équivalent du composé des opérateurs ($\times$ 3) et ($\times$ 2). Notant cette composition par un point ($\bullet$), nous pouvons écrire :

$$(\times 3)\bullet(\times 2) = (\times 6)$$

On remarque que la table de composition n'est rien d'autre que la table de multiplication avec un appareil symbolique un peu plus compliqué. On pourra par la suite adopter une écriture allégée et sous-entendre le signe $\times$ qui indique le caractère multiplicateur des nombres considérés. Pour le moment cependant il n'est pas mauvais de conserver l'écriture plus explicite.

Continuons à raisonner sur nos opérateurs numériques multiplicatifs et demandons-nous si leur composition est *associative*.

La réponse, vous l'avez deviné, est « oui ». Imaginons qu'après avoir multiplié

le segment [AB] de tout à l'heure par 3 et le résultat par 2, obtenant $[A_2B_2]$, nous multiplions $[A_2B_2]$ par 5 obtenant $[A_3B_3]$. L'opérateur unique permettant de passer de [AB] à $[A_3B_3]$ s'obtient en formant

$$((\times 3)\bullet(\times 2))\bullet(\times 5)$$

c'est-à-dire

$$(\times 6)\bullet(\times 5) = (\times 30).$$

Recommençons la chaîne avec les mêmes opérateurs mais en ne les associant pas de la même façon. Cette fois l'opérateur unique s'obtiendra comme ceci :

$$(\times 3)\bullet((\times 2)\bullet(\times 5))$$

c'est-à-dire

$$(\times 3)\bullet(\times 10) = (\times 30).$$

Cette vérification met en évidence le fait suivant : l'associativité de la composition des opérateurs numériques résulte de l'associativité de la multiplication de ces nombres.

Autre question : y a-t-il parmi les opérateurs à notre disposition un opérateur *neutre*, c'est-à-dire un opérateur qui ne change pas la longueur du segment sur lequel il opère?

Oui. C'est l'opérateur $(\times 1)$.

Enfin, existe-t-il dans tous les cas un opérateur capable d'annuler l'effet de l'opérateur avec lequel il est composé! La réponse est « oui », à condition qu'on puisse puiser dans les rationnels et qu'on s'abstienne d'utiliser l'opérateur $(\times 0)$.

Par exemple, l'opérateur annulant l'effet de l'opérateur $(\times 3)$ est l'opérateur $(\times 1/3)$; celui annulant l'effet de l'opérateur $(\times n)$ est $(\times 1/n)$. On a :

$$(\times 3)\bullet(\times 1/3) = (\times 1) = e \text{ (élément neutre)}$$

$$(\times n)\bullet(\times 1/n) = (\times 1) \text{ avec la condition } n \neq 0.$$

2. Généralisations.

Au lieu de considérer l'effet des nombres multiplicateurs sur des longueurs de segments on peut étudier cet effet sur des nombres sans se référer pour ceux-ci à un contexte précis, des nombres en quelque sorte anonymes. Il n'y aura plus alors dans les chaînes « état-*opérateur*-état » que des nombres. Mais leur rôle sera différent : le premier nombre sera le nombre de départ avec un rôle passif, ce qu'indique d'ailleurs le terme *multiplicande* par lequel on le désigne et qui vient du latin « multiplicandus » (devant être multiplié), le deuxième nombre sera le *multiplicateur*, c'est-à-dire en quelque sorte l'élément actif, enfin le troisième nombre sera le nombre d'arrivée, de même nature que le nombre de départ.

Dans l'écriture courante d'une telle opération, rien ne permet de distinguer la différence de rôles entre multiplicande et multiplicateur puisqu'on place le signe $\times$ entre les deux nombres, suivant l'écriture même adoptée pour désigner la composition interne de ces deux nombres : exemple 3×5. De plus, comme l'opération est

commutative, on écrit aussi bien 5×3 que 3×5 ce qui aboutit à complètement masquer le rôle multiplicateur assigné à 5 (dans 3×5).

On peut encore présenter ce rôle des opérateurs multiplicatifs d'une autre façon en utilisant la notion d'application (cf. fiche 1.10, p. 75). Partons de l'ensemble $\mathcal{Q}$ des rationnels; soit h_5 l'application de $\mathcal{Q}$ dans $\mathcal{Q}$ définie par :

$$h_5 : \mathcal{Q} \to \mathcal{Q}$$
$$x \mapsto y = h_5(x) = x \times 5$$

Voici une table qui, pour quelques valeurs de x, donne les valeurs correspondantes de y:

x	...	$-\frac{3}{2}$	-1	0	1	$\frac{3}{2}$	2	10	....
y	...	$-\frac{15}{2}$	-5	0	5	$\frac{15}{2}$	10	50	

La *proportionnalité* des deux suites de nombres apparaît bien. L'application h_5 est une bijection encore appelée ici « fonction linéaire » ou mieux homothétie de rapport 5.

On peut aussi utiliser les nombres comme *opérateurs additifs*. Soit l'application t_5 de $\mathcal{Q}$ dans $\mathcal{Q}$ définie par :

$$t_5 : \mathcal{Q} \to \mathcal{Q}$$
$$x \mapsto y = t_5(x) = x + 5$$

Ici, une table de correspondance sera :

x	...	$-\frac{3}{2}$	-1	0	1	$\frac{3}{2}$	2	10	....
y	...	$+\frac{7}{2}$	$+4$	5	6	$\frac{13}{2}$	7	15	....

La deuxième suite de nombres est décalée par rapport à la première, on dira plutôt *translatée de* $+5$. t_5 est une bijection, la *translation* $(+5)$.

La composition des homothéties (de rapports non nuls), par exemple :

$$\begin{array}{ccccc} x & \overset{h_5}{\mapsto} & x \times 5 & \overset{h_{-2}}{\mapsto} & (x \times 5) \times (-2) \\ x & & \xmapsto[h_{-10}]{} & & x \times (-10) \end{array}$$

encore notée $h_5 \bullet h_{-2} = h_{-10}$

ou encore $(\times 5) \bullet (\times (-2)) = (\times (-10))$

permet de retrouver les propriétés des opérateurs multiplicatifs du § 1.

De même, la composition des translations,

$$\begin{array}{ccccc} x & \overset{t_5}{\mapsto} & x + 5 & \overset{t_{-2}}{\mapsto} & (x + 5) + (-2) \\ x & & \xmapsto[t_3]{} & & x + 3 \end{array}$$

pourra être notée

$$t_5 \perp t_{-2} = t_3$$

ou encore

$$(+5) \perp (-2) = (+3)$$

On vérifiera l'associativité de l'opération $\perp$ qui résulte de l'associativité de l'addition des rationnels. Il y a un élément *neutre*, c'est l'opérateur $(+0)$. Enfin on peut toujours trouver un opérateur qui composé avec un premier opérateur redonne l'opérateur neutre. Par exemple l'opérateur *inverse de* $(+7)$ est l'opérateur qui fait appel au nombre -7 et qu'on devrait écrire $(+(-7))$. En l'espèce on n'appelle d'ailleurs par « inverses » de tels opérateurs dont les effets s'annulent, mais « *symétriques* » ou « *opposés* ». L'usage l'a emporté sur le désir de normalisation des Mathématiciens.

3. Structures de groupe des opérateurs numériques.

L'analyse qui précède permet de mettre en évidence la structure de groupe des *homothéties*, leurs rapports (c'est-à-dire les opérateurs *multiplicatifs* étant pris dans $\mathcal{Q}^*$, (ne pas oublier d'exclure zéro). De même les translations, aux opérateurs *additifs* pris dans $\mathcal{Q}$, ont une structure de groupe.

Pour cette mise en évidence on peut suivre la démarche que voici. Jusqu'ici nous avons bien distingué l'opération que chaque opérateur était censé personnifier et la composition deux à deux d'opérateurs intervenant successivement. C'est pourquoi nous avons utilisé deux signes distincts : un premier signe accolé à chaque nombre pour rappeler son rôle d'opérateur, un second signe pour marquer la composition de deux opérateurs intervenant en série.

En considérant les résultats de ces compositions, on s'aperçoit que le maintien de signes distincts pour la composition des homothéties (ou des translations) et la multiplication (ou l'addition) des rationnels est superflue :

au lieu de $(\times 5) \bullet (\times (-2)) = (\times (-10))$, on écrit $5 \times (-2) = (-10)$;

au lieu de $(+5) \perp (-2) = (+3)$, on écrit $(+5) + (-2) = (+3)$.

Exercices : Remplacez par les nombres ou les signes qui conviennent les séries de points (. . .) indiquant des « manques » dans les « chaînes » arithmétiques suivantes :

a) $4\ (+\ \ldots) \mapsto 10\ (+\ 5) \mapsto \ldots$

b) $4\ (\ldots\ 2) \mapsto 8\ (\ldots\ 3) \mapsto 24$

c) $5\ (+\ 3) \mapsto \ldots\ (\bullet\ +\ 3) \mapsto \ldots\ (+\ 3) \mapsto \ldots$

$5 \qquad (+\ \ldots) \longmapsto 14$

d) $5\ (+\ n) \mapsto \ldots\ (+\ n) \mapsto \ldots\ (+\ n) \mapsto 17$

quelle est la valeur de n?

e) $\ldots\ (+\ 3) \mapsto \ldots\ (\times\ 3) \mapsto 21$

$4\ (+\ n) \mapsto \ldots\ (\times\ n) \mapsto 21$

Écrivez ces deux chaînes sous forme d'équations, en appelant x l'inconnue ($x \in \mathcal{Q}$).

Corrigé des exercices ci-dessus :

a) $4\ (+6) \mapsto 10\ (+5) \mapsto 15$

b) $4\ (\times 2) \mapsto 8\ (\times 3) \mapsto 24$

c) $5\ (+3) \mapsto 8\ (+3) \mapsto 11\ (+3) \mapsto 14$

$5 \qquad (+9) \longmapsto 14$

d) $5\ (+4) \mapsto 9\ (+4) \mapsto 13\ (+4) \mapsto 17$

n égale 4

e) $4\ (+3) \mapsto 7\ (\times 3) \mapsto 21$

$4\ (+3) \mapsto 7\ (\times 3) \mapsto 21$

$(x + 3) \times 3 = 21$

$(4 + x) \times x = 21$

4. Remarques.

1. — Une difficulté doit être signalée à propos des *conventions et des usages d'écriture*. Ceux-ci ne sont pas homogènes.

A propos des opérateurs non numériques nous avons été tout naturellement conduits à commencer par indiquer l'état, puis les opérateurs dans leur ordre d'intervention, dans le sens de l'écriture normale, c'est-à-dire de la gauche vers la droite.

Si on transposait aux nombres cette façon de disposer les symboles, on aurait par exemple l'écriture

$$(a \bullet m) \bullet n$$

pour signifier : on prend le nombre *a*, on lui fait subir l'opérateur *m* puis l'opérateur *n*. Or, l'école occidentale de mathématique a pris l'habitude, en général, d'écrire les opérateurs à gauche de l'élément sur lequel ils opèrent, en suivant l'ordre grammatical. Exemple : appelons *p* l'opérateur qui à toute personne fait correspondre son père, *m* l'opérateur qui fait correspondre sa mère,

$$p \bullet (m \bullet \text{Paul})$$

désigne le père de la mère de Paul.

De façon générale, si *f* et *g* sont des opérateurs agissant sur l'élément *x* d'un ensemble donné, pour désigner le « *f* » du « *g* » de *x* on écrira $g \circ f(x)$ ce qui revient donc à écrire l'expression en commençant par la droite.

Ce changement d'ordre dans l'écriture trouve sa justification dans les notations différentes des relations non fonctionnelles et des fonctions. Si R et S sont des relations non fonctionnelles, la signification des notations $x\mathrm{R}y$ et $y\mathrm{S}z$ est évidente; il est alors naturel d'écrire $x\mathrm{R}*\mathrm{S}z$ qui se lit de gauche à droite, R∗S étant la relation composée des relations R et S. Si *f* et *g* sont des fonctions, la notation traditionnelle, $y = f(x)$ et $z = g(y)$ rend également naturelle l'écriture $g \circ f(x)$ où $g \circ f$ ($\circ$ se lit « rond ») est la fonction composée des fonctions *f* et *g* dans l'ordre inverse de celui de l'écriture.

2. — Avant d'abandonner les opérateurs arithmétiques disons un mot de leur « matérialisation » à l'intention des jeunes élèves.

Soit à matérialiser par exemple l'opérateur + 2.

On peut le faire en utilisant une réglette mobile glissant entre deux guides gradués comme indiqué sur le dessin. Les nombres de départ sur lesquels on opère seront par exemple les nombres choisis sur la graduation inférieure et on mettra la partie gauche de la réglette mobile au droit de la graduation correspondante. Le résultat de l'opération se lira sur la graduation du haut au droit de la partie droite de la réglette.

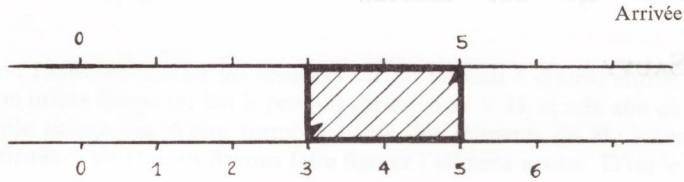


FIG. 146.

Ce matériel simple permet de familiariser les élèves avec les notions de *translation*.

On pourra également s'en servir pour faire établir des tables de correspondance illustrant la notion d'*application*. Exemple :

$$(7, \quad + 2) \mapsto 9$$
$$(11, \quad + 2) \mapsto 13$$
$$(18, \quad + 2) \mapsto 20$$
$$(100, + 2) \mapsto 102$$
$$(n, \quad + 2) \mapsto n + 2$$

BIBLIOGRAPHIE

M. DUMONT. — Cours de mathématiques pour l'enseignement des 1er et 2e degrés. *Algèbre*, Fascicule 1, Dunod, 1965.

Erratum *cahier 4*, fiche 1.15., p. 123, 16e ligne à partir du bas, au lieu de $x \perp f = x$, lire $x \top f = x$.

postface

Au delà de ces fiches

par J. Sauvy

Avec la vingt-quatrième *fiche* qu'on vient de lire se termine la première série de « Cahiers pour la formation permanente ». L'objectif de cette série était double.

En *premier lieu* nous avons voulu apporter une large information sur la façon dont a évolué l'esprit de la mathématique au cours des dernières décennies, sur sa tendance de plus en plus marquée à mettre en évidence les structures communes sous-jacentes à des situations variées, à jeter des passerelles entre branches mathématiques qui s'étaient développées précédemment de façon plus ou moins indépendantes. Nous avons partiellement, sans trop y insister car ce n'est pas l'essentiel, introduit le vocabulaire et les symboles mathématiques nouveaux qui rendent le langage mathématique d'aujourd'hui aussi différent de celui pratiqué il y a vingt ans que le français moderne peut l'être du français d'il y a cinq siècles.

Un tel complément d'information — s'inscrivant dans une perspective générale de formation permanente — (outre ses vertus propres) nous paraît indispensable pour qui veut juger en connaissance de cause l'intérêt que peut présenter l'introduction de la mathématique dite « moderne » dans l'enseignement primaire et secondaire (premier cycle).

Sur ce dernier point nous pensons en avoir dit assez pour que nos lecteurs sachent maintenant que derrière les termes d'*ensemble*, d'*application*, d'*opérateur*, de *groupe*, par exemple, ne se cachent pas des concepts réservés à une élite intellectuelle; ce sont des notions utilisées couramment par la pensée et dont la plupart, *moyennant une pédagogie appropriée*, sont très tôt accessibles aux enfants.

Bien plus, nous pensons avoir montré que leur introduction effective dans l'enseignement serait propre à contribuer de façon positive à une meilleure formation de l'intelligence des enfants.

Si nous avons pu faire cela, c'est que nous avons pu constamment nous appuyer sur un corps solide et cohérent d'expérimentations et d'études qui s'est constitué dans le monde, sans qu'on s'y intéresse beaucoup en France, depuis la fin de la dernière guerre mondiale. Grâce à cet acquis, on peut maintenant envisager de passer à la généralisation.

Le nombre des souscriptions à ces *Cahiers*, le foisonnement de publications sur la mathématique, le développement en France, malgré les obstacles administratifs, de tentatives de moins en moins isolées pour expérimenter l'enseignement de cette mathématique, l'abondance des demandes faites auprès de l'A.P.M.E.P. pour obtenir des « moniteurs » susceptibles d'animer des séances de « chantiers » ou de « clubs » mathématiques, sont autant de signes que les temps sont désormais mûrs pour passer du stade de l'expérimentation au stade de la généralisation.

Notre *deuxième objectif*, étroitement solidaire du premier, concernait la *pédagogie*. En même temps qu'un contenu renouvelé, nous avons voulu présenter une pédagogie qui tienne compte, elle aussi, de l'acquis des expériences et des études poursuivies dans le monde entier en matière d'enseignement des mathématiques. En fait cette pédagogie, avant que de l'exposer théoriquement comme nous allons le faire brièvement ci-dessous, nous avons essayé de la *pratiquer* dans nos *fiches* et, ainsi, de la faire pratiquer au lecteur afin qu'il puisse juger par lui-même de ses vertus et de ses difficultés et peut-être y prendre goût, s'il ne l'avait déjà.

Voici en quelques mots les grandes phases qui la caractérisent :

— *phase de découverte et de contact :* des situations sont présentées, des manipulations décrites, des jeux proposés, où figure le concept à étudier;

— *phase d'analyse et d'abstraction :* analyse des situations précédemment explorées, aux fins de repérer et d'expliciter certains de leurs éléments communs; à cette occasion, éventuellement, introduction de vocables et d'expressions permettent de nommer les notions mises en évidence;

— *phase de formulation :* mise en forme de la notion nouvelle dans sa plus grande généralité, avec recours éventuel au symbolisme mathématique approprié;

— *phase d'exploitation et de consolidation :* utilisation du concept dans des domaines variés; cette exploitation est proposée sous forme d'applications, de manipulations, de jeux, d'exercices « ouverts » ou d'exercices libres (« imaginer une situation telle que... »); ultérieurement le concept, désormais familier, peut être pris comme un « matériau » parmi d'autres pour passer à un niveau supérieur d'abstraction.

Une démarche ainsi conçue est naturelle et se révèle particulièrement efficace quand elle s'adresse à des enfants. Dans ce cas, toutefois, elle doit recevoir certaines adaptations.

Par exemple, la *phase de découverte et de contact* gagnera à être prolongée aussi longtemps qu'il le faudra et s'appuiera obligatoirement sur des matériels aussi variés que possible. On sait en effet aujourd'hui de façon certaine, grâce aux travaux des psychologues et des épistémologues, que l'action, sous son double aspect moteur et perceptif, joue un rôle essentiel dans le développement de l'intelligence de l'enfant car c'est à partir des actions que s'élaborent « par abstractions réfléchissantes les premières opérations logico-mathématiques de la pensée spontanée » (cf. Piaget, « *Epistémologie mathématique et psychologie* » P.U.F., 1961, p. 320), et que s'édifient progressivement jusqu'à l'adolescence les coordinations générales de ces opérations.

La *phase d'abstraction* ne se distingue pas dans les faits de la précédente à laquelle elle est intimement mêlée et dont elle ne constitue qu'un « moment ». Elle se manifeste quand l'enfant essaye de s'exprimer — auprès du maître ou de ses camarades — sur les questions qui surgissent à propos du passage du particulier au général. Il fait alors appel plus ou moins spontanément à des expressions ou des mots qui lui semblent adéquats. Les très jeunes enfants parleront de « pointus » pour désigner la façon de se présenter de certaines figures géométriques (les triangles), les enfants plus âgés emploieront l'expression d' « aller et retour » pour marquer le caractère symétrique d'une relation et de « raccourci » pour signifier la transitivité. Peu importe, à ce stade, les mots utilisés, l'essentiel c'est que l'enfant sache reconnaître la possibilité d'un raccourci dans certaines situations, par exemple, et puisse transmettre à autrui cette connaissance. Un temps viendra, ultérieurement, où il aura recours aux mots « exacts » indiqués par le maître, mais mieux vaut sans doute au début qu'il construise son vocabulaire à sa mesure comme il construit sa mathématique.

Ces considérations s'appliquent également aux symboles mathématiques qu'on

ne doit pas imposer mais seulement introduire quand le besoin d'un moyen spécifique de transcription se fait sentir.

Quant à *la phase d'exploitation et de consolidation*, elle s'imposera d'elle-même. L'enfant n'a-t-il pas spontanément tendance, quand il a « fait une découverte » à s'en servir, à l'éprouver dans des contextes différents, à lui chercher des prolongements? Et cela jusqu'au moment où, ayant plus ou moins maîtrisé le nouvel outil, ayant l'impression d'avoir épuisé ses vertus excitantes, il passera à autre chose, avide de découvrir du « nouveau nouveau »...

Mais revenons, pour terminer, à nos *Cahiers*.

Il est bien clair que, s'ils ont été conçus pour la formation permanente, ils ne sauraient à eux seuls l'assurer. Ils appellent des compléments d'ordres divers, différents suivant le lecteur, et que celui-ci est donc invité à rechercher lui-même en fonction des circonstances et des possibilités qui lui sont offertes. Parmi ces prolongements on peut songer, outre le recours aux livres d'enseignement (pour lesquels nous avons indiqué quelques titres), aux émissions que présente la radio-télévision scolaire, au travail en équipe organisé sous forme de « chantiers » ou de « clubs mathématiques », à des « fiches d'applications » de conception différente de celles-ci.

Dans notre esprit, ces Cahiers ne sont donc qu'un début dans une entreprise difficile mais qui peut être passionnante.

J. S.

Annexe 1.

Corrigés des fiches 1.17, 1.18, 1.19, 1.20

Fiche 1.17.

Exercice 17.3 :

$$A = \{11\ 111\ 111\}$$
$$B = \{1\ 111\}$$
$$A \cup B = \{111\ 111\ 111\ 111\}$$

Exercice 17.5 : La carte perforée représente le binaire 1 1 0 1, c'est-à-dire $8 + 4 + 1 = 13$ en base dix.

Exercice 17.6 : Les trente-deux premiers naturels s'écrivent en base deux comme suit : 0. 1. 10. 11. 100. 101. 110. 111. 1000. 1001. 1010. 1011. 1100. 1101. 1110. 1111. 10000. 10001. 10010. 10011. 10100. 10101. 10110. 10111. 11000. 11001. 11010. 11011. 11100. 11101. 11110. 11111. 100000.

A propos de cette liste on peut faire de nombreuses remarques : tous les nombres pairs se terminent par un zéro et tous les impairs par un 1. Il faut beaucoup plus de positions pour écrire un nombre un peu élevé qu'en notation de base dix. On

remarque une sorte de périodicité pour les tranches des deux derniers chiffres : la séquence : 00 — 01 — 10 — 11.

Le décimal treize peut s'écrire 8 + 4 + 1; sa transcription sur carte perforée est précisément celle donnée dans l'*exercice 17.5*.

Pour extraire d'un paquet de cartes perforées tous les impairs il suffit de placer une aiguille dans le trou le plus à droite et laisser tomber les cartes qui présentent une fente en cette position.

Écrivons les premiers multiples de huit. Nous trouvons : 1000 (8), 10000 (16), 11000 (24), 100000 (32). Ils se caractérisent par une suite de trois 0 consécutifs à partir de la droite. En plaçant une aiguille dans le premier trou à droite on éliminera les impairs, en plaçant dans le paquet restant une aiguille dans le trou immédiatement à gauche on éliminera toutes les cartes qui présentent une fente en cette position, en plaçant dans le paquet restant une aiguille dans le trou immédiatement à gauche on éliminera les dernières cartes ne convenant pas. Ceci revient à réaliser l'intersection des complémentaires : (non-fente en 1re position) *et* (non-fente en 2e position) *et* (non-fente en 3e position).

Exercice 17.7 : 9 = 8 + 1 = une ronde plus une croche.

Exercice 17.8 : Plus grand nombre qu'on puisse écrire en binaire avec 6 positions : 111111, soit en décimal 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1 c'est-à-dire 63 ou encore 64 — 1 puisque le binaire immédiatement supérieur à 111111 est 1000000, c'est-à-dire 64 en décimal. On retrouve ainsi l'égalité connue

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \text{——} + 2^n = 2^{n+1} - 1$$

Exercice 17.9 : Les puissances successives de deux sont

exposant	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
puissance	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024

pour transcrire 512 en binaire il faut dix positions, ce sera le chiffre 1 suivi de neuf 0.

Exercice 17.10 : Dix premiers naturels en base trois :

base dix : 0, 1, 2, 3 + 0, 3 + 1, 3 + 2, 2 × 3 + 0, 2 × 3 + 1, 2 × 3 + 2, 3 × 3 + 0, 3 × 3 + 1

base trois : 0, 1, 2, 10, 11, 12, 20, 21, 22, 100, 101

Exercice 17.11 : Le nombre « à virgule » en base trois écrit 0,1 est

$$\frac{1}{3} = 0{,}3333...$$

Exercice 17.12 : 24 premiers naturels écrits en base douze :

base dix : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12

base douze : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, α, β, 10 (1 douzaine 0 unité)

base dix : $12+1$, $12+2$, $12+3$, $12+4$, $12+5$, $12+6$, $12+7$
base douze : 11 , 12 , 13 , 14 , 15 , 16 , 17
base dix : $12+8$, $12+9$, $12+10$, $12+11$, 2×12
base douze : 18 , 19 , 1α , 1β , 20 (deux douzaines)

Le français dispose d'un terme spécifique pour désigner le cardinal d'un ensemble de douze unités : la *douzaine*. Il y a également un terme, de moins en moins usité, pour désigner le regroupement de rang 2 dans cette base, soit « douze douzaines » : il s'agit de la « *grosse* » qui vaut donc 144 unités.

Fiche 1.18.

Exercice 18.1 : Additions en base deux

$$\begin{array}{r} 1\,0\,0\,1 \\ +\quad 1\,1 \\ \hline 1\,1\,0\,0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1\,1\,1\,1\,1 \\ +\ 1\,1\,1\,1\,1 \\ \hline 1\,1\,1\,1\,1\,0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1\,0\,0 \\ +\,1\,1\,0\,0\,0 \\ \hline 1\,1\,1\,0\,0 \end{array}$$

$$1\,1\,0\,0 = 2^3+2^2;\quad 1\,1\,1\,1\,1\,0 = 2^5+2^4+2^3+2^2+2^1$$
$$1\,1\,1\,0\,0 = 2^4+2^3+2^2$$

Exercice 18.2 : Réduction de P : (°°°) (°)
Q : (°°°) (°°°) (°)
P∪Q : [(°°°) (°°°) (°°°)] (°) (°)
$1\,1+2\,1=1\,0\,2$ (base trois)

Exercice 18.3 : Voici une façon, parmi d'autres, d'expliciter le processus d'addition de deux nombres écrits dans une base n.

On additionne, s'il y a lieu, les unités. Si la somme obtenue s est inférieure à n on inscrit ce nombre s dans la colonne des unités et on passe à la colonne suivante. Si s est égale ou supérieure à n, on soustrait n de s, et on inscrit le résultat r dans la colonne des unités tandis qu'on reporte la « retenue » dans la colonne suivante. On poursuit le processus de proche en proche en progressant chaque fois d'un rang vers la gauche.

Exercice 18.4 : Aucune difficulté dans cet exercice.

Exercice 18.5 : Soustractions : $a = 0001$, $b = 0001$.

Exercice 18.6 : En base trois : $100 - 2 = 021$.

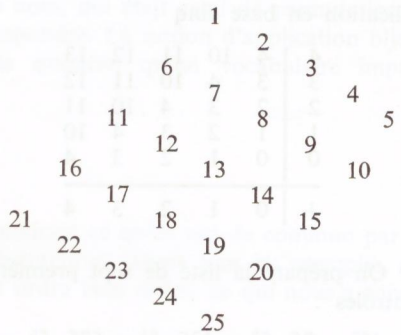
Exercice 18.7 : Il s'agit d'un « carré magique » en base deux. La somme des nombres inscrits dans les lignes, les colonnes et les diagonales est chaque fois égale à 1111 (soit $8+4+2+1 = 16-1 = 15$).

Exercice 18.8 : Compteur électronique. Sur le cadran D, qui occupe le 3e rang après les unités, on lit des regroupements de $8^3 = 512$ unités. Les lampes allumées sur les divers cadrans du schéma font apparaître le nombre écrit en base huit : 7 1 5 2, soit

$$7.8^3 + 1.8^2 + 5.8^1 + 2 = 3584 + 64 + 40 + 2 = 3690$$

Exercice 18.9 : Carré magique de 25 cases

11	24	7	20	3
4	12	25	8	16
17	5	13	21	9
10	18	1	14	22
23	6	19	2	15



Fiche 1.19.

Exercice 19.1 : $(a + b + c) \times d = (a \times d) + (b \times d) + (c \times d)$.

Exercice 19.2 : Multiplication en base deux :

$$\begin{array}{r} 10101 \\ \times\ 101 \\ \hline 10101 \\ 10101 \\ \hline 1101001 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 11111 \\ \times\ 110 \\ \hline 111110 \\ 1111100 \\ \hline 10111010 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 100 \\ \times\ 100 \\ \hline 10000 = 2^1 = 16 \end{array}$$

$1101001 = 2^6 + 2^5 + 2^3 + 1$

$10111010 = 2^7 + 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2$

Exercice 19.3 : Multiplication en base trois : $\begin{array}{r} 201 \\ \times\ 20 \\ \hline 11020 \end{array}$

Exercice 19.4 : Table de multiplication en base trois :

2	0	2	11
1	0	1	2
0	0	0	0
×	0	1	2

Exercice 19.5 : Multiplier par la base revient à faire passer chaque regroupement d'un certain rang dans le rang immédiatement supérieur : tous les chiffres

se trouvent ainsi décalés d'un rang vers la gauche ce qu'on obtient en ajoutant un zéro à droite.

Exercice 19.6 : Multiplication en base cinq.

Pour faire cet exercice méthodiquement on peut procéder comme suit : 1° on se familiarise avec la notation quinaire (1, 2, 3, 4, 10, 11, 12, 13, 14, 20, 21, etc.) où 21, par exemple, signifie « $2 \times 5 + 1$ »; 2° on établit les tables d'addition et de multiplication en base cinq :

+	0	1	2	3	4
4	4	10	11	12	13
3	3	4	10	11	12
2	2	3	4	10	11
1	1	2	3	4	10
0	0	1	2	3	4

×	0	1	2	3	4
4	0	4	13	22	31
3	0	3	11	14	22
2	0	2	4	11	13
1	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0

3° On prépare la liste de sept premières puissances de 5 de façon à faciliter les contrôles :

$$(5^2 = 25,\ 5^3 = 125,\ 5^4 = 625,\ 5^5 = 3125,\ 5^6 = 15625,\ 5^7 = 78125)$$

4° On effectue l'opération qu'on peut présenter comme suit :

$$\begin{array}{r} 4321 \\ \times\ 1234 \\ \hline 33334 \\ 24013 \\ 14142 \\ 4321 \\ \hline 12114214 \end{array}$$

Pour trouver le premier des produits partiels ci-dessus voici comment se détaille le calcul. Il s'agit de multiplier 4321 par 4, on commence par la droite : 4 fois 1 font 4, j'inscris 4 et passe au rang suivant; 4 fois 2 font 13 (résultat donné par la table de multiplication), je pose 3 et je retiens 1, je passe au rang suivant; 4 fois 3 font 22, plus 1 de retenue égale 23, je pose 3 et je retiens 2, etc. Le résultat est 33334. Si je ne suis pas sûr de mon calcul je fais un contrôle en passant en base 10.

Le multiplicande devient

$$4321 = 4 \times 125 + 32 \times 5 + 2 \times 5 + 1 = 586$$

En décimale la multiplication par 4 de 586 donne 2344.

Est-ce bien le même nombre que 33334 (quinaire)?

Oui, puisque

$$33334 = 3 \times 625 + 3 \times 125 + 3 \times 25 + 3 \times 5 + 4 = 2344;$$

comme on le voit des exercices de ce genre sont tout à fait propices au perfectionnement du calcul courant. Ils ont en outre l'avantage de familiariser avec les puissances qui, elles-mêmes, préparent la voie aux logarithmes.

Exercice 19.7 : Désignation de certains nombres en base dix : dans le mot « onze » on trouve le radical « un » (dix + un), dans « douze », le radical « deux » (dix + deux). « Dix-neuf » doit s'entendre « dix + neuf », « soixante » est mis pour « six fois dix »; par contre « quatre-vingts » rompt avec le modèle courant qui aurait donné « octante », il est à remarquer que les scripteurs négligents omettent parfois le « s » de vingts dans « quatre-vingts ».

Exercice 19.9 :

90	91	92	93	94	95	96	97	98	99
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

La relation R « a le même chiffre des unités que » partage l'ensemble ci-dessus en dix parties : les dix colonnes de naturels superposés. Card E/R = 10. Multiples de 3 : ○, multiples de 5 : Δ. Les multiples de 3 ou multiples de 5 sont entourés par un rond *ou* par un triangle, les multiples de 3 et de 5 sont entourés d'un rond *et* d'un triangle.

Exercice 19.10 : Opération $\perp$: $a \perp b = a + b + ab$.

Pour montrer que cette opération est commutative, je regarde ce qui se passe quand j'intervertis a et b

$$b \perp a = \quad b + a + ba;$$

comme $b + a = a + b$ et $ba = ab$,
on a bien $a \perp b = b \perp a$.

Fiche 1.20.

Exercice 20.1 : On peut considérer la correspondance terme à terme définie par les droites de jonction entre éléments de l'ensemble A et éléments de l'ensemble B (ou encore entre éléments de B et de C), par exemple 111 correspond à 7. Nous sommes donc en présence d'*applications bijectives* (ou *bijections*). Les ensembles

considérés n'en sont pas pour autant isomorphes car, pour qu'il y ait isomorphisme, il faut qu'il y ait structure relationnelle révélée par une ou plusieurs opérations, ce qui n'est pas le cas ici.

Exercice 20.2 : $a = 1{,}5$; $b = 1{,}75$; $c = 1{,}875$; $d = 1{,}9375$. On peut poursuivre le calcul aussi loin qu'on veut. Chaque fois il s'ajoute de nouvelles décimales. Les éléments successifs sont définis sans ambiguïté, on est donc bien en présence d'un ensemble. Cet ensemble est une partie de l'ensemble des rationnels.

Exercice 20.3 : Dans l'ensemble des nombres pairs, l'addition est une opération interne puisque quel que soit le couple de naturels pairs dont on parte, par exemple $(2x, 2y)$, x et y étant deux naturels quelconques (pairs ou impairs), l'addition donne un nombre pair puisqu'on peut écrire (distributivité de la multiplication sur l'addition)

$$2x + 2y = 2\,(x + y)$$

Exercice 20.4 : Si la disposition des perles avait été autre, par exemple s'il n'y avait pas eu 4 perles de bois consécutives, on n'aurait pas pu représenter 1111. Avec 8 perles on doit les disposer dans l'ordre suivant : 3 de bois, 3 de verre, 1 de bois, 1 de verre. Avec 4 perles : 2 de bois, 2 de verre.

Exercice 20.5 : Il suffit de mettre dans un autre ordre les chiffres inscrits sur le diagramme : on commence par 1 au lieu de 0, on continue par 0, etc. Le nombre obtenu (10 9999 4321) est de ceux que les ordinateurs manipulent couramment : il ne s'agit pas forcément d'un nombre « arithmétique » mais d'une instruction et d'une adresse codées.

Exercice 20.6 : Vous remarquez qu'en joignant les sommets des « bâtons » verticaux du graphique central vous obtenez une ligne brisée proche de la courbe du graphique du haut lequel traduit l'enregistrement d'un phénomène sur un écran. D'autre part la hauteur des bâtons se lit sur l'échelle de droite en graduations exprimées en binaire et retranscrite en signaux binaires. On comprend ainsi comment un ordinateur peut visualiser sur ses consoles (écrans cathodiques) certaines informations exprimées et traitées en binaire dans ses unités logiques, arithmétiques et dans ses mémoires.

Annexe 2

Chronique de la Régionale et des Cahiers

Pour conclure cette première série des *Chantiers de pédagogie mathématique*, nous invitons les lecteurs à un bref examen des problèmes matériels et humains posés par notre entreprise. Celle-ci est coopérative : sans la participation financière des lecteurs (plus de 14 000 à la fin de mai), le travail de rédaction, d'édition, d'expédition aurait été impossible; si les équipes animatrices de Chantiers n'avaient pas

pris l'initiative de la rédaction et de l'édition, il n'y aurait pas eu de Cahiers du tout!

En réalisant cette série de *Cahiers*, en informant leurs lecteurs sur la gestion de cette entreprise, nous entendons apporter une nouvelle fois la preuve que les membres de l'enseignement peuvent gérer leurs propres affaires. Ils le font encore mieux avec l'aide et la participation de citoyens, conscients que les choses de l'enseignement sont aussi les leurs.

C'est pourquoi nous sommes spécialement heureux que notre ami Sauvy, qui est ingénieur, ait été le rédacteur principal de ces *Cahiers*. Des confrontations toujours fructueuses ont permis, quand cela nous a paru nécessaire, des mises au point, des modifications qui, nous l'espérons les uns et les autres, n'ont pas altéré l'unité de l'ouvrage. L'équipe des animateurs du « Chantier Balard » a joué, dans ce travail, un rôle prééminent. M. Paris, étudiant à la Faculté des Sciences, a réalisé les dessins avec une précision que nous avons tous appréciée.

La rédaction ainsi achevée, l'Imprimerie Alençonnaise entrait en action. Reconnaissons qu'en ajoutant ces *Cahiers* aux publications que l'A.P.M.E.P. lui confie, nous avons eu souvent l'occasion de bousculer son plan de travail. Merci à tous ses collaborateurs qui ont mis leur compétence à notre service.

N'oublions pas, ensuite, les tâches écrasantes de l'administration : recevoir les abonnements, confectionner ou faire confectionner les étiquettes pour l'expédition, tenir la comptabilité. Sans le dévouement du secrétaire administratif de l'A.P.M., M. André Blondel, dont toute la maison est devenue une « centrale » de nos publications, nous n'aurions pas pu surnager sous le flot des abonnements.

Donnons enfin la parole au trésorier, notre collègue André Blanzin, qui a pu dresser un premier bilan financier lors de la récente Assemblée générale de la Régionale parisienne de l'A.P.M.E.P. qui s'est tenue le 8 mai à l'Institut Henri-Poincaré.

« A la date du 1er mai 1969, notre nombre d'abonnés était de 13 500, dont environ 11 100 abonnements individuels. Après versement des frais dus à l'impression et à la fourniture du papier des *Cahiers* 1, 2 et 3, à la fabrication des étiquettes et à une partie des frais d'expédition, soit en tout 34 526 F, il restait en caisse 130 200 F.

« Cette somme doit être diminuée des factures portant sur les frais d'impression (*Cahiers* 4, 5 et 6), frais d'expédition depuis l'imprimerie, frais de matériel, de personnel et de fonctionnement de la Régionale, soit approximativement 53 000 F.

« En outre, il faut compter la part non négligeable qui reviendra à l'État (impôts, T.V.A.), soit environ 10 000 F; donc une dépense prévisible de 63 000 F qui augmentée des premiers versements effectués élèvera le montant global des dépenses à 97 600 F, cela mettrait le prix de revient moyen de l'abonnement à 7,22 F et donnerait à la Régionale, en fin d'année scolaire, un excédent de recettes de l'ordre de 32 600 F. »

Commentant à ma façon le rapport du Trésorier, je dirai que ce bilan satisfaisant est le reflet du succès des *Cahiers*. Notre première estimation concernait un tirage à 5 000 exemplaires et six numéros de 32 pages; il y en aura eu quatre de 40 pages et le tirage de 15 000 exemplaires est épuisé en juin. L'excédent de recettes devra être bien utilisé pour donner aux *Cahiers* une suite qui ait plus d'ampleur et plus d'efficacité.

Disons ici un mot de l'*Assemblée générale*. Notre secrétaire général Hameau a présenté le rapport d'activité dont je retiens les faits saillants. Organisation des conférences du jeudi : M. Itard, sur l'histoire des complexes; M. Martin, sur la logique; M. Dumont, sur les groupes booléens; MM. Guerber et Hennequin, sur l'enseignement des probabilités; M. Senneville, sur l'informatique; M. Revuz, sur la théorie de la mesure, toutes séances très appréciées. Animation de 16 chantiers

de pédagogie mathématique qui ont réuni près de 1 500 collègues exerçant principalement dans le premier degré.

La discussion de ce rapport a mis en évidence les rôles distincts et dans une large mesure complémentaires de l'I.R.E.M. et de la Régionale. Celle-ci a pu jouer, pour la formation permanente, un rôle moteur alors que l'I.R.E.M. surmontait les difficultés de sa première année d'existence. A l'avenir, à côté du rôle de plus en plus important que jouera l'I.R.E.M. dans la formation initiale et permanente des maîtres, il y aura toujours place pour une activité autonome de la Régionale, laissant place aux initiatives de tous.

L'assemblée a élu un Comité au sein duquel toutes les catégories de collègues sont représentées. On en trouvera la liste ainsi que celle des membres du Bureau qu'ils ont désignés sur la feuille de couleur encartée dans ce cahier que nous demandons à tous de lire attentivement.

*
* *

J'ai gardé pour la fin la décision la plus importante de cette assemblée : elle concerne l'organisation, au Centre International d'Études Pédagogiques de Sèvres, les 21 et 22 juin 1969, d'une rencontre sur le thème de la formation permanente des maîtres et l'édition des *Cahiers* selon une formule que nous souhaitons meilleure.

Des participants aux chantiers de la région parisienne, des représentants des autres Régionales de l'A.P.M.E.P. examineront ce qui a été fait, comment il est possible de faire mieux ou autrement. Enfin, ils profiteront de cette rencontre pour préciser ce que seront *les Cahiers de l'an prochain.*

Sur le plan matériel d'abord. Une part trop importante des recettes a été dépensée en frais postaux; la transformation des *Cahiers* en *bulletin* périodique de la Régionale nous permettrait de bénéficier de meilleurs tarifs. Un véritable service de gestion (fichier des abonnés, service des commandes diverses) devra être organisé.

Enfin et surtout *la formule* des *Cahiers* devra être critiquée au bon sens du terme : en en proposant une meilleure. Deux idées sont avancées : présenter des points de vue plus variés; faire une large place à des exercices corrigés. Tout est possible. Mais, comme toujours, c'est une question de personnes (ce pluriel est volontaire). Un des objectifs de cette réunion du 21-22 juin est de constituer une équipe rédactionnelle qui devra se mettre au travail sans tarder.

Je pose alors au lecteur une dernière question : désirez-vous poursuivre l'effort que vous avez entrepris en lisant ces six *Cahiers*? Désirez-vous recevoir le *Cahier* n° 7 que nous allons préparer pour octobre prochain? Si votre réponse est affirmative, comme nous l'espérons, remplissez sans tarder la fiche verte insérée dans ce *Cahier* 6 et suivez les indications qu'elle comporte. Vous coopérerez ainsi une nouvelle fois à une entreprise qui possède la qualité bien rare d'être à la fois scientifique, pédagogique, utile (tout au moins nous le pensons) et fraternelle (nous le ressentons).

Gilbert WALUSINSKI.

Printed in France

FD Imp. Alençonnaise, B. P. 57, 61-Alençon — Dépôt légal 1969 : 8.704 — C. P. P. P. 35.996

Le Directeur de la publication : G. WALUSINSKI