chantiers de pédagogie mathématique

Bulletin bimestriel de la Régionale Parisienne - Février 1970 - CAHIER Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

Pour que la réforme progresse...

Le 9 décembre 1969, le Conseil de l'Enseignement général et technique a approuvé le texte « première étape vers une réforme de l'enseignement mathématique dans les classes élémentaires » déjà publié en brochure par l'A.P.M.E.P. A cette occasion, le Bureau de la Régionale Parisienne a écrit au Directeur de l'I.R.E.M. de Paris la lettre suivante :

Cher Collègue,

Vous ne serez pas scandalisé que nous nous adressions à vous sur ce ton. D'abord, c'est le ton juste, car dans cette grande réforme de notre enseignement, nous sommes tous embarqués sur le même navire. Et puis, nous vous connaissons ; d'autant mieux que certains d'entre nous ont été de très assidus auditeurs au cours que vous avez assuré pendant trois ans pour l'A.P.M. A l'époque, les I.R.E.M. n'existaient pas mais vous étiez de ceux qui les faisaient fonctionner quand même.

Heureusement, grâce à de tels exemples et aux efforts inlassables de l'A.P.M.E.P., des I.R.E.M. ont été créés. Avec l'équipe que vous avez constituée, vous assurez la lourde tâche de construire celui de Paris. Pour cela, bien des routines doivent être bousculées. Un exemple en est fourni par l'objectif que l'administration centrale vous proposait pour la première année: « recycler (comme elle dit et comme elle pense) 200 professeurs de Sixième »; pas un de plus et rien de plus que ce qu'elle appelle « recyclage ». En fait, les animateurs de l'I.R.E.M. ont touché plus de 1 500 professeurs de Sixième ou de Seconde, puissamment aidés, il faut le rappeler, par les « agrégibles 68-69 » qui ont trouvé là une belle occasion de montrer leur ardeur non seulement pour étudier les problèmes de l'enseignement mathématique mais également pour les affronter. Cependant l'I.R.E.M. n'a pas limité son action à la formation permanente et les initiatives prises par votre équipe dès la première année débouchent sur des travaux de séminaire (auxquels nous souhaitons faire écho), sur des publications, sur des préparations de recherches pédagogiques, toutes activités qui

témoignent en faveur du travail d'équipe. Il nous paraîtrait d'ailleurs insensé que l'on ne se défiât pas, en pédagogie, des « oracles » ou de ceux qui se prétendent tels.

Comme son nom le suggère, l'I.R.E.M. est un quadrupède: formation initiale des maîtres, recherche pédagogique, formation permanente des maîtres, publication et diffusion d'informations scientifiques et pédagogiques sont les quatre membres auxquels il doit commander pour passer de la marche au pas à l'amble, au trot puis au galop. Nous n'en sommes pas là, évidemment. Durant cette première année d'existence légale vous avez dû consacrer l'essentiel de votre action et vos ressources fort limitées vers l'enseignement secondaire.

Le moment n'est-il pas venu, maintenant, d'envisager l'extension vers les enseignements élémentaires?

Vous savez que la question nous préoccupe depuis des années. Les équipes de maîtres qui, bénévolement, réunissent sous la houlette de la Régionale, nos « Chantiers de Pégadogie Mathématique », s'efforcent de défricher le terrain. Elles témoignent en premier lieu l'ardeur des maîtres qui, bien avant que les autorités se décident à examiner la question avaient ressenti le besoin de rénover leur enseignement. Elles essayent de développer le goût des maîtres pour l'étude des mathématiques même sur un plan théorique qui peut, aux yeux de certains, dépasser les besoins immédiats de leur enseignement. Elles insistent, aussi bien pour la formation permanente que pour la recherche pédagogique, sur l'intérêt capital du travail en équipe complété par l'application de chacun à perfectionner son savoir et le souci permanent, chez tous, de la critique fraternelle et de la méfiance vis-à-vis des dogmes imposés.

Ce travail reste pourtant très fragmentaire, nous en avons bien conscience; et nous n'entendons pas nous substituer à l'organisation d'ensemble qui, à notre avis, ne peut être conçue dans toute son ampleur qu'au sein de l'I.R.E.M. Il est trop évident que l'action de celui-ci dans son domaine, celui de la didactique mathématique, ne peut connaître les frontières artificielles (ou en tout cas administratives) des degrés d'enseignement. Pour lui, comme pour nous dans l'A.P.M.E.P., c'est de la Maternelle aux Facultés qu'il suit les étapes de la formation mathématique.

Encore faudra-t-il que vous en ayez les moyens. Côté finances, c'est important, bien sûr: il faudra rétribuer les participants au travail de formation permanente, financer les publications dont vous assurerez la diffusion. Mais, plus essentiels encore sont les ressources humaines qui devront être mises à votre disposition: c'est peut-être une centaine d'animateurs nouveaux (détachés à mitemps de leurs classes) dont vous aurez besoin, non pour remplir toutes vos tâches au niveau du premier degré (il y faudra des années d'efforts semblables) mais pour commencer cette œuvre de très longue haleine.

Il nous paraît indispensable, dans ces circonstances, d'insister sur le rôle de la Régionale Parisienne de l'A.P.M.E.P. Celle-ci doit trouver les moyens d'obtenir de l'Éducation Nationale que l'I.R.E.M. soit doté des ressources en crédits et en personnels lui permettant d'assurer ce qui est son service (ce qui

n'est pas une petite chose comme on l'a vu). En marge de l'action propre de l'I.R.E.M., les équipes de la Régionale auront toujours des rôles à jouer, mais dans d'autres domaines ou avec d'autres méthodes: recherches pédagogiques nouvelles, information complémentaire, liaisons supplémentaires entre collègues des divers degrés d'enseignement ou enseignant diverses disciplines.

En tant qu'association, la Régionale prend pour règle d'appuyer l'action de l'I.R.E.M. et pour premier objectif d'obtenir l'accroissement substantiel de ses ressources. Au sein de la Régionale, les équipes des Chantiers garderont toujours la vocation de pétrir la pâte pédagogique qui, demain, lèvera peut-être.

Aujourd'hui, tout en continuant notre travail de « premier secours », c'est un grand I.R.E.M. capable d'assurer toutes ses tâches que nous réclamons.

Le Bureau de la Régionale.

Sommaire du Cahier 9

- 76 Jean Sauvy : Enseignement mathématique et psychologie de l'enfant.
- 79 William Mountebank: Où je quitte les rois pour parler de sélection et de classement.

Tribune de discussion

- 86 J. S.: Faut-il commencer la « Mathématique Moderne » en Maternelle?
- 89 R. Crépin et C. Lissandre : Ne pas sous-estimer les possibilités d'abstraction.

Questions de langage

92 Wolfgang Wörter: Schémas et diagrammes; dictionnaires.

Parmi nos lettres: M. CHAUMONT, ...

- 95 Simonne SAUVY: « Un élève devant le levier arithmétique ».
- 98 Le carnet d'exercices et de solutions
- 103 Lectures actuelles ou inactuelles Saintes erreurs; théories des ensembles; revues, ciel.

106 Le bloc-notes de la Régionale

Le petit Iremois de Paris. Films de pratique mathématique. Maîtrise pour étudiants salariés. Équipes de Chantiers P.M. Audience rectorale. Formation des maîtres, Publications. Conférences. Journées.

Enseignement mathématique et psychologie de l'enfant

1. Les étapes de la formation de l'intelligence suivant Piaget et Wallon

Nous commençons dans le présent Cahier un exposé sur la psychologie de l'enfant

qui se poursuivra sur plusieurs numéros.

Si les enseignants ne se refèrent pas plus souvent à cette discipline c'est, dans bien des cas, parce qu'ils n'ont pas eu l'occasion de prendre un contact un peu approfondi avec elle au cours de leurs propres études. C'est aussi parce qu'il n'y a pas une psychologie de l'enfant à laquelle tout le monde puisse se référer sans restriction comme on se refère, par exemple, à la physique ou à la mécanique.

Diverses écoles de psychologie de l'enfant se sont succédé depuis le début du siècle et on comprend l'embarras des non spécialistes face à des points de vue qui,

parfois, divergent assez profondément.

Cette absence de consensus ne doit pas pourtant nous décourager. L'étude scientifique de la psychologie de l'enfant a en effet beaucoup progressé depuis la dernière guerre et les recherches faites ont conduit à un ensemble de résultats très largement reconnus comme solides et auxquels on peut se reférer sans crainte.

En ce qui concerne l'enseignement des mathématiques, qui retient tout spécialement notre attention ici, c'est surtout le *problème du développement* de *l'intelligence* auquel il faut s'intéresser. Or, dans ce domaine, les recherches des deux grands maîtres de la psychologie contemporaine, Wallon et Piaget, n'aboutissent pas à des résultats

très différents et il serait dommage de les ignorer.

Dans de précédentes publications, et notamment dans l'Initiation à la mathématique de base, nous nous sommes souvent référés aux travaux du Pr Jean Piaget. Dans la présente série nous voudrions reprendre de façon plus systématique la présentation de ces travaux en les complétant, ici et là, par les points de vue originaux propres à Wallon. Nous disposerons ainsi d'une sorte de tableau général du développement de l'intelligence de l'enfant, de sa naissance à l'adolescence, tableau qui devrait nous permettre de mieux situer les problèmes posés par l'enseignement de la mathématique aux jeunes enfants.

1. L'intelligence, qu'est-ce que c'est?

Nous venons de parler d'intelligence. Le lecteur souhaiterait peut-être que nous précisions dès l'abord ce qu'il faut entendre par là. Nous ne le ferons pas car il y faudrait un livre et parce que ce n'est pas absolument nécessaire, le contenu du concept devant progressivement se préciser au cours des développements qui suivront.

Indiquons seulement, de façon très sommaire, que l'intelligence a pour fonction d'établir certaines catégories de relations entre l'individu, d'une part, et le monde extérieur, d'autre part. Ces relations, on peut les qualifier d'objectives pour les distinguer des relations affectives que le sujet établit avec ce même monde extérieur et notamment avec les autres personnes.

On qualifie aussi de « cognitives » les relations objectives parce qu'elles constituent la trame de la « connaissance » que l'individu acquiert du monde extérieur. La caractéristique principale de ces relations est de dépasser le vécu, de le capitaliser en quelque sorte après l'avoir dépouillé de l'inessentiel, le tenant prêt à être transposé aux situations du futur.

L'intelligence — dit Piaget — c'est ce qui nous permet de dépasser l'expérience en nous appuyant sur elle, c'est ce qui nous permet de nous *adapter* aux circonstances nouvelles.

2. L'intelligence, quelque chose qui se fait

L'intelligence n'est pas donnée à l'homme toute faite, prête à fonctionner.

Certes elle n'a d'existence que grâce à un support biologique adéquat propre à l'espèce humaine, mais cela ne suffit pas. L'intelligence se *construit* au fur et à mesure que l'enfant grandit. D'où l'intérêt d'aborder l'étude de l'intelligence de façon génétique.

C'est ce qu'a fait Piaget à partir de 1920 environ, aidé par la suite par un grand nombre de ses collaborateurs : B. Inhelder, A. Szeminska, P. Greco, A. Morf, B. Matalon, S. Papert, etc. C'est également ce qu'a fait Wallon entre les deux guerres.

L'étude génétique, basée sur l'observation attentive des enfants de tous âges depuis le nourrisson jusqu'à l'adolescent, montre que l'intelligence de l'enfant « se met en place » suivant un processus complexe au sein duquel on peut distinguer des *phases* ou *stades* assez bien caractérisés qu'on retrouve chez les différents sujets suivant un ordre et une chronologie suffisamment stables pour revêtir une valeur scientifique.

La pratique pédagogique des mathématiques élémentaires se doit de connaître ces phases et leurs caractéristiques pour pouvoir participer de la meilleure façon possible au développement intellectuel des enfants auxquels elle s'adresse.

Notre propos dans le présent article d'introduction est de présenter le tableau d'ensemble de ces phases, réservant à des articles particuliers ultérieurs le soin d'entrer quelque peu dans le détail des différentes phases.

3. Le tableau général du développement de l'intelligence

Si on se refère aux travaux de Piaget et de Wallon on peut découper la période pendant laquelle se construit l'intelligence de l'enfant en quatre grandes sous-périodes.

- a) Une première sous-période qui s'étend de la naissance à deux ans environ se trouve un peu en marge de la construction même de l'intelligence. Elle nous retiendra peu étant donné qu'elle concerne les enfants qui ne fréquentent pas encore l'école.
- b) La sous-période qui suit se prolonge jusqu'à 6-7 ans. La pensée de l'enfant commence progressivement à prendre corps, le langage se développe, le fonction-

nement de l'intelligence devient perceptible. Il s'agit d'une *intelligence des situations*, essentiellement orientée vers le concret, mais qui porte déjà en elle les prémices de de l'intelligence pleinement développée de l'âge adulte.

L'étude de cette période nous retiendra un peu plus longuement car elle intéresse les enfants d'âges pré-scolaires et scolaires (maternelle et cours préparatoire).

c) La troisième sous-période s'étend de 6-7 ans à 11-13 ans et couvre sensiblement la période de la scolarité primaire. Elle voit, suivant Wallon, l'avènement de la pensée catégorielle et, suivant Piaget, l'apparition et le développement des opérations concrètes réversibles. Pendant cette période l'intelligence reste toujours orientée vers le concret, mais elle commence à pouvoir le dépasser et à pouvoir le transposer. Moins prisonnière des situations vécues et de leur perception, elle gagne en mobilité. C'est l'âge d'or des classifications, des mises en relation, des sériations, de la « construction du réel », dans ses aspects statiques et dynamiques.

L'enfant prend conscience qu'en dépit de diverses transformations, certaines propriétés des objets ou des ensembles d'objets demeurent invariantes. La définition des objets et leur classement logique deviennent possibles, ce qui inaugure la véritable connaissance.

Grâce à la mise en place des structures logiques de classes et de relations, l'enfant peut alors accéder aux nombres naturels — cardinaux et ordinaux — et aux opérations courantes auxquelles ils se prêtent. C'est donc à juste titre que sont introduits à ce moment-là l'enseignement du calcul et de l'arithmétique.

d) Vers 11 ou 12 ans, enfin, l'intelligence de l'enfant franchit une nouvelle et dernière étape. « L'outil intellectuel » a suffisamment acquis de mobilité et de liberté par rapport au réel pour devenir totalement opératoire. L'enfant commence à pouvoir raisonner sur des hypothèses (« si... alors »). C'est pourquoi Piaget donne à ce stade le nom d'hypothético-déductif ou stade des opérations formelles.

C'est aussi l'époque où l'enfant, en raison de sa maturation biologique et sociologique, est appelé à porter un intérêt croissant à son « monde intérieur » en même temps qu'il doit accroître la polyvalence de sa personnalité pour la rendre apte à la socialisation croissante que la vie exige de lui. Vue sous cet angle, cette période apparaît comme celle de la *formation de la personnalité*.

Tel est le tableau d'ensemble que nous avons tenu, malgré son schématisme, à présenter dans cette note introductive afin que par ce survol rapide le lecteur puisse découvrir l'ensemble du terrain qu'il sera invité à parcourir en petites étapes au cours des prochains mois.

(à suivre).

Actualité

Le nouveau film de François Truffaut, « L'enfant sauvage » intéressera les pédagogues pour qui le mouvement de réforme ne se limite pas à des changements de programmes. Ils trouveront aussi profit à lire le livre de Lucien Malson : « Les enfants sauvages », suivi de « Mémoire et rapport sur Victor de l'Aveyron » par Jean Itard. (Un livre de poche 10,18, n° 157).

De ceux-ci vers ceux-là (3)

Commentaires de nouvel an

Trois raisons me font commencer ce troisième feuilleton par ces « commentaires de nouvel an » :

1º C'est dans la période du nouvel an que je le rédige; aux lecteurs qui m'ont suivi jusque-là et qui ont donc montré une exceptionnelle patience, je souhaite que 1970 leur soit aussi mathématiquement faste que possible, sans oublier le reste;

2º Vous savez peut-être déjà, vous qui résidez sur le continent, que les programmes officiels sont maintenant accompagnés de *commentaires* et non plus, comme avant, « d'instructions »; celles-ci étaient le fait d'autorités qui généralement n'enseignaient pas, qui ne donnaient pas de l'instruction, mais des instructions; des commentaires, au contraire, sur ceci et sur autre chose, tout le monde peut en faire et j'en administre la preuve;

3º En effet, ce préambule au troisième épisode est un commentaire sur les précédents, de même que le nouvel an n'est réellement nouveau qu'à partir du jour où le précédent n'est plus.

Après ces fortes remarques, commentons le deuxième épisode (j'aurais pu, dans le Cahier 8, le baptiser « second épisode » puisqu'alors il n'y en avait encore que 2; mais je présumais qu'il y en aurait encore d'autres; c'est pourquoi je l'ai dit « deuxième »; ainsi dit-on l'enseignement du second degré parce qu'il n'y a pas de troisième degré. Sa suite normale étant technique, supérieure, professionnelle ou permanente, la classe de Seconde car, après elle, il n'y a pas de Troisième mais une Première; il n'y a, en principe, de second étage que dans les immeubles de deux étages, pas plus).

Je reviendrai plus loin sur la distinction des mots « fonction » et « application » que plusieurs lecteurs contestent. Pour l'instant, je ne parle que de fonctions.

Autre observation de lecteurs impatients : « vous avez donné en passant des exemples de fonctions non-numériques; ils ne sont pas assez nombreux. Nous sommes en effet tellement habitués à ne considérer que des fonctions numériques que nous avons le plus grand besoin de suggestions pour construire d'autres exemples ». Bien, j'y veillerai dans la suite.

Voici maintenant des commentaires sur les exercices 6 à 10.

[W. 6] Prenons comme départ l'ensemble E des 48 blocs (qui sont des trois couleurs : rouge, jaune, bleu), des quatre formes (rond, carré, rectangle, triangle), des deux formats (grand, petit), des deux natures (plein, troué, ou, épais, mince). Voici une mine de fonctions non numériques.

Premier exemple : à chaque pièce de E on fait correspondre celle qui n'a pas le même format (tous les autres caractères étant les mêmes); c'est une fonction f de E dans E, telle que, par exemple :

rond rouge petit troué → rond rouge grand troué

Pour chaque élément, le changement de format est possible (dans une boîte chaque forme colorée existe sous deux formats) : f est définie sur E, son domaine de définition est E.

Deuxième exemple, de même genre que le précédent : à chaque élément, g fait correspondre (tous les autres caractères restant inchangés) le troué s'il était plein, le plein s'il était troué.

Troisième exemple : la fonction h fait correspondre à un élément rouge un bleu, les caractères autres que la couleur étant invariants. Ici le domaine de définition de h est le sous-ensemble des rouges. Vous imaginez d'autres exemples du même tonneau.

Quatrième exemple : la fonction k fait correspondre à un objet rouge, un bleu, à un bleu un rouge, à un jaune un jaune; à un rond plein ou petit, un rond creux et grand; à un objet à quatre côtés plein et petit un objet à trois côtés creux et grand. Il vous reste à préciser le domaine de définition.

Ce dernier exemple, pour vous montrer qu'on peut imaginer des histoires compliquées!

Encore un exemple de fonction à valeurs numériques : à chaque élément de E on fait correspondre le nombre de ses côtés rectilignes.

- [W. 7] Relations de parenté qui sont fonctionnelles : « ... a pour père ... », « ... a pour mère ... », « ... a pour épouse ... » (en régime monogame), « ... a pour époux ... » (même remarque), « a ... pour fils unique ... », etc. Relations non fonctionnelles : « ... a pour fils ... » (car le père Aymon en eut quatre), « ... a pour grand' mère ... » (chacun de nous en eut deux), « ... a pour frère ... », etc.
- [W. 8] t est l'application qui, à chaque point du cercle, fait correspondre sa tangente en ce point. La relation réciproque associe à certaines droites seulement (celles qui se trouvent à une distance convenable du centre du cercle) leur point de contact (qui est en effet unique); donc la réciproque est une fonction et non une application.

La relation v, pour la figure 12, n'est plus une fonction : en chacun des deux points de la courbe à gauche ou à droite, il y a deux demi-tangentes (ce sont des points anguleux).

[W. 9] Exemple : $6.8 \mapsto E(6.8) = 6$; $6.9 \mapsto E(6.9) = 6$; $7 \mapsto E(7) = 7$; $7.1 \mapsto E(7.1) = 7$. Le graphique est formé de points alignés sur des « paliers » (fig. 13).

La fonction $x \mapsto x - E(x) = F(x)$ est périodique; la figure 14 le suggère; la relation suivante le démontre :

$$x - x' \in \mathbb{Z}$$
 $E(x) - E(x') = x - x';$

il en résulte F(x + 1) = x + 1 - E(x + 1) = x + 1 - E(x) - 1 = F(x).

De façon tout à fait générale, la fonction f d'un ensemble A vers un ensemble B est dite *périodique* et de période T si et seulement si, pour tout x du domaine de définition, si x + T est aussi élément de ce domaine, f(x + T) = f(x). Dans le cas présent, x décrivant D, F(x) décrit 20 périodes.

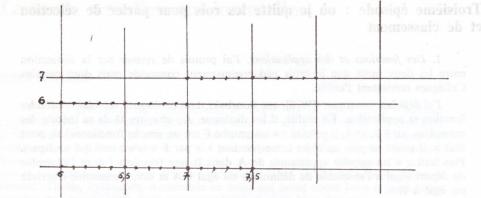
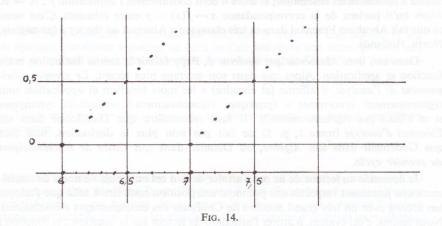


Fig. 13.



[W. 10] L'égalité de deux fonctions caractéristiques $\varphi_A = \varphi_B$ signifiant $\forall x \in E$ $\varphi_A(x) = \varphi_B(x)$, cette égalité signifie aussi que tout élément de l'un est élément de l'autre ensemble soit A = B.

Pour savoir ce que représente φ_A , φ_B (le produit des deux fonctions), il suffit de dresser la table de tous les cas possibles :

$\varphi_A \cdot \varphi_B$		
1		
0		
0		
0		

 $\varphi_A(x)$, $\varphi_B(x)=1$ si et seulement si $\varphi_A(x)=1$ et $\varphi_B(x)=1$ c'est-à-dire si et seulement si $x\in A\cap B$. Autrement dit φ_A , $\varphi_B=\varphi_{A\cap B}$.

On vérifiera de la même façon :

$$\begin{array}{l} \varphi_{A \cup B} = \varphi_A + \varphi_B - \varphi_{A \cap B} \\ \varphi_E = 1 \quad \varphi \varnothing = 0 \quad \varphi_{A^c} = 1 - \varphi_A. \end{array}$$

Troisième épisode : où je quitte les rois pour parler de sélection et de classement

1. Des fonctions et des applications. J'ai promis de revenir sur la distinction entre les deux mots que je crois pédagogiquement commode mais dont certains Collègues contestent l'utilité.

J'ai déjà fait remarquer ([W. 8]) que Bourbaki, dans cet énoncé, semblait confondre fonction et application. En réalité, il les distingue. Au chapitre II de sa théorie des ensembles, au \S 3, n° 4, il précise : « un graphe F est un graphe fonctionnel si, pour tout x, il existe *au plus* un objet correspondant à x par F » (c'est moi qui souligne). Plus loin : « on appelle application de A dans B une fonction f dont l'ensemble de départ (égal à l'ensemble de définition) est égal à A et dont l'ensemble d'arrivée est égal à B ».

En passant, je note la préférence de Bourbaki pour l'emploi du mot application quand il considère les ensembles; et alors il écrit couramment l'application $f: A \to B$. Alors qu'il parlera de la correspondance $x \mapsto f(x) = y$ entre éléments. C'est aussi ce que fait Abraham Fraenkel dans sa très classique « Abstract set theory » (en anglais, North Holland).

Dans son livre Mathématique moderne I, Papy faisait la même distinction entre fonction et application. Alors que dans son ouvrage plus récent, Le premier enseignement de l'analyse, il affirme (et encadre) « les mots fonction et application sont rigoureusement synonymes » (pourquoi rigoureusement? seraient-ils synonymes si ce n'était pas rigoureusement?). Il faut reconnaître que Dieudonné dans ses Éléments d'analyse (tome 1, p. 5) ne fait pas non plus la distinction, non plus que Godement dans son Algèbre, ou Dixmier dans son Cours de mathématiques du premier cycle.

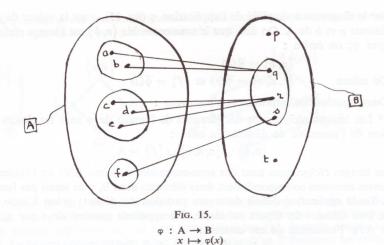
Je demande au lecteur de ne pas s'affoler devant cet ensemble de noms de mathématiciens justement respectés qui prennent une position contraire à celle que j'adopte (en accord avec un très grand nombre de Collègues des enseignements élémentaires). Nous tenons, c'est évident, à attirer l'attention du lecteur sur la question : la fonction f de A vers B étant donnée, quel est son domaine D de définition?

Au contraire, l'application $g: A \rightarrow B$ est une fonction dont le domaine de définition est A.

Excusez ce trop long commentaire sur des mots et venons-en enfin aux réalités.

2. Je les figure sur un diagramme sagittal de l'application ϕ de l'ensemble A dans l'ensemble B, couramment appelée l'application ϕ : $A \to B$ (dût votre goût du beau style en souffrir).

On notera le bon usage des flèches : la flèche simple du départ vers l'arrivée, la flèche à talon (stylisation de l'empennée) d'un élément à la valeur correspondante. Dans la pratique une *table* de la fonction est aussi explicite que le diagramme :



Du fait qu'on ne m'avait présenté, quand j'étais petit, que des seules fonctions numériques de la forme $x \mapsto 3x - 7$, j'ai eu longtemps du mal à admettre qu'il puisse exister des fonctions définies, non au moyen d'une formule, mais au moyen

d'une table. Or, dans la pratique des formules du genre $x \mapsto (x^{\frac{1}{4}} - 2x^{\frac{1}{2}})^3 - (x^2 - 3x)^{\frac{1}{3}}$ n'ont aucun intérêt alors qu'une table de valeurs (même si elles ne sont qu'approchées) rendra service aux utilisateurs éventuels de cette fonction.

3. Dans l'ensemble d'arrivée B, il existe un sous-ensemble intéressant : celui des valeurs de l'application φ (le sous-ensemble des points du diagramme de B atteints par une flèche au moins). On le désignera par $\varphi < A >$ et on l'appellera *l'image* de

l'application φ:

$$\varphi < \mathbf{A} > = \{ y \in \mathbf{B} | \exists x \in \mathbf{A}, \ y = \varphi(x) \}$$

Dans l'exemple considéré $\varphi < A > = \{q, r, s\}$. Puisque $\varphi < A > \neq B$, l'application φ sélectionne les éléments de B, les « bons » qui sont éléments de $\varphi < A >$, les « mauvais » qui ne sont pas éléments de $\varphi < A >$.

Un exemple qui n'a rien d'extraordinaire sinon qu'il a été réalisé avec des élèves de onze ans. A est l'ensemble de ces élèves, B celui des mois de l'année; l'application consiste à faire correspondre à chaque élève le mois de sa naissance. Il s'est trouvé que personne n'était né en février (pas étonnant, dit un finaud, c'est le mois le plus court!) L'image de ϕ était donc l'ensemble des onze autres mois (en février, pas d'anniversaire à souhaiter).

En général, on dira qu'il y a sélection dans B si $\varphi < A > \neq B$. Dans le cas contraire, $\varphi < A > = B$, l'application est dite surjective, φ est une surjection. Application sur B au lieu que si $\varphi < A > \neq B$, c'est une application dans B. Cette langue n'est-elle pas bien faite?

4. S'il n'y a pas, pour les élèves cités, d'anniversaire en février, y en a-t-il en janvier? Oui, sûrement puisque janvier était élément de l'image. Pour savoir à quels élèves il faudra souhaiter la fête, il n'y a plus qu'à « remonter le courant » de la ou des flèches qui aboutissent, dans B, à janvier.

Sur le diagramme simplifié de l'application φ (fig. 15), q est la valeur de f pour les éléments a et b de A. On dira que le sous-ensemble $\{a, b\}$ est l'image réciproque de q par φ ; on écrira :

$$\{a,b\} = \vec{\phi}(q)$$
 De même
$$\{c,d,e\} = \vec{\phi}(r) \text{ et } \{f\} = \vec{\phi}(s)$$

Deux conclusions importantes s'ensuivent :

1º Les images réciproques des éléments de l'image de φ sont les classes d'une partition de l'ensemble de départ. En effet :

$${a,b} \cup {c,d,e} \cup {f} = A$$

et deux images réciproques sont des sous-ensembles disjoints (s'ils ne l'étaient pas, à l'élément commun correspondraient deux éléments dans B, φ ne serait pas fonctionnelle). Toute application définit donc une partition du départ; grâce à cette application, tout élément du départ est classé. On appellera quotient de A par q, et on notera A/φ l'ensemble de ces classes :

$$A/\varphi = \{\{a,b\}, \{c,d,e\}, \{f\}\}$$

Dans le cas de mes élèves, se retrouvaient dans la même classe ceux qui étaient nés le même mois. La relation dans A, « ... est né le même mois que ... » est une relation d'équivalence associée à cette partition (j'avouerai que c'est par l'étude de cet exemple que nous avons introduit la relation d'équivalence).

2º Puisque, en « marche arrière », il part deux flèches de q, la réciproque de l'application φ n'est pas fonctionnelle (on savait déjà que de B vers A ce n'était pas une application puisque $\varphi < A > \neq B$).

On désignera pourtant par la notation $\bar{\phi}$ une application dite réciproque de ϕ mais pourφ le départ était A, l'arrivée B alors que pour φ le départ est φ<A> et l'arrivée l'ensemble des parties de B. Cette application réciproque a pour table

$$\frac{\varphi < A >}{\Im(A)} \begin{vmatrix} q & r & s \\ \{a, b\} & \{c, d, e\} & \{f\} \end{vmatrix}$$

et vous avez plaisir à écrire :
$$\label{eq:phi} \bar{\phi} < \phi <\!\!A\!\!> \ = A/\phi$$

l'image de l'application réciproque de φ est l'ensemble-quotient de A par φ .

Vous ne trouvez pas que cette dernière formule est belle? Rapprochez-la de la question que nous nous étions posée jadis : quand Henri IV est-il mort? Avouez que vous ne soupçonniez pas que ça vous mènerait à des écritures pareilles!

Vous n'êtes pas au bout des surprises; le feuilleton continue. Non sans vous proposer d'abord quelques exercices.

[W. 11] Observez $\varphi < A >$ et A/φ ; comment interprétez-vous la phrase : « l'un est la réplique de l'autre? »

[W. 12] Sur une carte, le relief est figuré par des lignes de niveau tous les 20 mètres de dénivellation. Il y a une application f de l'ensemble des points de ces lignes de niveau dans IN. Sur cette carte, les cotes s'échelonnent de 200 à 500. Quelle est l'image de f? Quelle est l'image réciproque de 320? Et celle de 310? Quel est l'ensemblequotient du départ par f?

[W. 13] On obtient une carte plane de l'hémisphère boréal en faisant correspondre à M (un point de cet hémisphère) l'intersection m de la droite SM qui joint M au pôle sud avec le plan de l'équateur (projection dite stéréographique). Cette « projection » réalise une application p des points de l'hémisphère boréal sur le plan de l'équateur. Quelle est l'image de p? Quelle est l'image d'un parallèle? Et celle de la portion d'un méridien contenue dans l'hémisphère boréal?

On peut rattacher à cet exercice le problème de l'ours : celui-ci sort de sa tanière à la recherche de nourriture; il fait 10 kilomètres vers le Sud puis 10 kilomètres vers l'Est puis 10 kilomètres vers le Nord sans rien trouver et (cela met le comble à sa rage) il se retrouve devant sa tanière. Quelle est la couleur de l'ours?

[W. 14] Une date du xxe siècle est un triplet (x, y, z) où x est le quantième (le numéro du jour), y le mois, z le millésime de l'année; exemple 17 mai 1934 ou x = 17, y = mai, z = 1934. A chaque date du xxe siècle correspond un jour de la semaine, c'est-à-dire un élément de $S = \{\text{dimanche, lundi, mardi, mercredi, jeudi, vendredi, samedi}\}$. Enfin, vous pouvez vérifier que le 1^{er} janvier 1901 était un mardi.

Étudiez l'application c de l'ensemble D des dates du xx° siècle dans l'ensemble S des jours de la semaine. Celle-ci vous aidera-t-elle à résoudre le problème : quel jour suis-je né? Ou encore quel jour était le 31 août 1914? Et le 22 mars 1968? Et le 31 décembre 1900?

[W. 15] S'il faut rechercher des exemples de fonctions non-numériques, il ne faut pas se désintéresser des fonctions numériques.

Soit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tel que $f(x) = x^2$; précisez $f < \mathbb{R} >$, \mathbb{R}/f . Mêmes questions pour $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^3 - 2x^2$.

Il y a encore plus classique avec les fonctions trigonométriques; sinus : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tel que $x \mapsto \sin x$; l'étude de l'application réciproque n'est autre que ... au fait, quoi?

Bertrand Russell

Les lecteurs de ces Cahiers ne devront voir aucune manifestation déplacée de chauvinisme si, à la fin de ce feuilleton, j'ajoute un petit mot pour saluer la mémoire de Bertrand Russell qui vient de mourir, à l'âge de quatre-vingt-dix-sept ans. Rien de commun entre nos modestes efforts pour réfléchir sur l'enseignement mathématique élémentaire et l'œuvre philosophique et mathématique de Russell. Mais c'est un privilège des hommes de cette taille que leur action, en quelques domaines qu'elle se situe, importe à tous. A tous elle est un exemple.

Loin de moi le goût du culte des grands hommes. Les éminents mérites de Russell ne font pas pâlir, à mes yeux, les mérites de tous ceux qui ne connurent pas sa gloire universelle. A ceci près, dans le cas de ce savant qu'à l'égal d'Einstein, par exemple, il savait aussi, sur des problèmes qui engagent la conscience de chacun, aller jusqu'au bout de ses actes. Ce membre de la Chambre des Lords connut la prison. C'est un homme libre qui est mort en ce début de 1970.

W. M.

Tribune de discussion

Dans notre Cahier 8, sous le titre Échanges pédagogiques, nous avons appelé les Collègues à des libres débats, à des confrontations pouvant même porter sur des ouvrages édités. Nous remercions très vivement nos Collègues, M^{me} Lissandre et M. Crépin d'avoir accepté d'inaugurer cette tribune avec notre ami Sauvy toujours aussi curieux de connaître ce qui se publie ou ce qui s'enseigne. Nous espérons que cet exemple sera suivi (N.D.L.R.).

Faut-il commencer la « Mathématique Moderne » (*) en Maternelle ?

La question doit être envisagée sans plus attendre car nombreuses sont les Écoles Maternelles où les directrices ou les maîtresses souhaitent rajeunir le préenseignement dispensé aux enfants qui leur sont confiés en y incorporant un premier contact avec la « mathématique moderne ».

Elles y sont d'ailleurs invitées par l'édition d'un matériel pédagogique attrayant — blocs à caractéristiques multiples notamment — qui se prête à de multiples jeux à la portée des très jeunes enfants. On se réjouirait sans réserve de cet élan novateur s'il ne portait en lui le risque de graves mécomptes.

Expliquons-nous.

Ce risque est le suivant. Sous prétexte de mieux préparer les enfants à leur entrée à l'école Primaire, on risque de leur faire prendre un contact prématuré avec les ensembles et les relations. Ce faisant, non seulement on ne facilitera pas la tâche de l'enfant mais on risque de lui nuire en lui ôtant le goût de tirer profit, le moment venu, de la pédagogie de découverte qu'on lui proposera alors. En créant trop tôt des automatismes reposant essentiellement sur la mémoire en matière d'ensembles ou de relations on risque d'obtenir des résultats aussi mauvais en mathématique moderne qu'on en obtient en arithmétique en introduisant trop tôt les nombres ou le calcul.

Il y a deux ans nous avons eu l'attention attirée sur ce problème en observant non pas des classes de Maternelle mais des classes du Primaire (cours préparatoire) où des essais d'introduction des ensembles et des relations étaient en cours. Bien que les enfants soumis à ces essais aient dépassé d'au moins un an l'âge moyen des élèves de Maternelle, les difficultés qu'ils rencontraient avec les symboles qu'on leur imposait étaient telles que les maîtresses étaient conduites, pour obtenir des résultats en accord avec leurs espoirs, à pratiquer une pédagogie reposant essentiellement sur la mémoire et les automatismes.

L'examen des fiches de travail pour la Maternelle « de la Vie à la Mathématique à la Maternelle », éditées par Charles-Lavauzelle (124, bd Saint-Germain, Paris-6e) allait-il infirmer ou confirmer nos craintes de voir la réforme à ce niveau s'engager dans une mauvaise voie?

^(*) Les guillemets signifient que nous employons à regret une expression qui passe peu à peu dans l'usage.

Ces fiches (qui nous ont été obligeamment communiquées par l'Éditeur) sont accompagnées d'un matériel pédagogique en forme de pré-découpage — 24 figures cartonnées à caractéristiques multiples et éléments multibases — ainsi que d'un livret pour le maître établi par R. Crépin, Inspecteur départemental de l'enseignement primaire et C. Lissandre, directrice d'école maternelle annexe.

On ne peut que souscrire aux intentions des auteurs. Dans la préface de leur ouvrage, ils indiquent que leur premier souci a été « d'assurer une continuité aussi logique que possible, de la vie de l'enfant à la formulation abstraite de certaines

situations, en évitant toute mécanisation » (c'est nous qui soulignons).

Malheureusement, en examinant le programme des activités proposées aux élèves de la grande section et parfois de la moyenne section ainsi que les fiches elles-mêmes un doute vient sur la possibilité de mener à bien un programme aussi ambitieux sans recourir à des méthodes quelque peu « expéditives ». Bien plus, on peut se demander, notamment quand on se réfère aux travaux du psychologue de Genève J. Piaget et de son équipe, si le stade moyen de développement de l'intelligence de l'enfant aux âges considérés — en principe moins de 6 ans — ne condamne pas à l'échec beaucoup d'enfants qui se verront proposer certains des exercices prévus dans les fiches en question.

Le problème étant d'intérêt général une étude attentive nous paraît utile et nous allons l'esquisser ci-dessous, étant entendu que notre avis n'engage que nous-même.

Le mieux, semble-t-il, est de partir des explications données par les auteurs au début de leur opuscule. Ils prennent comme exemple l'étude d'une situation familiale et comme ensemble de référence F les membres de la famille de Jean. Dans un premier temps la maîtresse parle de ces membres avec les enfants de la classe et, à ce propos, elle fait comprendre la distinction entre l'ensemble et ses éléments, donc la « relation d'appartenance » (p. 16). On fabrique alors des étiquettes pour représenter les éléments et « on raisonne au niveau des étiquettes ». Les enfants sont invités à distinguer au sein de l'ensemble F le sous-ensemble P de la maman et du papa. Le texte poursuit (p. 16) :

« On interprète oralement les dessins. Le « papa de Jean » appartient à F, il appartient aussi à « P ». Recherchons une relation entre « P » et « F », c'est-à-dire entre ensembles. Constatons que tous les éléments de « P » sont éléments de « F », mais certains éléments de « F » (Jean par exemple) ne sont pas éléments de « P ». On dit que « P » est inclus dans « F » ... »

Indiquons maintenant quelques-unes de nos réserves sur le mode d'apprentissage ainsi proposé. Elles sont nombreuses :

- a) Qu'il s'agisse de l'évocation (forcément abstraite) des membres de la famille, ou qu'il s'agisse de leur représentation par des étiquettes, on n'a pas affaire ici à une situation proprement *vécue* par les enfants.
- b) La seule façon de la faire appréhender est de recourir à des mots, à des explications verbales données par la maîtresse. Or les enfants des classes maternelles n'ont en général qu'une maîtrise très relative du langage. S'il en était autrement, c'est qu'ils disposeraient des concepts et de l'appareil logique correspondant (conjonction, disjonction, négation); disons que pour la plupart des élèves de Maternelle cela paraît tellement ambitieux qu'à proposer de tels objectifs aux maîtresses on risque, ou bien, si elles jugent lucidement leur enseignement, de les conduire au désespoir, ou bien de les tromper sur les buts réels de leur travail ce qui serait encore plus grave. L'explication donnée par la maîtresse sur un sujet qui ne «passionne» pas forcément tel ou tel élève risque d'être peu écoutée et. si elle est écoutée, risque d'être entendue comme quelque chose qui n'évoque rien pour lui.

c) Il n'est pas donné aux enfants la possibilité de « découvrir » eux-mêmes, par exemple, la propriété de « double appartenance » (appartenance à F, appartenance à P). Il faudrait en effet pour cela que les enfants aient eu maintes occasions de rencontrer des situations de ce type (« principe de variabilité » de Dienes) (1).

d) De toute façon il est à craindre que, pour beaucoup d'enfants de cet âge, leur intelligence n'ait pas encore atteint le stade de développement qui autorise la « multiplication logique ». Pour qu'un enfant perçoive clairement que l'élément x appartient aussi bien à l'ensemble P qu'à l'ensemble F il faut qu'il puisse changer de point de vue et considérer simultanément x par rapport à P et x par rapport à F.

On sait, d'après les très nombreuses observations de Piaget et de ses collaborateurs, que l'acquisition de la multiplication logique marque une étape décisive dans le développement de l'intelligence de l'enfant, étape qui se situe au voisinage de

cinq-sept ans, souvent plus tard, rarement plus tôt (2).

e) Le souci des auteurs de faire utiliser tout de suite par les enfants de la Maternelle un langage mathématique correct se comprend très bien. Mais là aussi, on peut craindre que, sous le prétexte honorable du bon langage, on contraigne l'enfant à utiliser puis répéter des mots dont il n'a pas encore réussi à comprendre ce qu'ils signifient pour la simple raison que le concept que ces mots expriment n'est pas encore clair dans son esprit. Des phrases comme « Il faut habituer les enfants à dire : P est une partie de F » s'adressent aux maîtresses, nous le comprenons bien. Mais avant de donner aux enfants de bonnes habitudes de langage, n'est-il pas plus important encore de bien lui faire comprendre ce qu'il aura plus tard à bien dire. Avant de bien dire : « P est une partie de F » mieux vaudrait insister auprès des maîtres qu'ils s'assurent que l'enfant peut montrer une partie de F.

Dans la suite de l'exposé ou dans les fiches, d'autres sujets de réserves apparaissent. Ainsi quand il s'agit d'opérations sur les ensembles n'est-il pas prématuré de « faire connaître, ou retrouver, l'ensemble vide, que l'on associera ultérieurement au nombre 0 », ou encore de faire observer la transitivité et l'antisymétrie de l'inclusion (p. 25)? Le moment est-il venu, avec des enfants de cinq ans, de « fixer par écrit des concepts élaborés au cours des différents jeux » (p. 27)? N'est-il pas trop ambitieux de proposer « des exercices écrits qui seront des synthèses générales, des bilans

pour vérifier la bonne assimilation des concepts vus? » (p. 27)?

Il y a plus grave encore à notre avis, quand les auteurs proposent d'introduire la notion de cardinal comme propriété d'un ensemble (« à partir de la fin du 2º trimestre », prévoit le texte, p. 42). Les études de Piaget et de Greco, notamment, ont montré les difficultés que rencontrent les jeunes enfants pour mettre en place dans leurs connaissances, de façon opérationnelle, la notion de nombre sous son double aspect de cardinal et d'ordinal. Nous ne pouvons revenir en détail aujourd'hui sur cette question capitale qui a été longuement traitée dans les fiches de la première série de nos *cahiers*. Rappelons seulement que les études en question (dont nous avions à l'époque donné une bibliographie) mettent indirectement en garde contre

(2) Ceci conduit à considérer également comme très difficiles pour des élèves de Maternelle les exercices de la Fiche C25 qui font appel au diagramme cartésien formes x couleurs.

⁽¹⁾ Dienes écrit (opérateurs additifs, O.C.D.L. 1969, avant propos): « Il ne faut pas se contenter d'un chemin étroit en ce qui concerne l'apprentissage des structures abstraites; l'abstraction laisse nécessairement de côté le réel, et si le chemin adopté est trop étroit, le lien avec le réel peut être rompu. Dans une telle situation, les enfants n'apprennent que des réponses mécaniques qu'ils doivent donner dans des situations particulières, et il est difficile de dire qu'ils apprennent ainsi la mathématique. Si nous adoptons le principe de suivre une route large, en soumettant l'enfant à toutes sortes d'expériences à partir desquelles ils peuvent arriver à leurs propres abstractions, le lien avec le réel sera maintenu, et l'abstraction restera applicable dans le réel ».

une trop grande précipitation à introduire le nombre. Le professeur Dienes, que les auteurs de l'ouvrage sous revue citent d'ailleurs (p. 22), en tient le plus grand compte et fait jouer les élèves pendant deux à trois ans avec du matériel divers avant d'introduire le nombre systématiquement.

Réserves encore à propos de l'utilisation des symboles < et >. Que peuvent-ils évoquer à cet âge, alors que la synthèse entre l'aspect cardinal du nombre et son aspect ordinal n'est pas encore amorcée?

A cet égard, les fiches D.16, D.17, D.18, D.19 nous paraissent particulièrement prématurées. Quant à la D.40, elle va même jusqu'à demander aux élèves de «corriger ce qui est faux » dans une formule où figure un signe d'inégalité!

Les critiques ci-dessus ne portent pas sur le principe de l'introduction de la mathématique dite moderne dans les écoles maternelles mais sur les modalités de cette introduction.

Autant il nous paraît utile de donner aux très jeunes enfants l'occasion de jouer avec des objets les plus divers ainsi qu'avec leurs propres corps, leurs déplacements, etc., de s'exercer à des tris, des classements, des mises en correspondance terme à terme, à des ébauches de mises en ordre, autant il nous paraît critiquable d'orienter systématiquement ces jeux et ces excercies dans un sens « utilitaire » voulu par l'adulte (faciliter l'acquisition ultérieure du nombre par exemple), autant il nous paraît prématuré d'imposer aux enfants de cet âge des modes de transcription de leurs expériences et notamment le recours à des symboles. Ceux-ci, à notre sens, ne devraient être proposés aux élèves que si, dans la dynamique propre de l'exploitation de telles ou telles situations, l'enfant ressentait le besoin de trouver un moyen commode de transcrire certains résultats de ses propres expériences.

Autrement dit l'objectif d'une rénovation du pré-enseignement de la mathématique à la Maternelle devrait être très peu ambitieux sur le plan des résultats spectaculaires à en attendre. Il ne s'agit pas à notre avis de préparer explicitement les étapes futures de l'enseignement primaire. Il est beaucoup plus important de laisser aux enfants la possibilité d'explorer à leur guise, suivant leur nature propre et leur acquis antérieur, le monde encore si peu déchiffrable pour eux des êtres et des choses qui les entourent. Soyons attentifs à sauvegarder leur spontanéité, leur créativité. Car nous savons tous que, très vite, ils seront pris dans un mécanisme de vie en général et de vie scolaire en particulier où ils devront de gré ou de force couler leur pensée dans les moules et les stéréotypes d'une pensée adulte dont les aspects étriqués et desséchants ne manquent pas.

L'âge de la Maternelle ne peut-il rester celui des jeux et des manipulations? Cette école, très libre dans ses activités, ne peut-elle rester le vert paradis des explorations enfantines? Le temps des écrits et des fiches, celui des programmes contraignants viendra toujours assez tôt.

Jean Sauvy.

Ne pas sous-estimer les possibilités d'abstraction

Nous remercions M. Sauvy de l'analyse critique de notre ouvrage qui va nous permettre d'éclairer quelques-uns de nos points de vue. Les mots sont source d'erreurs. Sans doute nous sommes-nous mal fait comprendre et nous sommes heureux de pouvoir préciser nos intentions.

M. Sauvy attire l'attention sur l'exemple de l'étude d'une situation familiale: « la famille de Jean » exposée des pages 15 à 21 de notre livre. Ses critiques: on n'a pas affaire à une situation vécue; ou ne pourra recourir qu'à des mots et des explications verbales; les enfants n'auront pas la possibilité de découvrir « la double appartenance », seraient les nôtres si cet exemple était exploité tel qu'il est donné dans une classe maternelle d'enfants de 5 à 6 ans en début d'année. Mais nous n'avons voulu donner cet exemple que pour illustrer notre pensée et non pour qu'il soit repris tel quel dans une classe.

C'est à travers l'analyse de plusieurs événements différents rapportés par les enfants et basés sur le même concept logique, que ce concept logique peut se dégager peu à peu d'une manière intuitive. L'art du pédagogue est précisément d'éviter des

réponses mécaniques à des analyses de situations semblables.

On a pu constater en suivant cette démarche pédagogique que la double « appartenance » est à la portée intuitive mais non pas analytique des enfants des sections de grands de l'école maternelle. La « multiplication logique » est certes plus directement vécue par tous les enfants dans le cadre du milieu scolaire (par exemple l'enfant sait très vite se situer simultanément dans son équipe et dans sa classe); et nous pensons que c'est par là qu'il est préférable de commencer.

Plus loin, M. Sauvy met en doute l'opportunité de fixer par écrit les concepts élaborés, considère comme difficiles les exercices de la fiche C25 qui font appel au diagramme cartésien formes x couleurs, et pose la question des travaux prématurés

trop difficiles pour des enfants de 5 à 6 ans.

Les observations et les expériences que nous avons pu faire au cours de plusieurs années dans des classes maternelles de grands nous ont amenés à penser qu'il est très difficile d'établir la limite de l'accessible et le seuil du « très difficile » avec ces enfants. Cela dépend pour une large part de la manière dont, dans des circonstances particulières, tel groupe particulier d'enfants aura abordé, vécu et conceptualisé un événement. Ce qui paraissait difficile une année paraît parfois facile l'année suivante, quitte à paraître à nouveau difficile par la suite. Nous pensons que les maîtresses doivent essentiellement vivre avec leurs enfants, qu'elles ne doivent pas vouloir à tout prix faire atteindre à ceux-ci un niveau fixé selon un « programme », mais suivre leur classe de façon à atteindre avec elle les limites que cette classe se fixera elle-même. Et dans cet esprit la manipulation du diagramme cartésien est présentée comme une limite en respect de la spontanéité des enfants.

C'est ainsi qu'en 1968-1969 la classe avec laquelle nous expérimentions est arrivée facilement au diagramme cartésien, parce que la nécessité d'un classement du matériel logique s'imposait pour réaliser un jeu logique qui plaisait beaucoup aux enfants (jeu dérivé des jeux du « portrait » et de « l'objet caché » de Dienes). Ils ont ensuite réalisé ce diagramme cartésien en l'appliquant à d'autres situations (tableau de menus de la cantine, tableau de recettes de cuisine pour les correspondants), sans aucune difficulté. La fiche C25 n'était pour eux qu'un jeu trop simple. En sera-t-il de même avec l'équipe

de cette année? Nous l'ignorons...

Aussi proposons-nous aux maîtresses des voies, sans pour cela leur indiquer où elles devront s'arrêter et sans leur imposer un choix parmi ces voies.

De même, nous sommes entièrement d'accord pour « mettre en garde contre une trop grande précipitation à introduire le nombre ». Mais, comme nous l'avons écrit au sujet des enfants de six ans (p. 42) « les enfants ont une connaissance intuitive des cinq premiers nombres, qu'on le veuille ou non. S'agit-il de l'adjectif ordinal ou de l'adjectif cardinal? Il faut bien préciser ces concepts dans l'esprit des enfants ».

Pour les enfants les petits nombres se présentent sous forme de mots qui traduisent des réalités vécues telles que : avoir deux souliers, deux roues à sa bicyclette, quatre roues

à sa voiture... Ils sont le point d'appui d'activités relationnelles, de relations, mais le cardinal est sous-jacent.

Nous n'avons pas d'autre ambition que de faire une approche du nombre. Le concept de nombre se précisera de plus en plus à l'école élémentaire d'année en année. Les fiches qui se rapportent au nombre doivent être utilisées avec prudence et ainsi que nous l'avons dit plus haut, nous proposons aux maîtresses des exercices, sans leur indiquer où elles doivent s'arrêter. C'est l'affaire d'opportunité et de vie de la classe.

De même, la formulation, correcte d'un point de vue mathématique des relations symbolisées n'est pas une fin impérative. Mais l'expérience montre que l'acquisition d'un langage précis conditionne la clarification de la pensée et que les enfants participent « passionnément » à cet effort vécu. Inversement d'ailleurs, on peut fixer momentanément l'attention des enfants sur des opérations relationnelles pour qu'ils en viennent à une formulation plus correcte. Le décalage entre pensée et langage n'est pas une chose mais un fait pédagogique; l'essentiel est que, dans l'une ou l'autre des démarches, on n'ait pas la tentation de l'orientation systématique et qu'on ne recoure pas à la mécanisation.

Nous avons eu, avant d'écrire notre livre qui est le résultat d'une expérimentation basée sur plusieurs années, les craintes mêmes qu'expose M. Sauvy en écrivant: « les difficultés qu'ils (les enfants) rencontraient avec les symboles qu'on leur imposait étaient telles que les maîtresses étaient conduites, pour obtenir des résultats en accord avec leurs espoirs, à pratiquer une pédagogie reposant essentiellement sur la mémoire et les automatismes ».

Nous signalons à ce sujet que dans nos classes la maîtresse doit certains jours abandonner « ses espoirs » et ne pas chercher à obtenir « des résultats » qui ne viennent que lorsque les concepts ont mûri, que nous ne symbolisons un concept que lorsque nous le jugeons suffisamment dégagé. Dans un premier temps, de nombreux exemples mettront les enfants à l'aise devant une situation : c'est le temps de la motivation où l'intérêt des enfants va vers les choses. Dans un deuxième temps, ils utiliseront des outils pour une mise en ordre des faits découverts. La progression est difficile à établir d'une manière linéaire car les démarches des faits découverts à la pensée, et de la pensée constituante à l'application se présentent simultanément. Pour la mise en ordre, les représentations =, \neq , <, intéressent les enfants. Il peut se faire que certaines années les symboles > et < ne soient pas à la portée de la majorité de la classe. Les fiches D15, D16, D17, D18, D19, D40 s'intégreront alors mieux dans le travail du Cours préparatoire. Ce qui est important, c'est que les enfants observent, raisonnent, appliquent leur raisonnement et que se forme leur esprit logique. C'est ce que nous entendons lorsque nous écrivons que « la maîtresse fait comprendre » (p. 16).

En conclusion, nous pensons comme M. Sauvy que l'école maternelle, très libre dans ses activités, doit être « le vert paradis des explorations enfantines ». Mais nous pensons aussi qu'il ne faut pas sous-estimer les possibilités d'abstraction des enfants de six ans, qu'il faut envisager l'exploitation par eux des « explorations enfantines », que c'est l'âge où le message écrit prend sa valeur — qu'il soit transmis par le dessin, par l'écriture ou par des représentations graphiques abstraites —, et que la « communication » peut aussi à ce stade s'établir par le langage mathématique (*).

R. CRÉPIN, C. LISSANDRE.

^(*) Travaux en cours à ce sujet au C.R.D.P. de Limoges.

Questions de langage

Schémas et diagrammes

Pourrait-on distinguer dans l'usage les mots croquis, schéma, diagramme,

graphique?

Dans la plupart des ouvrages, qu'il s'agisse de manuels pour les élèves ou d'ouvrages d'information pour des adultes, la première présentation des ensembles est toujours accompagnée de figures. Le plus souvent on parle alors de diagrammes; les uns sont d'Euler (en principe des cercles mais Warusfel introduit les « rectangles d'Euler »), de Venn (des ovales ou des « patates » plus ou moins biscornues selon la terminologie de Papy), de Carroll (qui, lui, s'en tient à des carrés).

Dans un livre de géométrie, on appelle figures les croquis qui, selon certaines conventions (souvent tenues secrètes), représentent des plans, des droites, des sphères. Par contre, dans un livre de biologie, je lis que la figure est le schéma d'une cellule. Quant à l'exposition des gravures de Rembrandt, elle a montré à tous ceux qui

ne le savaient pas encore, quel grand maître du dessin il avait été.

Il est bien entendu que toute représentation figurée plane utilise des conventions plus ou moins explicites; par exemple, dans les gravures de Rembrandt, une certaine utilisation du trait figure les rayons de lumière; ou encore divers artifices donnent une idée de la perspective de la scène représentée. Seulement, du dessin d'art au diagramme de Venn et au graphique de la fonction $f = (\mathbb{R}, \mathbb{R}, \mathbb{G}), x \mapsto f(x), (x, f(x)) \in \mathbb{G}$, il y a un échelonnement de conventions visant à des représentations de plus en plus abstraites.

C'est pourquoi, dans la pratique des classes, je me trouve bien de la convention

de langage suivante que je soumets à l'examen critique des lecteurs.

Je réserve le nom de *dessin* ou de *croquis* à des figures plus ou moins artistiques pour le tracé desquelles les conventions de représentation sont généralement implicites.

Un schéma est au contraire soumis à un certain code rappelé dans une « légende »

qui y est joint.

Un diagramme ou un graphique est conforme à un certain code qui a été précisé une fois pour toutes (mais une fois au moins!).

Exemples : sur tel livre de Sixième, on a représenté une balance de Roberval par un croquis (on a cherché la ressemblance); il est accompagné d'un schéma qui explique le fonctionnement (pourquoi les plateaux restent-ils horizontaux). Par contre, diagramme de Venn, diagramme sagittal, diagramme cartésien, graphique en coordonnées polaires concernent des techniques très précises : vous n'avez pas besoin de vous reporter à la légende pour les interpréter (sinon, c'est que vous n'avez n'avez pas étudié leur définition).

Il y a quelques années déjà, le *Bulletin* de l'A.P.M.E.P. avait publié un premier article *Idéogrammes* par G.-M. Barbins (nº 241, octobre 1964). Cette question de mots me fait penser qu'il serait intéressant de reprendre cette étude des moyens

d'expression autre que les mots eux-mêmes.

Dictionnaires

Les dictionnaires de mathématiques sont rares. Dans les grands dictionnaires, les explications de mots mathématiques sont parfois fort décevantes; même dans le grand *Robert*, si intéressant par ailleurs, on trouve, par exemple, au mot *algèbre*: « science qui a pour but de simplifier les problèmes et de généraliser les résultats acquis en arithmétique par l'emploi de lettres qui représentent les grandeurs et conduisent à des formules ». Au mot *anneau*, rien sur sa signification algébrique; il peut seulement, cet anneau, être sphérique! (Dans la même notice, *anneau de Saturne*, au singulier, est ainsi expliqué: « cercle lumineux qui entoure cette planète ».)

Dans la nouvelle *Encyclopaedia Universalis*, en cours d'édition (5 volumes parus), les notices mathématiques sont heureusement d'un autre niveau. Il en est aussi d'historiques où nous retrouvons avec plaisir la signature de notre Collègue Itard. Malheureusement, l'importance de l'ouvrage ne permettra pas à tout le monde

de l'avoir sur ses rayons. Et puis, ce n'est pas un ouvrage spécialisé.

Dans le Dictionnaire Mathématique d'Ozanam, édition de 1691 que je consulte parfois, on écrit (p. 61) : « L'algèbre est une science, par le moyen de laquelle on peut résoudre tout problème possible dans les mathématiques... ...[On y distingue] la vulgaire et la spécieuse. La vulgaire ou nombreuse... est celle qui se pratique par nombres... La spécieuse ou nouvelle [déjà!]... est celle qui exerce ses raisonnements par les espèces ou formes des choses désignées par les lettres... » Comparez à l'explication du Robert; c'est vieilli mais plutôt mieux dit. De toutes façons, ce que nous cherchons dans un dictionnaire, à l'exception des cas où l'aspect historique nous intéresse, c'est l'acception ou les acceptions aujourd'hui reçues.

Les ouvrages récents comportent souvent des index terminologiques. Usage courant dans les éditions allemandes ou anglo-saxonnes qui se généralise heureusement chez nous. A la fin de l'*Algèbre* de Godement, 10 pages d'index contiennent quelque 500 mots et le recours à ces renvois vaut mieux que beaucoup de pseudo-

définitions.

Et, pourtant, l'attrait d'un dictionnaire spécialisé est indéniable. L'insistance de nos collègues sur les questions de vocabulaire est d'ailleurs raisonnable.

Warusfel, dans son *Dictionnaire raisonné*, a groupé en 64 rubriques des explications concernant 2 000 mots. Ouvrage de 500 pages (édition Le Seuil) surtout destiné aux étudiants du premier cycle des facultés ou des classes préparatoires aux grandes écoles, c'est l'ouvrage d'un seul auteur, même s'il a sollicité des avis d'autres spécialistes. Il a paru en 1966 et je pense que ses rééditions peuvent apporter quelques corrections à des rédactions qui pouvaient être améliorées.

La conception et la rédaction du Dictionnaire des mathématiques modernes, par L. Chambadal (collection des Larousse de poche) sont différentes. Là encore, le niveau choisi est celui des études supérieures. Les notices, relativement courtes, sont rangées par ordre alphabétique. La terminologie me paraît très strictement conforme au bourbakisme le plus orthodoxe (comme il est assez naturel, Bourbaki, comme tout auteur, a ses préférences, souvent fort bonnes). Cette orthodoxie ne va toutefois pas sans excès qui transparaissent dans les notices historiques qui sont d'une remarquable indigence : le nom, le prénom, la nationalité (qu'a-t-on à en faire?) et les dates des mathématiciens. Seuls ont droit à plus de commentaires sur leurs œuvres les fondateurs de Bourbaki; on y décèle une sorte de vanité par personnes interposées qui ne dispose pas le lecteur à la confiance sur le reste.

Cette réserve formulée, je m'en voudrais de ne pas reconnaître le travail accompli. Et je suis d'autant plus scandalisé par l'article « Mathématiques et barrière de langue » de Paul Camus (*Le Figaro* du 27-10-69). Ce dernier feint de croire que ce dictionnaire a pour but d'aider sa petite fille, élève au lycée qui ne comprendrait pas les mots *foncteur*, *tenseur*, *filtre*... Or, je ne pense pas que M. Chambadal ait jamais eu l'ambition, par son livre, de participer à la réforme de l'enseignement aux niveaux élémentaires.

Le problème, pour nous qui enseignons à ces niveaux, reste donc entier. Il n'aura de solution, ou plutôt cette solution ne pourra être recherchée que dans l'effort permanent de confrontation de nos avis, de nos expériences. Ainsi sont nées, au sein de l'A.P.M.E.P. diverses commissions; avant la dernière guerre, les professeurs s'étaient mis d'accord sur l'usage de certains mots qui sont devenus classiques; par exemple, médiatrice! Les questions de vocabulaire devenant de plus en plus pressantes, la rubrique des « matériaux pour un dictionnaire » assurée par notre Collègue J.-M. Chevallier a rendu compte des travaux de la Commission du Dictionnaire de l'A.P.M.E.P. L'édition 1967 de La Mathématique parlée par ceux qui l'enseignent a vu le jour cette année; elle est enrichie des fiches qui sont régulièrement insérées dans le Bulletin national.

Il ne faut surtout pas oublier que ce travail est et doit être collectif et perpétuel. Au titre de la Régionale Parisienne, nous avons le devoir d'y participer. J. Sauvy a montré l'exemple dans le *Cahier 8*; il faut souhaiter que beaucoup de lecteurs l'imitent. C'est la raison d'être de cette digression sur les dictionnaires.

Wolfgang Wörter.

Langues

Si les Chantiers de pédagogie mathématique sont consacrés à l'enseignement mathématique élémentaire, cela ne signifie pas que rédacteurs ou lecteurs s'enferment dans cette spécialité: tous savent, par expérience, que tout enseignement refermé sur lui-même se sclérose vite. Aussi suivent-ils avec attention les problèmes posés par l'enseignement des langues vivantes. Sans pouvoir ici, et en quelques lignes seulement, analyser le pour et le contre des nouvelles réglementations, reconnaissons que freiner le développement de l'enseignement des langues vivantes serait, de nos jours, une absurdité. Il suffit de citer les résultats remarquables obtenus dans les expériences d'apprentissage précoce d'une langue étrangère à l'Ecole Primaire. Pour ces langues, comme pour la langue mathématique, la continuité des efforts pédagogiques « de la Maternelle aux facultés » balaiera tous les obstacles que des administrations s'ingénient à multiplier par maladresse, ignorance ou ladrerie.

Seulement, il y faudra la conjonction des efforts de tous, la coopération des uns et des autres, hors de tout « impérialisme de spécialité ». C'est pourquoi nous devons saluer l'initiative de l'Association Française des Professeurs de Français dont le Manifeste de Charbonnières donne ses propositions pour une rénovation de l'enseignement du français », de la Maternelle à l'Université.

moo al a motori el saq escesib en lun G. W.

Parmi nos lettres

Nos lecteurs comprendront que nous ne reproduisions pas les lettres de compliments que certains veulent bien nous adresser. Il est juste, cependant, que nous disions à ces correspondants que leurs encouragements nous sont très précieux. Nos remerciements en particulier à M^{me} Terfve-Legros, Inspectrice de l'Enseignement technique à Bruxelles, à M. André Chevalier, I.D.E.N. à Saint-Pol-sur-Mer (Nord), à M^{11e} Bucher, professeur à l'École Normale de Metz qui nous reparlera de son travail de formation des maîtres et qui nous cite aussi l'avis favorable d'un professeur de français curieux de mathématiques.

M. C. Chaumont, I.D.E.N. à Ploërmel (Morbihan), nous écrit une lettre sympathique; sur la feuille verte insérée dans le *Cahier 7*, il a vu que, de quatre choses...

la cinquième :

Ayant examiné la fiche verte jointe à mon premier numéro des chantiers de pédagogie mathématique, je constate de deux choses l'une:

— ou bien je ne suis pas assez mathématicien pour comprendre (j'ai pourtant été l'élève de M. Walusinski il y a 20 ans mais hélas c'était déjà bien tard pour moi),

— ou bien j'appartiens à une 5° catégorie à savoir que vous avez enregistré mon abonnement au bulletin série 69-70 sur lettre de ma part et chèque du 2 décembre mais que je n'ai encore jamais rempli de feuille verte.

A tout hasard, je joins donc mon imprimé adressé rempli en vous remerciant très vivement et de l'aide précieuse que l'A.P.M.E.P. nous apporte à nous, les bonnes à tout faire de l'Éducation nationale, et de la célérité de votre organisation de diffusion.

Bien entendu, nous laissons à notre aimable Collègue la responsabilité de son appréciation sur le rôle des I.D.E.N. tel que l'Éducation Nationale le conçoit.

A la suite de l'article de Jean Sauvy sur le « levier arithmétique », $M^{\rm me}$ Sauvy a recueilli, de son côté, le témoignage suivant.

Autre exemple de réaction d'élèves du cours moyen devant le levier arithmétique

Ayant pris connaissance dans le *Cahier 8* (pp. 35 et suivantes) des réactions d'élèves de 9-11 ans face au levier arithmétique, il me paraît intéressant de faire état d'une expérience analogue à laquelle je me suis livrée l'an dernier dans une école de la région parisienne et au cours de laquelle un jeune garçon (9 ans 6 mois) a tiré

un parti assez étonnant de ce matériel.

En effet, comme on le verra à la lecture du présent compte rendu, cet élève au cours d'une séance libre d'environ une heure, a exploité les possibilités du levier d'une façon beaucoup plus systématique et complète que ne l'avaient fait les élèves de la classe — en général un peu plus âgés — dont les réactions sont rapportées dans le précédent article. Il a notamment utilisé le levier pour opérer des soustractions et des divisions et ses commentaires donnent à penser qu'il a bien saisi la nature profonde des quatre opérations arithmétiques.

Voici le compte rendu que j'ai rédigé à l'issue de cette séance.

L'élève prend des anneaux qu'il suspend de part et d'autre du pied en s'arrangeant

pour obtenir l'équilibre du fléau.

Quand il a réalisé un équilibre il note sur son cahier le dispositif obtenu. Il utilise pour cela le numéro d'ordre du crochet qui reçoit le ou les anneaux. Il prend

soin de noter toujours le nombre d'anneaux en premier et le numéro d'ordre du crochet recevant les anneaux en second.

Sur son cahier il écrit par exemple les indications ci-dessous :

1er exemple :

à gauche 2
$$\times$$
 7 = (1 \times 9) + (1 \times 5)
(2 anneaux sur le 7) 1 anneau sur le 9 et 1 anneau sur le 5
14 = 9 + 5
14 = 14

2e exemple:

3e exemple:

$$4 \times 5 = 5 \times 4$$
(4 anneaux sur le 5) (5 anneaux sur le 4)

Au bout d'un moment je lui demande s'il n'a pas de remarques à faire sur ce qu'il a écrit. Il regarde et, après avoir réfléchi un moment, me dit d'abord :

 $\ll 4 \times 5$ donne le même résultat que 5×4 évidemment!!! (la balance est en équilibre) et c'est vrai toujours avec d'autres nombres... »

(Il me donne d'autres exemples illustrant ce qu'il vient d'affirmer.) Puis, une autre remarque :

« Quand on a 1 croix (x) un autre nombre, ce nombre ne change pas ».

Il ajoute:

« C'est comme dans la multiplication, le 1 ne change pas le résultat; après un instant de silence : « dans l'addition, c'est le 0 qui ne change pas le résultat ».

(Note de l'observateur: autrement dit, quand l'élève écrit 2 x 7 sur son cahier, la croix (x) n'est pas le signe de la multiplication mais une manière de transcrire brièvement le fait que les deux jetons sont associés au crochet 7. D'autre part la propriété de commutativité lui semble évidente allors que la « propriété de neutralité » du « 1 » de la multiplication et du « 0 » de l'addition paraît être une décou-

L'élève poursuite son expérimentation, notant toujours ce qu'il fait. Voici la transcription de ses notes :

$$5 \times 1 = (1 \times 2) + (3 \times 1)$$

 $5 = 2 + 3$

 $5 \times 1 = (1 \times 2) + (3 \times 1)$ 5 = 2 + 3 5 = 5. Il s'arrête et me dit : « Tu sais, je peux te faire aussi des divisions avec ça (le levier arithmétique); regarde ». Il manipule

$$\begin{array}{cccc}
12 & : & 3 & = & 4 \\
4 & \times & 3 & = & 12 \\
& & 12 & = & 12
\end{array}$$

Par la suite, l'élève confirme le jeu en introduisant des divisions avec reste non nul.

Exemple : (Nous reproduisons l'écriture même de l'élève)

$$7:5=(1\times 5)+2$$

où l'élève veut exprimer

$$(1 \times 5) + 2 = 7$$

7 = 7

Autre exemple:

$$3:2=(1\times 2)+1$$

où il veut dire

$$(1 \times 2) + 1 = 3$$

3 = 3

Ou encore:

$$8:3=(2\times 3)+2$$

où il veut dire

$$(2 \times 3) + 2 = 8$$

8 = 8

Arrivé à ce point l'élève me fait remarquer que : « la division c'est l'inverse de la multiplication ».

Après ces exercices, l'élève m'indique qu'il peut aussi se servir du levier pour faire des soustractions. Exemple

> on place 1 jeton à gauche sur le 6 1 jeton à droite sur le 5;

pour avoir l'équilibre il faut ajouter 1 jeton sur le 1 à droite. Cette fois l'enfant note sur son cahier

$$6 - 5 = 1$$

 $5 + 1 = 6$
 $6 = 6$

Autre exemple

$$5 - 3 = 2$$

 $5 = 3 + 2$
 $5 = 5$

La séance se termine alors, l'heure étant écoulée. Mais l'enfant ne donne aucun signe de lassitude.

Simonne SAUVY.

Le carnet d'exercices

Rappel de certains énoncés du chapitre 3; j'omets les exercices pour lesquels j'attends plutôt des exemples imaginés par des lecteurs.

[E. 27] Définissez $M \cup \overline{A}$, $\overline{M} \cup A$, $\overline{M} \cup \overline{A}$, soit comme complémentaires dans E d'intersections bien choisies, soit directement en employant, dans chaque phrase de définition, la conjonction ou.

[E. 28] Utilisez les définitions de l'intersection et de la réunion pour énoncer en extension les sous-ensembles :

$$M \cap \overline{M}$$
, $M \cup \overline{M}$, $A \cap \overline{A}$, $A \cup \overline{A}$

[E. 30] Nous avons défini plus haut $M \cup A$ comme le complémentaire de $\overline{M} \cap \overline{A}$ dans E. Quel est donc le complémentaire de $M \cap A$ dans E? Vous découvrez un jeu plaisant entre les mots intersection, réunion et complémentaire.

[E. 31] Exercice un peu plus difficile : définir quelle est l'intersection de la réunion $M \cup A$ et de la réunion $\overline{M} \cup \overline{A}$, ce qui s'écrit

$$(M \cup A) \cap (\overline{M} \cup A)$$

[E. 32] Sur la figure (E. 32), que représente la zone hachurée? Il y a plusieurs façons (équivalentes) de donner la réponse.

[E. 33] Pour les lecteurs qui aiment les exercices, proposons les petits mystères suivants :

$$\begin{array}{c} {\displaystyle \int_{E}(M \, \Delta A)} \ ; \quad \left({\displaystyle \int_{E}M} \right) \Delta \left({\displaystyle \int_{E}A} \right) \\ \overline{M} \, \backslash \, \overline{A} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} (M \, \cup \, A \, \backslash \, (M \, \cap \, A) \\ (M \, \cap \, A) \, \backslash \, (M \, \cup \, A) \quad (M \, \backslash \, A) \cup (A \, \backslash \, M) \end{array}$$

Vous pouvez répondre par des petits dessins à carreaux hachurés comme sur les figures 8, 9 ou 10, ou bien par d'autres écritures symboliques.

[E. 34] Selon [2.6.1] inclusion et implication sont étroitement liées. Rapprochez l'exercice [E. 18] d'une propriété de l'inclusion.

[E. 35] Dessinez successivement les treillis correspondant à Card $E=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5.$

[E. 37] Vous éprouverez certainement le besoin, pour assimiler tous ces résultats, de « manipuler » quelques « vrais » ensembles. Je vous conseille d'opérer avec des ensembles de lettres ou de nombres entiers.

[E. 38] Soit E l'ensemble des entiers de 1 à 100. Soit T la partie de E constituée par les multiples de 3; soit C la partie de E constituée par les multiples de 5. Définir $T \cap C$.

[E. 39] Dans le même ensemble E définir en extension le sous-ensemble des diviseurs entiers de 72 soit S, puis le sous-ensemble J des diviseurs entiers de 60. Définir alors $S \cap J$.

[E. 40] Reconnaître, sur la figure (E. 40), les quatre sous-ensembles

$$X \cap Y, X \cap \overline{Y}, \overline{X} \cap Y, \overline{X} \cap \overline{Y}$$

$$\overline{X} = \int_{E} X \qquad \overline{Y} = \int_{E} Y$$

où

[E. 41] Sur la figure (E. 41) reconnaître $X \cap Y \cap \overline{Z}$; puis caractériser les 7 autres sous-ensembles définis comme intersections de trois parties qui sont ici représentées.

Si le jeu vous amuse, vous pouvez généraliser et comparer les résultats obtenus avec ceux donnés par l'arbre des choix [3.2].

[E. 42] Prendre pour p, q, r trois assertions quelconques. Pour formuler les huit assertions obtenues par conjonctions de p (ou \bar{p} sa négation), de q (ou \bar{q}), de r (ou \bar{r}).

[E. 43] Traduire les relations ensemblistes des exercices 38 et 39 en langage de propositions et de conjonctions de propositions.

Le carnet des solutions

[E. 27] Vous vous rappelez que M est l'ensemble des lettres qui figurent au moins une fois dans le mot « mathématiques », A l'ensemble des lettres qui figurent une fois au moins dans « algèbre ».

$$M \cup \overline{A} = \overline{\overline{M} \cap A}, \overline{M} \cup A = \overline{M \cap \overline{A}}, \overline{M} \cup \overline{A} = \overline{M \cap A}$$

où nous constatons sur des exemples la règle de De Morgan : « le complémentaire d'une intersection est égal à l'union des complémentaires ».

Expression en français de chacune des réunions précédentes :

— ensemble des lettres figurant une fois au moins dans « mathématiques » ou ne figurant pas dans « algèbre »;

— lettres ne figurant pas dans « mathématiques » ou figurant une fois au moins

dans « algèbre »;

— lettres ne figurant pas dans « mathématiques » ou ne figurant pas dans « algèbre ».

[E. 28] $M \cap \overline{M}$ désigne l'ensemble des lettres figurant une fois au moins dans « mathématiques » et ne figurant pas dans ce mot; donc $M \cap \overline{M}$ est l'ensemble vide.

 $M \cup M$ est l'ensemble des lettres figurant dans « mathématiques » ou qui n'y figurent pas, autrement dit l'ensemble plein (toutes les lettres).

[E. 30] Encore une application de la loi de De Morgan. Le complémentaire de $M \cap A$ dans E est égal à la réunion des complémentaires \overline{M} , \overline{A} de M, A respectivement.

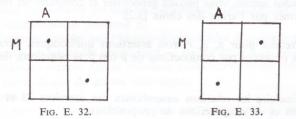
[E. 31] Exercice plus difficile mais qui vous fait découvrir sur un exemple et un cas particulier ce qui sera démontré plus loin : distributivité de \cap sur \cup , de \cup sur \cap .

Sur le diagramme de Carroll vous découvrez :

$$(M \cup A) \cap (\overline{M} \cup A) = A$$

[E. 32] Sur la figure (E. 32), les hachures ont été remplacées par un simple point par zone occupée : l'ensemble des zones marquées représente

$$\begin{array}{l} M\Delta \overline{A} = \overline{M}\Delta A = (\overline{M} \cup \overline{A}) \cap (M \cup \overline{A}) = (M \cap A) \cup (\overline{M} \cap \overline{A}) \\ = (A \setminus \overline{M}) \cap (\overline{A} \setminus M) = (M \setminus \overline{A}) \cup (\overline{M} \setminus A) \end{array}$$



[E. 33]
$$\int_{E} (M\Delta A) = M\Delta \overline{A} = \overline{M}\Delta A$$

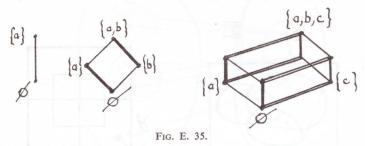
Comparez d'ailleurs le diagramme de la figure (E. 32) et celui de (E. 33). Vous vérifiez aussi :

$$\begin{split} \left(\bigcap_{E} \mathbf{M} \right) \Delta \left(\bigcap_{E} \mathbf{A} \right) &= \mathbf{M} \Delta \mathbf{A} \\ \overline{\mathbf{M}} \setminus \overline{\mathbf{A}} &= \mathbf{A} \cap \overline{\mathbf{M}} \\ (\mathbf{M} \cup \mathbf{A}) \setminus (\mathbf{M} \cap \mathbf{A}) &= \mathbf{M} \Delta \mathbf{A} \\ (\mathbf{M} \cap \mathbf{A}) \setminus (\mathbf{M} \cup \mathbf{A}) &= \emptyset \\ (\mathbf{M} \setminus \mathbf{A}) \cup (\mathbf{A} \setminus \mathbf{M}) &= \mathbf{M} \Delta \mathbf{A} \end{split}$$

Vous remarquez que les signes — du livre pour exprimer la différence dissymétrique ont été remplacés par le signe oblique \; à l'expérience avec les élèves, j'ai été convaincu que la distinction essentielle entre l'opération ensembliste marquée \cup et l'opération d'addition était plus facilement assimilée si la même distinction était observée entre la différence dissymétrique, opération ensembliste, et la soustraction.

[E. 34] Si je reconnais avoir été assez confus dans le livre sur *implication* et *inclusion*, un lecteur m'écrit que, dans le Cahier 8 je n'ai pas été plus convaincant. Il faut donc que je prenne le temps d'une réflexion supplémentaire et j'y reviendrai.

[E. 35] J'aimerais mieux dire, aujourd'hui, dessiner les diagrammes des simplexes, sachant que ceux-ci ont une structure de treillis.



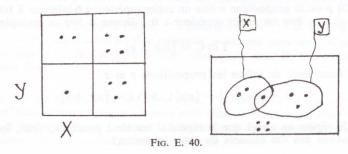
Sur la figure (E. 35), on a représenté le simplexe pour $\{a\}$, pour $\{a,b\}$, pour $\{a,b,c\}$. Les conventions sont visibles sur ce troisième diagramme : en montant, le trait fin signifie adjoindre $\{a\}$, le trait gras adjoindre $\{b\}$, le trait double adjoindre $\{c\}$. Le lecteur complètera les noms des sous-ensembles. Il dessinera lui-même, selon des conventions semblables, les diagrammes des simplexes $\{a,b,c,d\}$, $\{a,b,c,d,e\}$; la couleur, les couleurs remplaceront avantageusement les divers traits noirs. Vous obtiendrez de bien jolies figures.

[E. 37] « Manipuler des vrais ensembles », c'est vite dit. Des ensembles bien précisés de lettres ou de nombres, voilà un matériel pédagogique très accessible mais un peu abstrait tout de même pour « manipuler ». Il existe heureusement des matériels didactiques variés, blocs à caractéristiques multiples, matériel Cuisenaire, etc. dont l'usage s'impose avec les petits... et beaucoup de grands. Ce dont il faut se méfier, ce sont les ensembles « pris dans la vie courante » qui sont souvent flous, autrement dit mal définis; si les ensembles manipulés sont mal définis, il faut s'attendre à des résultats également flous. Dans une première approche des notions, il n'y a évidemment aucun intérêt à frôler ainsi les périls pédagogiques.

[E. 38] $T \cap C = \{15, 30, 45, 60, 75, 90\}$, c'est-à-dire l'ensemble des entiers supérieurs à 0 inférieurs à 100 qui sont multiples de 3 et multiple de 5 (autrement dit les multiples de 15). Tiens, quel est le plus petit?

[E. 39] $S \cap J = \{1, 2, 3, 5, 6, 12\}$, c'est-à-dire l'ensemble des entiers supérieurs à 0 inférieurs à 100 diviseurs communs de 72 et de 60. Tiens, quel est le plus grand?

[E. 40] La figure (E. 40) a été refaite ici en diagramme de Venn puis en diagramme de Carroll; je ne cache pas ma préférence pour ce dernier. $X \cap Y$ est la zone marquée .; $X \cap \overline{Y}$ marquée ..; $\overline{X} \cap Y$ marquée ...; $\overline{X} \cap \overline{Y}$ marquée ...;



[E. 41] Même préférence ici pour le diagramme de Carroll où Z est le carré central (donc \overline{Z} la zone périphérique). $X \cap Y \cap \overline{Z}$ est marquée d'un point.

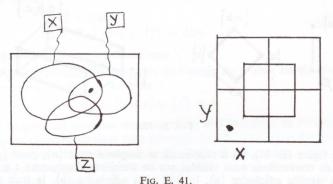


FIG. E. 41

Selon les procédés de Carroll lui-même, on peut fabriquer un diagramme où entreront en jeu quatre parties X, Y, Z, T; puis cinq parties X, Y, Z, T, V; il faudra trouver un moyen de faire apparaître 16 puis 32 zones. (Envoyez-nous de beaux dessins sur bristol (à l'encre de Chine); nous publierons les meilleurs.)

[E. 42] Le mieux est de donner en même temps les huit propositions et leurs tables de vérité en fonction des valeurs de vérité de p, q, r. Pour simplifier le tableau, au lieu d'écrire $p \wedge q \wedge r$, on a écrit seulement pqr.

p	q	r	pqr	$p q \bar{r}$	$p \bar{q} r$	$p\bar{q}\bar{r}$	$\bar{p} q r$	$\bar{p} q \bar{r}$	$\bar{p}\bar{q}r$	$\bar{p}\bar{q}\bar{r}$
1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Une seule valeur 1 dans chaque colonne. On devinera plus tard la valeur de vérité de la disjonction de ces huit conjonctions.

[E. 43] p est la proposition « être un entier supérieur à 0 inférieur à 100 et multiple de 3 »; q, « être un entier supérieur à 0 inférieur à 100 et multiple de 5 ». Alors

$$\mathbf{T} \cap \mathbf{C} = \{x | p \land q\}$$

Vous formulerez de même les propositions r et s

$$S = \{x|r\}, J = \{x|s\}; S \cap J = \{x|r \land s\}$$

P.S. Je répète un appel que je répèterai encore : pourquoi, vous, lecteur, ne m'envoyez-vous pas des énoncés de votre invention?

Lectures actuelles ou inactuelles

Saintes erreurs

« ... Les gymnastes du cirque savent tomber; c'est un autre genre d'exercice où ils excellent; ainsi ils essaieront cent fois, aussi joyeux, aussi souples à la centième. Il faudrait apprendre à se tromper aussi de bonne humeur. Les gens n'aiment pas penser; c'est qu'ils ont peur de se tromper. Penser c'est aller d'erreur en erreur. Rien n'est tout à fait vrai. De même aucun chant n'est tout à fait juste. Ce qui fait que la mathématique est une épreuve redoutable, c'est qu'elle ne console point de l'erreur. Thalès, Pythagore, Archimède ne nous ont point conté leurs erreurs; nous n'avons pas connu leurs faux raisonnements; et c'est bien dommage. »

ALAIN (Propos sur l'éducation).

« ... Mais le meilleur des conseils ne vaut pas la moindre imprudence et n'a jamais épargné une erreur à quelqu'un qu'il ne l'ait jeté dans une autre. Je vous jure qu'il faut se tromper et que rien d'excellent ne peut dériver de l'expérience l'autrui. »

P. VALÉRY (Mon Faust).

« Toute expérience ne vaut que par ses tâtonnements, ses échecs, ses débats de conscience. »

Jean Lurçat.

Rappel d'un ouvrage paru il y a quelques années : Causalité et accidents de la découverte scientifique par René Taton (Masson, éditeur). Sans répondre complètement au vœu d'Alain, — une histoire des erreurs scientifiques —, on y trouve l'analyse d'exemples significatifs dans tous les domaines de la recherche, y compris les mathématiques. Des suggestions pour une pédagogie de la découverte? Peut-être; le jeune élève ne doit-il pas apprendre à se tromper?

Les théories des ensembles

Sous le titre « La théorie des ensembles », notre Collègue Alain Bouvier, assistant à l'I.R.E.M. de Lyon, donne un ouvrage que beaucoup d'entre nous liront avec profit, qu'ils aient déjà une information sur la question ou qu'ils en soient au premier contact (évidemment, dans ce cas, ils auront plus de mal à suivre, puisque les brefs exposés ne sont pas suivis d'exercice : dans les 128 pages d'un volume de la Collection « Que sais-je? », il n'était pas question d'en présenter).

Toute la première partie concerne le développement parfois dit naïf : notions élémentaires, relations en général, relations d'ordre ou d'équivalence, fonctions et applications. L'exposé me paraît clair, heureusement dépourvu de ces effets de style dont certains journalistes semblent attendre beaucoup pour retenir l'attention du lecteur alors que bien souvent des images trop hardies le déroutent. Peut-être les diagrammes ne sont-ils pas assez nombreux ni assez utilisés; seuls le sont ceux qui sont

dits ici, curieusement, de Venn-Euler; ceux de Carroll ne sont pas cités. D'ailleurs systématiquement les applications à la logique sont écartées. Personnellement, je n'aime pas qu'une relation soit désignée par la même lettre que son graphe, que la relation soit identifiée à son graphe; au moins pédagogiquement, le rappel des ensem-

bles de départ et d'arrivée me paraît indispensable.

Ce qui me paraît particulièrement digne d'être signalé, c'est la deuxième partie : à partir de la définition des cardinaux, A. Bouvier fait très bien comprendre l'opérateur τ de Hilbert, et aboutit à une présentation qui m'a paru très claire de l'hypothèse du continu. Le dernier chapitre, « de la théorie naïve aux théories formelles » reprend rapidement l'histoire de la théorie des ensembles et sans pouvoir, en si peu de pages, distiller les nuances, fait bien ressortir l'étrange parenté entre l'histoire des géométries et l'histoire des théories des ensembles. Je reproduis le tableau de la page 121 :

Étapes du développement	Géométrie	Théorie des ensembles
Bases intuitives Premiers résultats	Thalès Pythagore Théètète	Bolzano Dedekind Cantor
Découverte des paradoxes	Zenon	Burali-Forti Cantor Russell
Bases axiomatiques de la théorie naïve	Eudoxe Euclide	Zermelo-Fraenkel von Neumann-Bernays
Étude de l'indépendance des axiomes	Hilbert	Gödel
Découverte des théories non classiques	Gauss Riemann Lobatchevsky	Cohen
Applications des nouvelles théories	Minkowski Einstein	Sour le titre e La trisoria des

Au lecteur d'ajouter des dates; de Thalès à Einstein, plus de 25 siècles; de Cantor à Cohen, trois quarts de siècle.

Un index terminologique, chose assez rare dans un petit volume de ce genre,

fait d'autant plus regretter qu'il n'y en ait pas un aussi pour les symboles.

En résumé, un livre de lecture relativement facile qui nous rendra de grands services. A faire figurer dans toutes les bibliographies pour la Formation Permanente des Maîtres.

Des revues

Comme il en existe heureusement beaucoup et qu'on ne peut toutes les lire, au moins faudrait-il que chacun de nous signale, ne serait-ce que d'un mot, ce qu'il

a glané, ici ou là.

J'ai plaisir à signaler le nº 1, daté novembre-décembre 1969, de G.E.P. Math, bulletin ronéotypé du Groupe d'Études et de Pédagogie en Mathématique, nouvelle dénomination du Groupe d'Études des Futurs Enseignants en Mathématiques qui était né, l'an dernier, au sein de la Faculté des Sciences de Paris et plus particulièrement dans l'orbe de l'I.R.E.M. Parmi les raisons que les animateurs du G.E.P.M. donnent pour le lancement de leur bulletin, il en est une particulièrement pertinente que je souligne :

« ... Parce que la pluralité des groupes est un facteur d'indépendance et que

l'indépendance est nécessaire à la liberté de création. »

Dans notre Régionale A.P.M.E.P. et dans ces Cahiers, nous avons le même souci. Que nos jeunes camarades sachent donc que, loin de vouloir les absorber, nous leur offrons de s'exprimer ici en pleine indépendance. Notre plaisir sera de les aider quand et comme ils le voudront.

Les Cahiers Rationalistes de décembre 1969 publient un numéro tout entier consacré à Jacques Hadamard. Cette intéressante plaquette de 60 pages est due

à nos collègues M. et Mme Rossat-Mignod.

Universités pluridisciplinaires ou universités seulement scientifiques : la question nous concerne-t-elle? Oui, au premier chef puisque, de la structure des universités dépendra la nature de la formation des maîtres qui en seront étudiants. Deux manifestes opposés ont paru, à ce sujet, dans *Le Monde*, le 7 janvier (pour les pluridisciplinaires), le 10 contre. Sujet sur lequel nous aurons à revenir.

Activités mathématiques

Sous ce titre, Nicole Picard publie (OCDL éditeur) un premier cahier destiné à l'information des maîtres et des parents. Ceux des premiers qui s'inquiètent de la façon ou des façons dont ils doivent, l'an prochain, infléchir leur enseignement pour aborder la première étape de la réforme (du Cours Préparatoire au Cours Moyen), trouveront dans ce Cahier matière à réflexion. Rien qui leur dise : voilà ce qu'il faut faire. Mieux : voici comment on peut commencer. A vous, à chacun de nous, d'adapter à nos besoins, à nos goûts ou, mieux encore, aux goûts, aux demandes de nos élèves.

Espérons que beaucoup de bons livres tels que celui de Nicole Picard

nous accompagneront dans ce passionnant voyage que nous entreprenons.

Même à Paris, le ciel

Il est vrai que dans les villes, au milieu de l'hiver, on oublie qu'il y a des astres au-delà des nuages. Le soir, au couchant, on voit encore Mars en ce début 70 et,

toute la nuit Jupiter.

Vous savez que vous trouverez toujours la meilleure information à ce sujet dans *l'Astronomie*, revue mensuelle de la Société Astronomique de France (28, rue Saint-Dominique, Paris-7e; cotisation 35 F). Pour guider les amateurs, Pierre Bourge et Jean Lacroux viennent de publier : « A l'affût des étoiles » (302 p., Dunod éditeur) un guide vraiment pratique pour l'observateur débutant.

G. W.

Le bloc-notes de la Régionale où nous réunissons des échos variés sur l'actualité pédagogique et sur les activités propres de notre Régionale.

Le petit Iremois de Paris

ou des échos sur la vie de l'I.R.E.M. de Paris. Voici d'abord des sujets qui ont été étudiés ou qui vont l'être dans certains des séminaires de l'I.R.E.M.

Logique dans l'enseignement (le vendredi à 17 h 30) :

Réflexion sur les nouveaux programmes de Seconde, étude critique du chapitre « Logique » des manuels récents (J. Adda, 28 novembre et 5 décembre 1969). Útilisation de la méthode des arbres pour le calcul propositionnel et le calcul des prédicats (J. P. Azra). Compte rendu d'un enseignement aux étudiants en philosophie par cette méthode (R. Martin). De la notation polonaise (D. Lacombe). Compte rendu d'un enseignement en collaboration avec des professeurs de français (M. Drucker). Le langage naturel et les possibilités d'interpénétration entre l'enseignement de la grammaire et l'enseignement des mathématiques (M. Gross). Expérience sur les propositions précédentes (M. Gross, R. Marienstras, I. Marmande, J. Adda). Propositions d'exercices sur la relation entre signifiant et signifié. Problème des noms (F. Duchêne, Rapegno, Léger, N. Guéron). Propositions d'exercices sur les formes normales du calcul propositionnel issus de situations pratiques (équipes du séminaire de Technologie). Apprentissage des tables de vérité à l'école primaire (J. Mété-écrites avec (¬, ⇒), et inversement, etc. Décidabilité de la géométrie élémentaire du premier ordre (J. Adda). Études sur la théorie des ensembles (M. J. Glorian, N. Ehrlich, E. Bergada, F. Duchêne. Dessenne). L'enseignement des cardinaux dans les classes primaires.

Analyse (le lundi à 17 h 30). Les premières études prévues sont axées essentiellement sur l'initiation à l'analyse dans le premier cycle du second degré et dans l'enseignement primaire. Mesure: unité, mesure extérieure, mesure intérieure, changement d'unité; vers un modèle mathématique des longueurs et des aires. Nombres décimaux: introduction algébrique; applications aux mesures (ou nombres à virgule); introduction par les mesures; étude algébrique. Nombres réels: introduction axiomatique; motivations tirées de la mesure. Approximation à un niveau élémentaire: lien avec l'introduction des réels. Fonctions numériques. Probabilité: (primaire et premier cycle du secondaire) exemples de mesures. Probabilité: niveau Terminale et H.E.C. Analyse non standard.

Algèbre et Géométrie (jeudi 18 h, tous les 15 jours). Sont actuellement prévus : Deux exposés d'arithmétique destinés à situer les diverses propriétés dans leurs cadres (structures ordonnées et « principalité » ...) (6 et 20 novembre par J. Grappy et J. Celeyrette). La divisibilité dans $\mathbb Z$ en classe de Quatrième (M^{me} Thibault, M. Bean, M. Garnier, 4 décembre). Quelques questions d'arithmétique en Terminale C (M^{11e} Hervier, M^{me} Lemoine, M. Béan). Recherche de quelques exemples très élémentaires d'espaces vectoriels (M^{me} Gama, M^{me} Janiaud, M^{11e} Meyer). Un exposé sur les catégories (nous espérons M. Benabou). Deux exposés sur la géométrie d'après Artin (M. Vissio).

Adresse de l'I.R.E.M.

Depuis le 1er janvier 1970, l'I.R.E.M. occupe des locaux moins provisoires que les précédents. Notez l'adresse : Faculté des sciences, Tour 56, 3e étage, Quai

Saint-Bernard, Paris-5e. (Tél. 336-25-25, poste 53-86).

L'ancienne adresse était Tour 23. Toujours des tours. Rien à voir avec le tour du couvent où, lorsqu'il était bébé, Jean Le Rond dit d'Alembert, fut abandonné. D'ailleurs si l'A.P.M.E.P. n'a pas la prétention d'être la seule mère des I.R.E.M., il est bien certain qu'elle revendiquerait cette « paternité » si tel I.R.E.M. était abandonné de ceux qui doivent subvenir à ses besoins.

Entre I.R.E.M.s

Les 22 et 23 novembre 1969, sur invitation de l'I.R.E.M. de Paris, un colloque inter-I.R.E.M. a été organisé. Il a permis de se rencontrer à des collègues qui participent à la construction des I.R.E.M. de Lyon, Paris et Strasbourg (fondés fin 68)

et Besançon, Bordeaux, Marseille, Rennes (fondés fin 1969).

Une première partie du colloque a permis à chacune des équipes de présenter ses réalisations et ses projets. Des commissions ont ensuite discuté : de la F.P.M., de la formation initiale des maîtres (concours de recrutement et certificats de maîtrise pour les maîtres du secondaire; le cas des instituteurs), l'expérimentation des suggestions dues aux séminaires d'étude, la préparation des statuts des I.R.E.M., ainsi que des sujets plus techniques (analyse, algèbre et géométrie, logique, mathématiques appliquées à la technologie et aux sciences humaines).

Si nous n'avons pas la place de développer ce compte rendu, nous espérons que par certains articles sur l'un ou l'autre des sujets abordés nous aurons une idée plus précise des idées échangées au cours de ce colloque. Souhaitons en tout cas que les liaisons entre les I.R.E.M. se renforcent car ce ne peut être que favorable à l'indépendance de chacun. Plus il y aura d'I.R.E.M. et plus ils seront indépendants,

plus la didactique mathématique progressera.

Films de pratique mathématique

Dix neuf films destinés à la formation et au recyclage en mathématiques des enseignants du 1er degré ont été réalisés par le Centre audio-visuel de l'Ecole Normale Supérieure de Saint-Cloud. Ils s'insèrent dans une série intitulée « Témoignages Pédagogiques » dont une nouvelle tranche sera réalisée en 1969-1970. On trouvera ci-après la liste des films actuellement disponibles ainsi que l'adresse des organismes diffuseurs.

Ces films ont été tournés dans différentes classes (du C.P. au C.M.2) de plusieurs écoles primaires. Ils donnent à voir un moment de la vie d'une classe, centré sur une activité mathématique. Ils présentent une manière parmi bien d'autres d'aborder telle ou telle notion mathématique à un niveau d'âge donné, et une étape particulière de ce travail. Ces séquences ne sont pas des leçons modèles, mais des leçons réalisées par des maîtres aux prises avec les mathématiques modernes dans la réalité de leur classe avec toutes les imperfections que cela peut supposer autant du point de vue pédagogique que du point de vue mathématique.

Certains films présentent un travail collectif (exemple : « Schéma du problème 1 », « $(n+1)^2$ ». D'autres films montrent des activités menées par petits groupes autonomes (« Machines », « Numération », « Soustraction »). Certains donnent à voir

une leçon ouverte, une étape de recherche où les enfants apportent des exemples tirés de leur expérience personnelle, imaginent des solutions et orientent l'activité de la classe dans des directions qui n'avaient pas nécessairement été prévues par le maître (exemple : « Codes et symétries 1 et 2 », « Cheminements », « Répartition »). D'autres films présentent une étape de mise en place des connaissances. La leçon comporte alors un objectif précis, une progression et une présentation plus systématique (exemple : « Graduations », « Flèches »).

Ces films peuvent permettre de comparer diverses méthodes pédagogiques et

des manières différentes d'aborder les mathématiques.

Certains de ces « témoignages » comportent des erreurs mathématiques, aucun ne prétend proposer des modes de présentation et des méthodes pédagogiques définitives. Ils doivent ouvrir la discussion et servir de matériau à une réflexion sur la pédagogie des mathématiques et les notions mathématiques sous-jacentes dans ces leçons.

Ces films peuvent donner l'occasion de s'interroger sur les objectifs d'un enseignement des mathématiques au niveau élémentaire, d'analyser concrètement en quoi cet enseignement diffère de l'enseignement traditionnel du calcul et de mesurer les

risques du retour à un certain formalisme en mathématiques modernes.

Des documents d'accompagnement seront bientôt à la disposition des intéressés. Ils situent chaque leçon filmée dans la progression pédagogique de l'année. Ils comportent également des questions destinées à orienter l'observation des maîtres et des propositions d'exercices.

Nous aimerions savoir quels enseignements ont été tirés à partir de la projection de ces films et de leur discussion, afin de nous permettre de mieux adapter et prolonger le travail en cours. Écrivez à M^{11e} Dubost ou M. Rossi, Centre Audio-Visuel, École Normale Supérieure, 2, avenue du Palais, 92-Saint-Cloud.

DIFFUSION: Enseignement Supérieur: Service du Film de Recherche Scientifique, 96, bd Raspail, Paris-6°.

Premier et Second Cycle: Institut Pédagogique National, 29, rue d'Ulm. Paris-5e.

- 1. Schéma du problème nº 1: Exercice sur la soustraction. Construction d'un diagramme de Venn pour représenter et résoudre un problème proposé par un enfant. 16 mm, couleur, son optique, 12 mn, C.E.1.
- 2. Schéma du problème nº 2 : Exercice sur l'addition et la multiplication. Recherche de différentes représentations d'un problème proposé par un enfant. 16 mm, couleur, son optique, 12 mn, C.E.1.
- 3. Schéma-Flèches: Relations grammaticales observées entre des mots incrits au tableau (a même terminaison, a pour féminin). 16 mm, couleur, son optique, 12 mn, C.E.1.
- 4. $(n+1)^2$: Découverte de la formule $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$. Application numérique. Notion de récurrence. 16 mm, couleur, son optique, 22 mn, C.M.2.
- 5. Notion d'ordre: Introduction de la notion d'ordre à partir d'exemples divers. 16 mm, couleur, son optique, 20 mn, C.E.1.
- 6. Représentation de relations relevées dans un texte : Construction d'un graphe sagittal élémentaire et d'un tableau à double entrée. 16 mm, couleur, son optique, 20 mn, C.E.1.

- 7. *Graduations*: Introduction des nombres à virgule. Construction de tableaux de graduations en différentes bases. 16 mm, couleur, son optique, 30 mn, C.M.2.
- 8. Nombres à virgules: 1º Propriétés des nombres à virgule. 2º Applications à la division. 16 mm, couleur, son optique, 25 mn, C.M.2.
- 9. Exercice de logique « A propos de voitures » : Recherche de représentations graphiques (dont le diagramme de Carroll) pour résoudre un problème de logique. 16 mm, couleur, son optique, C.M.2.
- 10. Exercice de logique « A propos de cartes »: Recherche d'une stratégie pour identifier une carte à jouer sortie d'un jeu de 32. Construction d'un arbre dichotomique. 16 mm, couleur, son optique, C.M.2.
- 11. Codes et symétries (1): Non disponible.
- 12. Codes et symétries (2): Recherche d'un système de codage pour situer un point sur un plan sans ambiguïté. 16 mm, couleur, son optique, C.M.2.
- 13. Codes et symétries (3): Utilisation d'un code. Recherche des symétries d'une figure régulière. Observations sur les codes de points symétriques. 16 mm, couleur, son optique, C.M.2.
- 14. Technique de la soustraction : (au montage): Utilisation de différentes techniques de soustraction en plusieurs bases. 16 mm, couleur, son optique, C.P.
- 15. Groupements en différentes bases: Numération en différentes bases à partir de plusieurs matériaux. Travail en équipes par groupes de niveaux. 16 mm, couleur, son optique, C.P.
- 16. Réunion-Intersection: Réunion d'ensembles disjoints (addition) et d'ensembles non disjoints. Notion d'intersection. 16 mm, couleur, son optique, C.P.
- 17. Machines: Utilisation de machines non numériques (transformation de couleurs). 16 mm, couleur, son optique, C.E.1.
- 18. Cheminements. Exercices sur le plan de métro : (au montage) : Codage des déplacements sur le plan du métropolitain. Déplacements à partir d'un code numérique ou non. 16 mm, couleur, son optique, C.M.2.
- 19. Déplacements élémentaires (au montage): Jeux basés sur l'introduction d'une machine à opérer des déplacements élémentaires (un pas en avant, un pas à droite...). 16 mm, couleur, son optique, C.E.1.

Maîtrise pour étudiants salariés

La Faculté des sciences d'Orsay a organisé sous le sigle M3D une maîtrise èssciences mathématiques pour étudiants salariés. Cette section n'est ouverte qu'aux étudiants de cette catégorie qui gardent le droit d'opter pour une autre section (A, B ou C). Particularités de M3D : pas de cours magistraux, un programme de travail (parties de cours publiés ou polycopiés et des listes d'exercices), le programme étant divisé en huit parties. Contrôle des connaissances par épreuves mensuelles; seconde session d'examen en septembre. Des contacts peuvent être pris par les étudiants pour des séances de travail dirigé aussi individualisé que possible.

Adresse de la section M3D : Bâtiment 36, Faculté des sciences, 91-Orsay.

Les équipes des Chantiers de Pédagogie Mathématique

Pour répondre à une question posée par certains maîtres : « en réunissant le samedi après-midi des collègues qui veulent se perfectionner en mathématique, ne prenez-vous pas une initiative contraire à la politique syndicale? », nous reproduisons un extrait du numéro de janvier de *L'Éducateur*, organe de l'I.C.E.M. (Pédagogie Freinet). Une délégation de l'I.C.E.M. a discuté de la question avec une délégation du S.N.I. :

« Sur les 27 heures, les responsables du S.N.I. ont rappelé l'opposition du syndicat à un escamotage du perfectionnement pédagogique sous couvert des + 3. Ceci dit, autant le S.N.I. est opposé à la convocation autoritaire par un inspecteur en dehors des 27 heures, autant il approuve les réunions d'enseignants qui décident librement de se retrouver pour confronter leurs problèmes que ce soit au niveau de l'établissement ou selon d'autres critères. Ces réunions peuvent se tenir au moment qu'auront choisi librement les intéressés, après la classe du soir, le jeudi, le samedi. le dimanche ou pendant les vacances. Toute interprétation différente doit être rectifiée. Dans cet esprit, l'usage des locaux scolaires doit être possible à tout moment, y compris à Paris. Une intervention sera faite pour qu'aucun directeur ne puisse s'y opposer. »

Une audience rectorale

A la suite des décisions prises par le Comité de la Régionale (voir Cahier 8, p. 70) l'audience demandée a été accordée au Bureau de la Régionale par le Recteur Dehaoussy, le mardi 21 octobre à 9 h 30. Le Bureau était représenté par Blanzin et Walusinski. Première question traitée : celle des décharges de service pour les stagiaires et les animateurs de l'I.R.E.M.; une circulaire ministérielle était alarmante; le Recteur reconnaît qu'il ne peut être question de revenir sur les décharges effectives, qu'il serait désirable que toutes le soient, que celles qui ne le sont pas doivent être compensées par un versement d'heures supplémentaires. La délégation insiste sur la nécessité de donner à l'I.R.E.M. des moyens supplémentaires en personnel pour qu'il puisse assurer toutes les tâches de formation permanente auprès des maîtres du premier degré.

Certaines de ces tâches sont, pour l'instant, assurées par des équipes bénévoles de la Régionale. Les participants aux équipes des chantiers devraient bénéficier, en juin, d'une autorisation d'absence d'une semaine pour participer à un stage intensif qui serait organisé par la Régionale : cette proposition est à étudier, nous

répond M. le Recteur.

Le Bureau de la Régionale s'étonne enfin que certaines Terminales scientifiques aient été supprimées dans la région parisienne : ce n'est pas la bonne façon de mieux former plus de scientifiques. M. le Recteur nous répond que ces suppressions ont été rares; nous répondons qu'une seule suppression aurait justifié notre protestation.

En résumé, le Bureau peut remercier M. le Recteur de son accueil et, devant le Comité réuni le 5-11-69, regretter que le Bureau ait été reçu par celui des trois Recteurs de l'Académie chargé des enseignements supérieurs de sciences économiques et de médecine.

Dans cette dernière réunion, le Comité a discuté d'une question posée par certains services du Ministère qui s'étaient renseignés sur le travail de nos équipes. La réponse est celle que nous avons faite au Recteur : renforcer les moyens de

l'I.R.E.M., élargir son action.

On peut s'étonner que l'Éducation Nationale soit aussi peu ou aussi mal renseignée sur ses propres organismes. Faut-il en inférer que la création des I.R.E.M. n'a pas été du goût de tous les administrateurs?

Sur la formation des maîtres

Une réunion de commission de l'A.P.M.E.P. sur la question de la formation des maîtres du premier degré aura lieu à Limoges le 15 mars prochain. Les Collègues intéressés sont priés de prendre contact avec notre collègue Hameau, secrétaire de la Régionale (38, av. du Général De Gaulle, 94-Vincennes; tél. 808-43-79) qui nous y représentera.

Nos publications

Rappelons que le volume « Initiation à la mathématique de base », réunion des Cahiers 1 à 6 révisée, remaniée et complétée d'un index est disponible contre un virement de 10 F au C.C.P. de la Régionale (Paris 25-108-63). Les Cahiers 1 à 6 avaient été tirés à 15 000 exemplaires; le volume le fut à 10 000; il en reste environ 3 000; soit pour le texte lui-même une diffusion de 23 000 exemplaires très encourageante pour les auteurs et pour notre petite coopérative pédagogique.

La brochure « Première étape », éditée par l'A.P.M.E.P. elle-même est épuisée; un nouveau tirage est en préparation avec des remaniements et des additions. Prenez

rang pour les commandes qui seront sans doute servies en mars.

Le gros bulletin spécial « la Mathématique en Sixième par ceux qui l'enseignent » (Bulletin A.P.M.E.P. nº 269-270 de 288 pages) est disponible contre virement de 8 F au C.C.P. de l'A.P.M.E.P. (Paris 5708-21).

Les conférences de la Régionale

Elles sont annoncées aux membres de la Régionale par circulaire spéciale. En voici le calendrier pour ce trimestre :

- 19 février, M. Boulenger, Inspecteur général de l'Enseignement technique : Mathématiques et initiation aux techniques de gestion.
- 26 février, M. Jean Bouzitat, Directeur à la D.R.M.E., chargé de cours à la Faculté de Droit et de Sciences économiques de Paris : *Introduction à la théorie des jeux*.
- 5 mars, Yves Gentilhomme, Professeur à la Faculté des Lettres et des Sciences humaines de Besançon : La mathématique à travers la linguistique.

- Mercredi 18 mars, 20 h. 30 (I.P.N., 29, rue d'Ulm, salle Jules Ferry), M. Greco traitera de problèmes psycho-pédagogiques du premier apprentissage.

Nos remerciements aux conférenciers qui ont si gentiment accepté de nous faire ces exposés.

Les journées de l'A.P.M.E.P.

Elles auront lieu les 7, 8, 9, 10 mai 1970 à Clermont-Ferrand, sur le thème « mathématisation du réel ». Prenez dès maintenant vos dispositions pour y participer : voir le Bulletin 271 de l'A.P.M.E.P.

Vous trouverez dans le Bulletin 272 les rapports pour l'assemblée générale et le bulletin de vote : vous aurez à dire ce que vous pensez de l'action de l'A.P.M.E.P. telle qu'elle a été et de ce qu'elle doit être. Si vous souhaitez comme nous que la réforme qui s'amorce puisse s'épanouir « de la Maternelle aux facultés », vous le direz. Il y aura pour cela un moyen très simple :

En particulier, par votre vote vous choisirez entre de nombreux candidats pour le renouvellement partiel du Comité : ou bien pour ceux qui déclarent vouloir freiner la réforme (ou la limiter à l'enseignement secondaire) ou bien pour ceux qui, appuyant l'action menée par l'A.P.M.E.P. depuis des années, veulent travailler à l'amélioration de ce qui a pu être fait.

Vote décisif, par conséquent : ou bien poursuivre l'action entreprise, ou bien rompre cet effort alors qu'il n'est pas encore mené au terme de la pre-

mière étape. Chacun aura le devoir de dire ce qu'il souhaite.

G. W.

Bribes

L'Institut Parisien de l'Ecole Moderne organise son 16° stage d'échanges et d'autoformation pédagogiques du 29 juin au 4 juillet 1970. Nombre de places limité à 80. S'adresser à Marcel Vanoverbeck, 5, rue Félix-Faure, 95-Sarcelles.

Au sommaire du Cahier 10 : Une classe de C.P. et de C.E.; le volumineux courrier de Mountebank, la Z-balance, etc.

Le Bribeur.