chantiers de pédagogie mathématique

Bulletin bimestriel de la Régionale Parisienne – Été 1970 – CAHIER 11-12
Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

Le hêtre suprême et la forêt de bouleaux

En quoi ce titre sylvestre peut-il concerner la réforme de l'enseignement mathématique? Celle-ci est-elle abandonnée au profit de randonnées en forêt? Pourquoi cette opposition du hêtre qualifié majestueusement aux bouleaux plus graciles mais moins isolés?

Moins que jamais il n'est question, dans ces Cahiers, *de traiter d'autre chose que de la réforme de l'enseignement mathématique, leur raison d'exister ou plutôt de se développer. Après des années de recherche, de discussion, d'information mutuelle, le temps est venu des réalisations : en septembre 1969 aux niveaux des Sixièmes et des Secondes, en septembre 1970 aux divers niveaux de l'enseignement élémentaire.*

Cela signifie-t-il que nous soyons tous bien informés de ce qu'il est possible de réaliser dans telle ou telle classe? Certes non et pour plusieurs raisons dont la première, essentielle, est l'inexistence d'une solution pédagogique définitive. Une réforme est mise en route ; elle ne doit pas s'arrêter mais se perfectionner, se réformer elle-même. Les recherches, les discussions, les informations mutuelles sont donc plus utiles que jamais.

Il faut aussi redire que l'inquiétude de certains maîtres à l'égard de ce mouvement de réforme trouve une justification dans l'insuffisance (pour ne pas dire plus) de l'aide que l'Éducation Nationale leur a apportée pour s'y préparer. Depuis des années, syndicats et associations telles que la nôtre ont alerté notre administration sur l'urgence et l'importance de cette formation permanente des maîtres qui est le moteur de la réforme. L'incompréhension ou l'hostilité de certains ministres ou hauts fonctionnaires n'a connu qu'une défaillance : les premiers Instituts de Recherche sur l'Enseignement Mathématique ont été créés après mai 68 ; sur les sept I.R.E.M. qui existent actuellement, combien cependant ont eu les moyens (en crédits et plus encore en personnel) de s'occuper de l'enseignement élémentaire?

Lire en page 194 les informations sur :
— le calendrier de publication des *Cahiers*;
— les nouvelles de la Régionale Parisienne et de l'A.P.M.E.P.;
— les actualités de la réforme.

Nous ne cesserons de proclamer que cette politique à courte vue va à l'encontre des intérêts de notre école. Ce qui nous a conduits et nous conduit encore à prendre en main la véritable gestion de notre enseignement. C'est grâce à cette organisation de la formation permanente des maîtres par notre association que le mouvement de réforme s'est amorcé et que les premiers I.R.E.M. ont été créés. S'il y a eu un début d'information du public, celui des parents d'élèves en particulier, c'est que nous avons pris la peine de participer à des réunions. Effort à poursuivre : la tâche sera moins lourde si nous sommes plus nombreux à y participer.

Enfin, en réunissant des chantiers de pédagogie mathématique, des cercles ou des séminaires d'étude, en publiant des ouvrages d'information pour les maîtres et des bulletins tels que les présents cahiers de formation permanente, *nous avons fait de notre mieux pour préparer les maîtres à cette réforme. Tâche très lourde pour ceux qui s'y sont consacrés puisqu'elle s'ajoutait à leur service normal d'enseignement. Effort presque dérisoire, cependant, quand on considère ce qui reste à faire.*

Ce n'est pas une raison pour se décourager. L'année scolaire qui vient nous donne, au contraire, une excellente occasion de faire un pas de plus : aux niveaux de l'école élémentaire, là où peut-être les maîtres sont les plus inquiets, la mise en route de la réforme doit susciter la formation d'équipes, développer les échanges. Aucun d'entre nous n'est un oracle pédagogique (pour la raison très évidente qu'un tel individu n'existe pas). Mais les connaissances limitées de l'un d'entre nous complètent ou enrichissent les expériences réalisées par d'autres. Une des misères de notre enseignement, c'est l'isolement dans lequel nous travaillons. Isolement dramatique dans les cas extrêmes (lisez donc Institutrice de village, *par Huguette Bastide), isolement toujours préjudiciable à notre équilibre moral et à la qualité de notre enseignement.*

C'est pourquoi j'opposais pour commencer le hêtre suprême, probablement magnifique dans son isolement, et la forêt de bouleaux. Aucun de nous ne peut prétendre jouer le rôle de ce hêtre. Ne dites pas, ne pensez pas que c'est dommage. Mieux vaut, à la place d'un arbre unique à l'ombre duquel rien ne pousse, une forêt d'arbres de tous les âges où les plus forts peuvent protéger les plus faibles, où les plus jeunes peuvent laisser aux trop vieux le réconfort que la forêt survivra.

Si nous restons isolés, nous nous essoufflerons et nous désespérerons de grandir, comme hêtres, jusqu'à l'impossible suprématie. En forêt, en équipe, *nous ferons du bon boulot.*

G. W.

Sommaire du Cahier 11-12

147 Jean SAUVY : *Enseignement mathématique et psychologie de l'enfant* (3).
160 William MOUNTEBANK : *De ceux-ci vers ceux-là* (5).

167 **Tribune de discussion :** Les plaquettes P.L.E.M. (par J. SAUVY et R. COQUILLE).
177 Monique DUBOST et M. RAPEGNO : Un bilan de l'utilisation des films « témoignages pédagogiques » pour la F.P.M.
180 Évariste DUPONT : *Carnet d'exercices et de solutions.*

186 **Lectures actuelles et inactuelles :** POINCARÉ. PIAGET, UNESCO, N. PICARD, C. CORNE et F. ROBINEAU, D. PHAM, « Nos propres ordinateurs », *G.E.P.-Math*, PIAGET, DIENES, *Encyclopaedia Universalis*, H. BASTIDE.

191 **Parmi nos lettres :** Sur la $\mathbb{Z}$-balance; sur la divisibilité par 7; sur la réforme.

194 **Le bloc-notes de la Régionale.**

UN ENCART JAUNE A LIRE ATTENTIVEMENT.

Jean Sauvy

Enseignement mathématique et psychologie de l'enfant (*)

B. Wallon

Le psychologue Henri Wallon, se plaçant également dans une perspective génétique, a étudié le passage de l'intelligence sensori-motrice ou intelligence pratique en œuvre au cours des premières années d'existence à l'intelligence pré-opératoire qui se caractérise par la *pensée catégorielle* et qui apparaît vers l'âge de 6/7 ans.

Ce stade de 3 à 6 ans trouve ses caractères principaux au niveau global de la personnalité de l'enfant, selon Wallon, plus qu'au niveau de son intelligence. C'est qu'en effet, à ce moment-là, l'enfant prend progressivement conscience de l'existence de son corps en tant qu' « objet » distinct des autres objets de l'environnement, prend conscience qu'il est une personne parmi d'autres, affirme l'autonomie naissante de son « moi » en s'opposant aux « autres ».

Sur le plan intellectuel, il construit à partir de l'espace perceptif un *espace mental* où peuvent jouer et se consteller les représentations des choses (images mentales).

a) " Construction " des objets

Un objet déterminé n'apparaît pas sous forme d'élément isolé aux yeux du très jeune enfant mais comme élément participant à des tableaux d'ensemble, élément qui n'a d'intérêt — et donc de réalité — qu'en raison du rôle actuel qu'il joue dans le tableau dont il fait partie.

Un objet ne devient identifiable que par la réapparition, dans des tableaux divers, d'un faisceau de « qualités » qui semblent graviter autour d'un foyer commun : l'objet, et qui diffère d'autres faisceaux de « qualités » émanant d'autres foyers.

Pour identifier ainsi des faisceaux ou constellations de qualités, l'esprit doit procéder à une sorte de tri. Dans l'extraordinaire richesse des sensations associées à un objet, l'esprit ne porte attention que sur quelques-unes d'entre elles, concernant par exemple la forme, la couleur, la taille, ... et c'est avec elles qu'il construit l'image mentale associée à tel ou tel objet.

A propos de ces images, Wallon insiste sur le fait qu'elles n'existent, comme d'ailleurs les sensations, qu'en tant que parties d'un ensemble, en tant qu'éléments d'une structure qui les englobe. « Une couleur — écrit Wallon — est perçue par contraste sur un fond neutre; deux couleurs sont différenciées en raison du rapport

(*) Le début de cette étude a paru dans les *Cahiers* 9 et 10.

qui en fait une structure unique. D'abord tranché, grossier, le contraste s'affine progressivement, sous l'influence de la maturation fonctionnelle selon Koffka, et aussi de l'exercice, de l'expérience » (H. Wallon, *De l'acte à la pensée*, Flammarion 1942).

Dans l'ensemble des objets qui peuvent être ainsi dégagés du magma initialement indifférencié des perceptions de tous ordres, le corps propre de l'enfant occupe une place de choix et son individualisation s'amorce dès la seconde année d'existence de l'enfant.

Mais c'est seulement à partir de trois ans « que l'enfant commence à se conduire et à se connaître en sujet distinct d'autrui » (*Les origines du caractère chez l'enfant. Les préludes du sentiment de personnalité.* P.U.F. 1934).

Cette découverte merveilleuse une fois faite, l'enfant se met à l'explorer avidement au moyen d'expériences, d'exercices et de jeux d'imagination. Dans ces jeux, il s'attribue successivement le rôle de sujet et d'objet, s'amuse à alterner le « moi » et le « tu », approfondit la différence entre le « faire » et le « subir », entre l'actif et le passif.

b) Affirmation de l'autonomie du " moi "

Dans la vie réelle, c'est-à-dire dans les circonstances qui ne se laissent pas manipuler librement par l'imagination, la construction du jeune « moi » se heurte à de multiples résistances et cela d'autant plus que le désir d'autonomie ne peut encore s'appuyer sur des moyens adéquats. D'où les affrontements de l'enfant avec son entourage, si fréquents à cet âge, quand ce dernier refuse de se plier à toutes les « fantaisies » de l'enfant. Ces heurts sont essentiels pour que la personnalité naissante se délimite et pour que l'enfant trouve sa place dans la constellation des autres personnes, dans la famille de l'enfant tout spécialement.

c) Progrès intellectuels

La connaissance du réel, d'une part, qui s'appuie sur la « construction » mentale des objets, l'affirmation de la personne, d'autre part, qui s'actualise dans une multiplicité de liens sociaux, s'appuient l'une et l'autre sur le langage et s'expriment très largement grâce à lui.

Le rôle du langage, selon Wallon, ne doit pas être sous-estimé.

En effet, les images mentales mentionnées plus haut, pour devenir le matériau mobile et souple de la pensée, doivent se trouver prolongées, identifiées, par les mots que la langue maternelle met à la disposition de l'enfant.

Entre 3 et 6 ans se multiplient les appareillements deux à deux entre les « objets-images » qu'élabore l'enfant et les mots pouvant les désigner. Ces appareillements, l'enfant les établit par la pratique de la langue, utilisant d'abord les mots « au petit bonheur » mais ajustant progressivement ses choix pour finalement établir un réseau solide de correspondances signifiant-signifié.

Wallon a longuement étudié ce processus d'appareillement en interrogeant des enfants de 5 ans 1/2 à 9 ans. Les renseignements recueillis lui ont servi à élaborer son ouvrage de 1945 sur *les origines de la pensée chez l'enfant.*

C'est à cette occasion que Wallon a découvert l'importance du « couple » comme *structure élémentaire de la pensée*, structure qu'on peut déceler dès le stade (3-6 ans) que nous examinons actuellement.

Le couple, écrit Wallon « c'est une sorte de molécule intellectuelle où s'enferme l'acte de pensée sous sa forme la plus simple et la plus indifférenciée. Un seul et même objet ne saurait être pensé sinon par dédoublement. La tautologie A est A, qui n'ajoute rien à la connaissance de l'objet, est pourtant indispensable à sa prise de conscience comme objet. Sur le plan de la pensée, le couple est antérieur à l'objet isolé. Celui-ci ne peut exister qu'à travers celui-là ». (H. Wallon : *Les origines de la pensée chez l'enfant*, P.U.F. 1963, p. 115).

Les couples en acte dans la pensée du jeune enfant ont le double caractère de tout couple : le caractère d'*unité* propre à ce qui apparaît comme lié, comme formant un tout, le caractère de *diversité* résultant du dédoublement de cette unité en termes distingués.

C'est sans doute à ce double caractère que la pensée doit sa possibilité d'être. Elle peut en effet, grâce au couple, maintenir l'essentiel de l'unité que présente tout fragment de la réalité et, en même temps, elle peut concevoir et exprimer cette réalité en des *moments successifs distincts* comme l'exigent une pensée et un langage qui ont besoin de durée pour prendre corps et se dérouler.

Le couple se trouve ainsi au cœur même de la pensée relationnelle et des mises en correspondance terme à terme qui permettent à la pensée de « mettre de l'ordre » et de placer des points de repère dans un réel mouvant et indifférencié qui, sans cela, échapperait à toute connaissance.

Le couple notamment intervient dans le processus intellectuel qui conduit à la « construction » des catégories, catégories dont a besoin la pensée pour classer les fruits des expériences successives du sujet, les relier aux enseignements des expériences d'autrui, les rendre disponibles pour des utilisations ultérieures. Par le processus de l'appareillement deux objets distincts se trouvent rapprochés et identifiés comme se ressemblant sous l'angle de telle ou telle de leurs propriétés communes. De proche en proche, par « agrafages » successifs de couples, peuvent se constituer, des chaînes d'objets se ressemblant et se fondant en une catégorie unique alors même qu'ils conservent — sous-jacente — leur individualité.

Mais aux âges considérés, de tels agrafages systématiques ne sont encore guère possibles. La pensée se contente d'associer les couples en constellations très largement instables car elles restent sous la dominance des perceptions et des intérêts du moment.

Aussi l'activité intellectuelle correspondante se caractérise-t-elle par ce que Wallon appelle le *syncrétisme*, c'est-à-dire un mode de connaissance qui se contente d'approximation et agglutine en un tout confus aussi bien les divers aspects de la réalité que ce qu'y surajoute la sensibilité de l'enfant. Le syncrétisme, précise Wallon, traduit « l'impuissance de l'enfant à utiliser les catégories mentales qui permettent d'unir ou de distinguer, afin de les ordonner entre elles, les données de l'expérience, et par là de construire les choses pour les substituer à nos péripéties subjectives, d'où elles sortent ».

En conclusion, le « stade du personnalisme » apporte à l'enfant, au niveau de la pensée, un certain nombre de moyens lui permettant de dresser du réél un tableau schématique qui commence à être pensé et non seulement vécu. Ces moyens tiennent en puissance des possibilités considérables qui ne s'actualiseront pleinement que plus tard. En ce sens le stade sous-revue apparaît comme une étape relativement bien marquée, au niveau de l'affectivité comme à celui de l'intelligence.

C. Conclusion concernant le stade 2 /3-6 /7 ans.

Après avoir très sommairement résumé les caractéristiques du stade de l'intelligence intuitive (Piaget) ou de l'intelligence pré-catégorielle (Wallon), nous devons nous demander si les conceptions de ces deux auteurs sont compatibles et si elles permettent de tirer des enseignements pour la pratique de la pédagogie des mathématiques à ce niveau.

a) Les tranches d'âge correspondant aux stades considérés par Piaget et Wallon sont sensiblement les mêmes. La limite supérieure commune se situe vers 6/7 ans, c'est-à-dire au début de la scolarité obligatoire dans la plupart des pays du monde.

Les descriptions du fonctionnement de l'intelligence à ces âges sont également très voisines chez les deux auteurs bien que les formulations ne coïncident pas toujours.

Par exemple, la parenté est évidente entre ce que vise Piaget qand il parle de raisonnement par « transduction » et ce à quoi fait allusion Wallon quand il décrit le fonctionnement de la pensée par « couples ».

De même les modes de pensée par « centration sur le moi et assimilation du réel au moi » décrits par Piaget trouvent un homologue fidèle dans les modes de pensée décrits par Wallon sous le nom de « pensée syncrétique ».

De même encore les deux auteurs insistent sur l'importance des jeux d'imitation et de fiction dans la vie intellectuelle de l'enfant au cours du stade considéré.

b) La concordance est donc grande en ce qui concerne le « contenu » même de ce stade de développement de l'intelligence. On ne saurait s'en étonner quand on connaît la rigueur scientifique et l'abondance des observations recueillies aussi bien par Wallon que par Piaget.

Si des divergences existent, elles apparaissent au niveau des interprétations que les deux auteurs ont été amenés à donner de leurs observations.

Piaget s'appuie sur un mécanisme très général d'accommodation/assimilation qui ne pouvait que séduire le biologiste qu'il était à l'origine.

Wallon, qui s'était intéressé particulièrement aux anormaux, quand il veut expliquer la genèse de l'intelligence, tient grand compte de l'évolution concomitante de l'affectivité et s'intéresse au « tout » de la personnalité. Il attribue un rôle essentiel, dans le développement de l'intelligence, à la maturation (croissance du corps, du système endocrinien et surtout du système nerveux) et au langage.

En outre Wallon insiste sur le caractère dialectique, contradictoire et parfois conflictuel du développement de l'intelligence de l'enfant comme de celui de son affectivité. Par exemple l'image mentale que vient de conquérir l'enfant se révèle rapidement impropre à traduire la complexité du réel en raison de sa fixité et de son schématisme; le premier bagage de mots et d'expressions verbales dont dispose l'enfant, si utile pour se faire entendre d'autrui, ne transmet souvent qu'un reflet appauvri de ce qu'il souhaiterait communiquer; les « couples élémentaires », s'ils jettent des ponts entre tels et tels aspects de la réalité, forment en même temps des îlots plus ou moins fermés sur eux-mêmes qui mettent en miettes cette réalité.

c) On ne saurait donc nier les différences de conception de nos deux auteurs. Il ne s'agit toutefois pas de divergences radicales. On sait d'ailleurs que les hommes s'en sont expliqué et qu'ils ont chacun tenu compte de ce que leur collègue apportait à la connaissance de la psychologie enfantine.

Notre propos n'est pas ici de revenir sur des controverses largement dépassées (*).

(*) Le lecteur intéressé en trouvera des échos dans l'ouvrage érudit de Tran-Thong « *Stades et concept de stade de développement de l'enfant dans la psychologie contemporaine* », Vrin, Paris 1967.

Il nous suffira de retenir que les deux psychologues réputés ont considéré comme possible et utile de délimiter dans le processus de développement affectif et intellectuel de l'enfant un stade entre 2/3 et 6/7 ans qui présente des caractéristiques propres.

L'enfant dispose alors de l'autonomie de déplacement, de la représentation et du langage, ce qui lui permet de multiplier les relations vécues avec les autres êtres et le monde et d'élaborer un modèle représentatif de la réalité encore fruste et inadéquat mais déjà très utile pour dépasser le vécu immédiat, prévoir les conséquences de certains actes et faire face à des situations non encore rencontrées.

Ce modèle intelligible de la réalité, il l'élabore à travers son expérience quotidienne, ses jeux d'imagination, de construction, d'imitation, à travers les exercices auxquels il se livre généreusement et à travers les questions qu'il ne se lasse de poser.

Vu sous un certain angle ce stade apparaît comme un stade d'apprentissage intense, le mot « apprentissage » étant pris dans son sens d' « essai », de « première expérience ». C'est un apprentissage de tous les moments. L'enfant a tout à découvrir. Son appétit d'apprendre est insatiable et il tend à le satisfaire par toutes les voies qui s'offrent à lui, si bien qu'il souhaite « aller à l'école » beaucoup plus ardemment qu'en toute autre période de sa vie. La dernière année de Maternelle, ainsi que la première année du Primaire, se situent précisément vers la fin du stade en question, en attendant que s'ouvre le stade suivant qui verra un nouvel épanouissement des capacités intellectuelles.

Nous nous proposons dans le chapitre suivant d'examiner, notamment à la lumière des travaux de Wallon et Piaget résumés ci-dessus, quel rôle peut jouer et quelles formes peut prendre l'enseignement des mathématiques au cours de ces premières années de fréquentation de l'école.

3. L'enseignement pré-mathématique au cours du stade pré-opératoire ou intuitif (2-3 à 6-7 ans).

A. — *Les principaux domaines d'intervention de la mathématique*

Pour déterminer le rôle de l'enseignement mathématique au cours des premières années de fréquentation de l'école (Maternelle et Cours Préparatoire) nous devons tenir le plus grand compte des *champs d'intérêt des enfants* et de leurs *possibilités intellectuelles* aux âges considérés, tels qu'ils nous sont apparus à travers les considérations développées précédemment.

a) Nous avons vu que le problème de la *représentation* (ou des images mentales) occupait une place centrale dans le processus de formation de l'intelligence des enfants de cette tranche d'âge. Or l'activité de représentation s'analyse à certains égards comme une *mise en correspondance terme à terme* entre ce qui doit être représenté et ce qui le représente, entre l'objet et son image mentale, entre le signifiant et le signifié correspondant, entre « la chose » et le mot.

Il s'agit là d'un processus *actif*, *dialectique* et *unitaire*.

Le processus est *actif* car il se développe comme une construction dans laquelle l'enfant s'applique tout entier.

Le processus est *dialectique* en ce sens que l'objet ne se constitue pas indépendamment de l'image et l'image indépendamment de l'objet : l'un et l'autre prennent corps, par ajustements successifs, en s'appuyant l'un sur l'autre comme les arguments

d'un dialogue contradictoire. Pour le très jeune enfant, nous l'avons vu, telle « table » qui fait partie de son univers familier n'est pas, au début, un objet au sens où nous l'entendons. Il la découvre sous les aspects très particuliers qui retiennent son attention : en tant que « quelque-chose-de-dur » quand il la heurte, en tant que « quelque-chose-à-gravir » s'il s'exerce à grimper, etc. La table ne devient « objet » pouvant être identifié, reconnu, remémoré, qu'à partir du moment où, précisément, elle se trouve doublée d'une image mentale « abstraite » et stable que le besoin de communication incite à construire et que le langage contribue à fixer.

Ce processus est donc *unitaire*, au sens où l'on parle de l'*unité d'un couple*, alors même qu'on distingue en son sein la diversité de deux éléments isolément repérables.

b) Aux âges considérés, par ailleurs, l'enfant construit un réseau de relations avec les autres êtres et avec les choses, réseau dont il occupe le centre. Des relations binaires se construisent à cette occasion, mettant chaque fois en correspondance le sujet et quelque chose d'autre : telle personne — la mère, un frère, un camarade... — ou encore tel ou tel objet, poupée, balle, etc. qu'il s'agit de prendre, de donner, de lancer, etc.

Dès 3 ans on voit apparaître dans la conversation de l'enfant des expressions relationnelles conformes au modèle général « sujet - verbe - objet ». Autrement dit la « pensée par couple » dont Wallon a souligné l'importance aux âges considérés se prolonge en une « pensée de relation », c'est-à-dire en une pensée par triplet du type *a* - R - *b*.

Dans un tel triplet, entre les termes *a* et b formant couple — à l'état inerte en quelque sorte — s'insère un lien relationnel qui marque la façon dont les éléments du couple sont « rapprochés », « soudés », dans les faits ou dans l'action et, parallèlement, dans la pensée de l'enfant.

Ainsi, quand l'enfant de 3 ans, voyant son grand frère jouer au ballon, dit : « moi, moi », il manifeste par là, de façon elliptique, le désir de taper dans le ballon comme le fait son frère. Le réseau de relation mentionné à l'instant peut se schématiser comme suit :

Situation vue par l'enfant	frère	→	ballon
Situation souhaitée par l'enfant	enfant (sujet)	→	ballon
		R	

où R = « donne des coups de pied au ».

c) Parmi les relations que l'enfant établit avec son entourage et son milieu de vie, beaucoup se rattachent aux *relations spatiales* et concernent la façon dont l'*enfant se situe dans l'espace* par référence à tout ce qui « meuble » les lieux où il évolue.

Par la pratique quotidienne de ces mises en relation, l'enfant — comme l'ont admirablement montré Piaget et ses élèves — est amené à construire progressivement l'espace intelligible qui, avec le *temps* et la *causalité*, servent de toile de fond à sa vie intellectuelle.

B. *L'apport mathématique dans chacun de ces domaines*

Après ce qui vient d'être dit, on pressent quelles branches de la mathématique peuvent se trouver impliquées à ce stade de la formation de l'intelligence de l'enfant.

C'est, évidemment, d'une part, la « mathématique relationnelle », si on entend

par cette expression aussi bien la *mathématique des relations* que la mathématique des *applications* et des *fonctions*.

C'est, d'autre part, la *géométrie élémentaire* à son niveau le plus général, la *topologie*.

Examinons ces deux grandes divisions tour à tour.

a) Formation de l'intelligence et mathématique relationnelle.

A la base de la mathématique relationnelle se trouvent la *correspondance terme à terme* et le *couple ordonné* (1) qui ouvrent la voie aux relations d'équivalence, d'une part, aux relations d'ordre, d'autre part.

La correspondance terme à terme permet notamment de faire apparaître l'*équipotence* de deux ensembles et la notion de nombre cardinal, alors que la relation d'ordre permet de dégager l'aspect *ordinal* des nombres naturels.

Connaissant ainsi toute l'importance de la correspondance terme à terme et du couple ordonné pour le développement du raisonnement et des concepts mathématiques de base susceptibles d'être explicités plus tard, sachant d'autre part qu'au stade pré-conceptuel l'enfant fait spontanément usage des couples ordonnés et des correspondances terme à terme, on comprend qu'il soit dans la vocation de l'école à ces âges de renforcer l'apprentissage occasionnel auquel la vie de tous les jours ouvre la voie dans ces domaines.

Il n'est naturellement pas question que cela se fasse sous la forme de « leçons de mathématique ». La mathématique proprement dite, branche particulière bien identifiée de la connaissance, viendra plus tard. Pour le moment il s'agit de donner à l'enfant l'occasion de se livrer à des *activités* qu'on peut qualifier de « mathématisantes » dans la mesure où l'observateur, en les analysant, y constate la présence de certains des concepts et des opérations du domaine de la mathématique.

Voici quelques exemples d'activités mathématisantes auxquelles peuvent se livrer les enfants de la Maternelle et du Cours Préparatoire.

On donne à l'élève des bouchons et des bouteilles diverses, choisis de telle façon que chaque bouteille puisse recevoir un bouchon et un seul. L'enfant doit former tous les couples « bouchon-bouteille » possibles. L'exercice peut être répété avec des vis et des écrous, par exemple, et, d'une façon générale, avec deux ensembles d'objets « se convenant » mutuellement, pouvant être appareillés deux à deux. Dans la même catégorie d'exercices se rangent les appareillements « objet-empreinte » où il s'agit, à partir d'un double jeu d'objets et d'empreintes, de poser sur chaque empreinte l'objet lui convenant (*).

Quand les enfants commencent à savoir lire, on peut leur faire appareiller des objets et des étiquettes sur lesquelles sont inscrits les noms de ces objets.

Très jeunes, les enfants sont capables de reconstituer des figurines préalablement sectionnées en deux parties (recherche de la partie complémentaire d'un élément).

Assez vite on peut les faire participer à des activités d'échange du type « un-un » (je te donne une bille, tu me donnes un bouton).

---

(1) Nous employons cette expression, bien que le qualificatif « ordonné » ne soit pas indispensable, afin de marquer l'importance de l'*ordre* dans lequel on considère les éléments du couple.

(*) Dans le film de Truffaut, *L'enfant sauvage*, le Dr Itard demande à son élève de ranger des outils à des emplacements marqués.

Ces activités de mise en relation entraînent *ipso facto* la mise en évidence d'*ensembles d'objets:* par exemple l'ensemble des bouteilles d'une part, l'ensemble des bouchons de l'autre, ou encore l'ensemble des objets et l'ensemble des empreintes.

Ainsi se trouvent préparées les activités de classement qui commencent à pouvoir être inaugurées à partir de matériel divers puisé dans la vie quotidienne des enfants ou dans les jeux pédagogiques (jetons, blocs logiques, etc.). On notera toutefois qu'il est un peu tôt avant 6 ans pour demander aux enfants des classements systématiques. Les expériences de Genève ont montré en effet que la période des classements s'épanouit un peu plus tard quand l'enfant est non seulement capable de distinguer dans un ensemble d'éléments certains qui sont équivalents à un titre quelconque (même couleur, par exemple) mais quand il sait identifier *tous* les éléments équivalents sans en omettre *aucun.*

Nous reviendrons sur cette question à propos du prochain stade de développement de l'intelligence. Pour le moment, retenons que la pensée par couple porte en puissance la notion de classe d'équivalence sans encore déboucher sur elle, faute de pouvoir s'appuyer sur la transivité et sur la symétrie.

b) Formation de l'intelligence et « topologie ».

L'activité des personnes se développe dans l'espace et dans le temps. Le jeune enfant s'intéresse très tôt à l'espace; dès le 2e ou le 3e mois le bébé coordonne vision et préhension et fait parcourir à ses membres comme à ses regards des portions d'espace.

Dès qu'il peut marcher l'enfant explore encore plus activement l'espace par ses allées et venues, apprend à distinguer ce qui est près de ce qui est loin, etc. Il explore par le toucher et par la vue la forme des objets. Il commence à distinguer ce qui est grand de ce qui est petit.

En bref, au cours des deux premières années de son existence, l'enfant « construit » ce que Piaget appelle l'*espace sensori-moteur*, cette expression indiquant que l'espace en question n'est point la représentation que les adultes se font de l'espace mais quelque chose lié aux *sens* du sujet (la perception) et à ses *activités motrices.*

C'est un espace vécu et pratique qui va servir de base de départ à la constitution ultérieure de l'espace représenté. Cette constitution prendra de nombreuses années et ne s'achèvera qu'aux approches de l'adolescence lorsque l'intelligence accédera au niveau hypothético-déductif.

Au niveau d'âge auquel nous nous intéressons actuellement (2/3 à 5/6 ans) la représentation de l'espace est encore sommaire. Les représentations spatiales de l'enfant, c'est-à-dire les transpositions au niveau de la pensée des activités spatiales vécues, ne sont que des ébauches grossières. Elles sont, comme toutes les représentations à ce niveau d'âge, « assujetties aux déformations engendrées par le caractère irréversible et statique de la pensée intuitive ou préopératoire » (1).

Ce caractère d'ébauche se manifeste par exemple quand il s'agit de *formes*, notamment de la forme des contours linéaires des objets auxquels l'enfant a affaire.

---

(1) M. Laurendeau et A. Pinard : *Les premières notions spatiales de l'enfant*, Delachaux et Niestlé, 1968, p. 14.

La forme d'un contour linéaire dépend de la manière dont les points successifs de ce contour se disposent les uns par rapport aux autres. Les exemples de dispositions fournis par le vécu de l'enfant sont très variés. Mais beaucoup se ressemblent et l'enfant ressent assez vite certaines de ces ressemblances. Il ressent notamment très tôt le fait que certains contours se ferment sur eux-mêmes alors que d'autres restent ouverts ou encore qu'il a affaire à une ligne régulière (portions de cercle ou d'ellipse) et non pas à une ligne accidentée (contour en étoile, contour en triangle, etc.) présentant des creux, des pointes, des dents... Vers 5/6 ans il commence à faire la distinction entre les contours rectilignes et les contours curvilignes.

Concernant les surfaces et les volumes, le jeune enfant distingue de même les surfaces fermées (paroi d'un ballon, ...) qui enveloppent quelque chose de clos et les surfaces ouvertes (paroi d'un verre) qui délimitent un « creux ».

Les frontières séparatrices, lignes ou surfaces, sont parmi les premières acquisitions spatiales de l'enfant et contribuent aussi bien à la « construction » de l'image des objets (en facilitant leur recognition) qu'à la construction de l'image de l'espace par la mise en place de repères (se trouver dans une pièce ou à l'extérieur, d'un côté d'un ruisseau ou de l'autre côté, etc.).

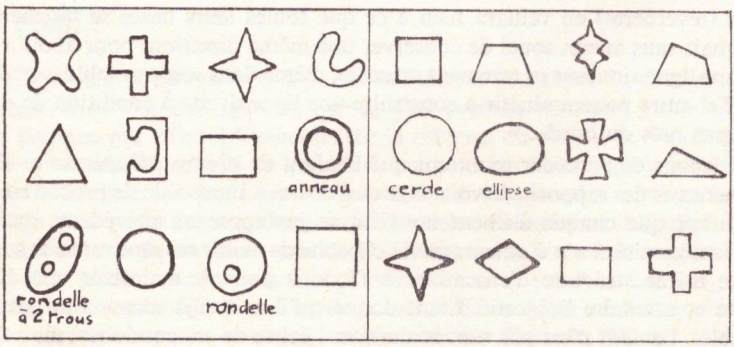
Par contre le jeune enfant n'est pas encore capable de distinguer systématiquement les rapports *projectifs* et les rapports *euclidiens*, c'est-à-dire les rapports qui font intervenir les perspectives, les orientations et les distances.

Sur ce point les travaux de J. Piaget et P. Inhelder qui ont été repris systématiquement à l'Université de Montréal par Monique Laurendeau et Adrien Pinard, apportent des vues intéressantes sur lesquelles il y a lieu de s'attarder quelque peu.

Faisons tout d'abord référence à une série de tests que les deux derniers auteurs cités ont fait passer à Montréal à quelque 700 enfants dont les âges s'échelonnaient entre 2 ans 1/2 et 12 ans.

Le matériel utilisé comportait 12 figurines type découpées dans un fort carton et présentant les formes suivantes : carré, rondelle percée d'un trou, anneau fermé, croix irrégulière, triangle, anneau ouvert, rectangle, croix grecque, cercle, rectangle ouvert, étoile à 4 branches, rondelle percée de deux trous. Le test consiste à identifier ces formes sans les voir. L'enfant les touche à tour de rôle et il doit chaque fois désigner sur une carte qui les représente toutes, celle qu'il vient de palper (reconnaissance stéréognosique).

Une seconde épreuve de même nature porte sur 12 figurines dont certaines



Première série Deuxième série

sont pareilles aux précédentes et d'autres différentes. Les formes utilisées sont les suivantes : cercle, croix de Malte, carré, ellipse, étoile à 4 branches, rectangle, triangle, quadrilatère, croix grecque, trapèze, étoile à 6 branches, losange.

Les réponses données par les enfants sont notées, puis analysées. Il apparaît que les erreurs d'identification sont d'autant plus nombreuses que les enfants sont plus jeunes. D'autre part les erreurs ne se distribuent pas au hasard. Par exemple les jeunes enfants se trompent plus fréquemment en faveur de l'étoile qu'en faveur du cercle quand la figure palpée est le triangle, le carré est pris plus fréquemment pour le rectangle que pour l'anneau ouvert, etc.

L'analyse statistique des réponses exactes et des erreurs regroupées «par familles» conduit les auteurs aux conclusions suivantes (p. 63) : la prise en compte de certains rapports topologiques intervient tôt et conduit les enfants à distinguer les figures pleines des figures trouées, les figures ouvertes des figures fermées. La différenciation des figures rectilignes et curvilignes suit de près. Les rapports purement métriques (dimensions, inclinaisons, étendues des angles, nombre d'éléments, etc.) n'interviennent qu'en dernier lieu.

Par exemple entre 4 et 6 ans, « les croix sont confondues entre elles, à cause de leur caractère commun de figures ouvertes; sont également confondus le triangle, le carré, le rectangle et tous les autres quadrilatères, à cause de leur caractère commun de figures fermées et rectilignes (p. 87).

Une autre série de tests administrée par l'équipe de Genève et reprise récemment par les professeurs de Montréal confirme la primauté génétique des rapports topologiques sur les rapports projectifs et euclidiens.

Il s'agit, suivant la technique utilisée par Laurendeau et Pinard, d'aligner 8 réverbères miniatures sur une table entre deux maisons également miniatures qui peuvent être disposées soit parallèlement à l'un des côtés de la table d'expérience, soit en biais par rapport à ceux-ci.

Les expérimentateurs notent non seulement les configurations obtenues en fin d'exercice mais également les procédés mis en œuvre par les enfants.

Commentant ces procédés, nos auteurs écrivent (p. 93) « avant 6 ou 7 ans le caractère pré-opératoire des procédés employés par l'enfant se traduit par la prépondérance qu'il accorde aux relations topologiques de simple voisinage et par la difficulté qu'il éprouve à s'affranchir des suggestions perceptives offertes par certains éléments de la situation comme, en particulier, les contours de la table sur laquelle il travaille. Tel enfant, par exemple, mettra beaucoup de minutie à juxtaposer les éléments (réverbères) en veillant bien à ce que toutes leurs bases se touchent deux à deux, mais sans aucun souci de conserver une même direction, pour aboutir finalement à une ligne sinueuse et rarement orientée, même dans son ensemble, vers l'objectif fixé. Tel autre pourra réussir à construire une ligne droite à condition de disposer les éléments près du bord... ».

Ces façons de procéder montrent que l'enfant de niveau préopératoire s'appuie uniquement sur des rapports de voisinage et d'ordre. « Il procède de proche en proche en s'assurant que chaque élément nouveau se juxtapose au précédent; mais il ne voit pas la nécessité et n'a d'ailleurs pas la capacité de réunir ces mouvements successifs dans une même structure d'ensemble de façon à pouvoir maintenir une direction constante et atteindre l'objectif. Étant donné qu'il sait déjà reconnaître les droites perceptibles, l'enfant n'est pas sans remarquer l'échec de ses conduites; mais faute de pouvoir se représenter ces droites, et donc de les anticiper ou de les reconstruire

en pensée, il se trouve privé des structures internes dont il aurait besoin pour diriger ses constructions et résister à la suggestion des droites perceptives déjà toutes constituées dans son champ visuel » (p. 94).

On trouve dans ces expériences une nouvelle illustration du fonctionnement de la pensée par couple aux âges considérés. Ici, il s'agit de couples de points disposés spatialement et dont la nature de couple résulte de leur proximité. Les divers couples sont considérés isolément et ne s'intègrent pas encore en chaînes transitives.

Quand on compare les résultats obtenus par un enfant donné aux deux séries de tests on constate un étroit parallélisme entre les performances réalisées. Cela tend à montrer qu'il n'y a pas une intelligence pour ceci et une intelligence pour cela mais une intelligence qui, au stade de développement où elle se trouve, se met au service des situations les plus diverses.

Ayant présents à l'esprit les résultats d'expériences précises conduites sur les enfants, nous sommes mieux à même de comprendre en quoi consiste l'image mentale de l'espace telle qu'elle peut se former chez les enfants de l'âge considéré. Ce n'est pas une image unique, mais plutôt une mosaïque d'images dont chacune est fragmentaire, distincte des autres et sous la dépendance des perceptions dominantes fournies par le vécu.

Piaget et son école parlent à ce propos d'espace topologique, le qualificatif « topologique » étant utilisé par référence à la mathématique pour indiquer qu'à ce niveau seules comptent des relations d'un certain type : relations de voisinage ou de proximité, d'entourage (2 dimensions), d'enveloppement (3 dimensions), de continuité, de séparation, d'ordre. Ces relations ne permettent pas de conférer à tel ou tel objet le statut d'objet géométrique euclidien, c'est-à-dire d'objet dont les points sont à des distances invariantes les uns des autres. Elles ne permettent pas davantage de situer un objet de façon précise au sein d'un cadre de référence.

Toutefois, d'autres expériences réalisées sous l'égide de Piaget ou par l'équipe de Montréal, portant notamment sur la manière dont les enfants s'orientent et sur la distinction qu'ils font entre la gauche et la droite, montrent que dès l'âge de 4/5 ans l'espace projectif et l'espace euclidien commencent à s'ébaucher sur la toile de fond de l'espace topologique. Mais les représentations correspondantes portent toujours la marque de la prééminence de l'intuitif sur l'opératoire et de l'égocentrisme sur la pluralité des points de vue, comme on doit s'y attendre étant donné les caractéristiques générales du stade atteint par l'intelligence des enfants de moins de 6/7 ans. Par exemple, tel jeune enfant qui sait parfaitement distinguer sa gauche et sa droite est incapable d'indiquer correctement la gauche et la droite d'une personne lui faisant face et cela parce que sa pensée — encore au stade intuitif — centre son attention sur « des aspects partiels et successifs d'une même situation d'ensemble sans pouvoir encore s'adonner aux activités d'intégration et de compensation nécessaires à l'objectivité et à la réversibilité opératoire » (*op. cit.*, p. 162).

Concernant l'évaluation des distances l'enfant de moins de 6 ans sait en général distinguer ce qui est loin de ce qui est près mais, faute de pouvoir mesurer les distances, il doit se limiter à des comparaisons approximatives.

En résumé si, après 2/3 ans, l'enfant dépasse l'espace sensori-moteur en direction d'un espace représenté, ce dernier a un caractère essentiellement topologique; le projectif (ligne droite, système de perspective) et l'euclidien (métrique) n'y sont encore présents qu'à l'état d'ébauche imparfaite.

Ainsi se trouve assez clairement circonscrit le domaine où peut intervenir la

géométrie aux niveaux d'âge considérés. Pour l'essentiel ce domaine apparaît bien devoir être la *topologie élémentaire.*

Les jeux et les exercices correspondants s'organiseront autour des thèmes de domaine fermé, de cheminement, de franchissement de frontière, d'opposition intérieur/extérieur.

Des repérages pourront être proposés à condition qu'ils puissent être réalisés à l'aide principalement de rapports de voisinage (« l'arbre qui se trouve entre la route et la rivière », etc.).

Les jeux de labyrinthe permettent aux enfants de découvrir de nombreuses particularités de l'espace topologique. Avec les enfants très jeunes il est indiqué de tracer le parcours des labyrinthes à même le sol, de façon à permettre à un enfant de circuler à l'intérieur. Si une frontière de craie ne suffit pas à interdire le franchissement des lignes proscrites on pourra utiliser des obstacles réels : bancs, ficelles tendues entre des chaises ou des poteaux, etc.

Entre 4 et 6/7 ans les garçons aiment beaucoup jouer avec des petites voitures. On pourra profiter de ce goût pour organiser des « jeux de circulation » faisant appel à des relations spatiales et notamment des relations d'ordre. Par exemple, sur un tracé marqué sur le sol à la craie et présentant un réseau de cheminements (embranchements, croisements, boucles, etc.), le maître disposera des points de repère : A (une station-service, par exemple), B (une maison), C (un arbre). L'élève sera invité à trouver le ou les chemins que devra suivre l'auto pour passer successivement devant C, B, A, par exemple.

Afin de ne pas donner une primauté absolue aux surfaces planes on devra le plus possible proposer aux élèves des tracés sur des surfaces courbes, parois de ballons ou de chambre à air par exemple. L'emploi de la pâte à modeler est vivement recommandé.

Concernant l'identification des formes qui met en jeu aussi bien des activités de reconnaissance de rapports topologiques que des activités de classement on pourra s'inspirer de la technique utilisée à Genève et à Montréal et l'adapter aux possibilités de la classe. On pourra, par exemple, présenter aux enfants une série d'objets du type de ceux mentionnés plus haut (anneaux, croix, etc.) ainsi que leurs dessins reproduits sur un carton; l'exercice consistera à placer chaque objet sur le dessin qui le représente.

Pour préparer le terrain à l'acquisition ultérieure de l'espace projectif, on pourra également faire jouer les élèves à des jeux mettant en œuvre les rapports projectifs de devant-derrière, gauche-droite, dessus-dessous, ainsi que les alignements.

Voici quelques exemples.

Avec des « blocs logiques » : on sait que chaque élément de petite taille possède un « double » de plus grande taille présentant les mêmes caractéristiques de couleur, de forme et d'épaisseur. On pourra convenir que ces blocs représentent respectivement un cavalier et son cheval ou une tasse et sa sous-tasse. Ce jeu consiste à appareiller chaque petit élément avec le grand élément correspondant et à disposer les éléments des couples correspondants l'un sur l'autre, le grand élément étant posé dessous, le petit élément dessus. Il sera facile au maître de vérifier si l'exercice a été correctement exécuté.

Un exercice du même genre portant sur l'opposition droite/gauche consiste à disposer les éléments des couples ci-dessus non pas l'un au-dessus de l'autre mais l'un à la droite de l'autre en s'aidant par exemple comme ligne de référence du rebord de la table ou des lames du parquet.

Pour préparer la voie aux alignements, de multiples exercices sont possibles, notamment ceux qui font appel à des jetons que le maître demandera aux enfants de placer « comme des poteaux télégraphiques » le long d'une route droite d'abord matérialisée par un repère (bord de table, fil tendu) puis dont les extrémités seront seules indiquées. Le matériel pédagogique courant (planchettes à trous, damier à alvéoles de l'O.C.D.L.) se prête à ce genre d'exercice dans la mesure où il facilite les repérages perceptifs.

Dans tous ces exercices et jeux il conviendra de se souvenir qu'ils n'ont pas pour objet de faire acquérir à l'élève une quelconque « technique ». Leur but est de lui donner l'occasion de s'exercer, de « tenter des choses pour voir ce que ça donne », de faire des découvertes à sa portée.

En cette matière les enseignements des travaux de Piaget et de ses disciples ou continuateurs nous paraissent décisifs.

Parlant des tâtonnements auxquels se livre l'enfant au cours d'un exercice portant sur des angles, Piaget note (1) que dans l'expérience décrite « l'objet intervient essentiellement à titre d'aliment ou de support de l'activité, c'est-à-dire qu'il est assimilé au schéma de l'action et ne résiste, en imposant de nouvelles accommodations, que dans la mesure où les actions successives portant sur lui ont été mal coordonnées entre elles ».

Quand on a présent à l'esprit ce schéma de base « assimilation/accommodation », on comprend en quoi l'erreur peut être, dans certains cas, source de dépassement, de recherche d'un meilleur ajustement au réel. On comprend aussi qu'on ne puisse faire faire l'économie de telles erreurs et tâtonnements à l'enfant en situation d'apprentissage.

« L'exemple ne sert de rien — peut-on lire encore dans le même ouvrage (p. 409) — tant qu'il ne s'accompagne pas d'initiative véritable. »

C'est dire qu'une bonne partie de l'art de la pédagogie est de savoir susciter des initiatives.

(*A suivre*).

---

(1) Piaget, Inhelder, Szeminska : « *La géométrie spontanée de l'enfant* », P.U.F., 1948, p. 269.

Année scolaire 1970-71 :

Première étape de la réforme de l'enseignement mathématique à l'École élémentaire.

Les Chantiers de Pédagogie Mathématique

poursuivent leur effort pour aider les maîtres à parcourir facilement cette étape et préparer les suivantes :

Six cahiers (n° 13 à 18) à paraître de novembre 1970 à mai 1971. **Abonnez-vous, réabonnez-vous en remplissant la fiche jaune insérée dans ce cahier.**

William Mountebank

De ceux-ci vers ceux-là (5)

Pour essayer de me justifier.

Quand on a promis d'assurer un feuilleton, y manquer oblige à des explications. Opportunité que je saisis d'autant plus volontiers que je désire répondre à des critiques qui m'ont été adressées.

La première consistait à mettre en doute mon existence. Imaginez, vous, quelle serait votre réaction si un interlocuteur vous abordait en niant que vous existiez! Sans prétendre me comparer à ces grands savants que fut ou qu'est Euclide et Bourbaki, aucun de vous ne niera l'existence de l'un et de l'autre. La meilleure preuve : ils ont écrit des livres. Je n'en suis pas encore là, mais ce feuilleton, je voudrais qu'il serve de pièce à conviction.

Autre critique : avoir manqué le coche pour le *Cahier 10* ne pourrait s'expliquer que par des besognes imprévues et urgentes. Mais c'est bien le cas! Peut-être avez-vous entendu dire qu'il y a eu des élections en Grande-Bretagne. Or, en 1964 comme en 1966, le choix des électeurs britanniques était orienté, pour une part non négligeable, par les problèmes de la science et de l'éducation. Il fallait bien considérer, en 1970, que ces problèmes n'étaient plus mis en avant par personne alors que leur importance n'a pas décru. Quelqu'un a pu dire : « Your old-age pension in the future depends on what goes on in the schools *now*. » J'ai fait de mon mieux pour le clamer, le proclamer; il n'est pas certain que les électeurs en aient tenu grand compte. Mais cela m'a pris du temps.

Troisième critique enfin : pourquoi mêler ainsi constamment des questions politiques, économiques, littéraires ou autres à un feuilleton qui aurait dû être strictement mathématique? Ce « strictement » là, je ne le comprends pas. L'enseignement est une chose de la vie, de la vie en société particulièrement. Il n'y a pas que les retraites des vieux travailleurs qui dépendent d'une bonne organisation scolaire. J'oserai prétendre qu'un bon enseignement mathématique favorise le développement de nos sociétés dans un sens plus libéral.

Voilà ce que je voulais répondre à mes critiques. Moins pour les convaincre que pour m'expliquer aussi complètement que possible.

Des remarques sur des solutions.

Voici maintenant quelques remarques sur les derniers exercices proposés.

[W. 11]. L'image de l'application φ de A dans B, soit $\varphi\langle A\rangle$, et le quotient de A par φ, soit A/φ, sont *la réplique l'un de l'autre*, comme le dit fort justement Marc Barbut dans son excellent petit livre *Mathématiques des sciences humaines*. Il y a

correspondance un à un (correspondance biunivoque comme on disait dans ma jeunesse) entre les classes définies dans A par φ, c'est-à-dire les éléments de A/φ et les éléments de l'image $\varphi\langle A\rangle$, c'est-à-dire les éléments de B qui sont des valeurs de φ. On dira, brièvement et de façon fort expressive : il y a une *bijection* de $\varphi\langle A\rangle$ sur A/φ. Nous reviendrons plus loin sur ce mot.

[W. 12] L'image de f est l'ensemble

$$C = \{200, 220, 240, \ldots, 460, 480, 500\}$$

des naturels en progression arithmétique de raison 20, de 200 à 500. L'image réciproque de 320 est la ligne de niveau qui joint tous les points ayant cette cote. L'image réciproque de 310 est vide (elle n'existe pas) puisque $310 \notin C$. L'ensemble-quotient du départ par f est l'ensemble des lignes de niveau. Qui sera insensible à cette précision du langage mathématique : le départ est l'ensemble des points des lignes de niveau, le quotient est l'ensemble des lignes de niveau ?

[W. 13] Décidons par convention que l'équateur fait partie de l'hémisphère boréal et de l'hémisphère austral. L'hémisphère boréal B est une calotte sphérique qui a pour bord l'équateur. Son image par p est le disque plan b qui a même bord (dans p, tout point de l'équateur est invariant); l'image de p est le disque fermé (bord compris) b. L'image d'un parallèle tracé dans B est un cercle concentrique à b dessiné dans b. L'image d'un méridien, c'est-à-dire un demi-grand cercle de la sphère ayant les deux pôles pour bord, est un rayon du disque b (puisque la portion de méridien située dans B est un quart de cercle). Cette application p est bien une *projection* (au sens de la cartographie) puisqu'elle réalise une bijection d'une portion de la sphère sur une portion de plan (à ceci près que dans la véritable cartographie, la surface à représenter n'est pas une sphère mais le géoïde).

En tout cas le trajet décrit par l'ours est un triangle sphérique à deux angles droits dont la « projection » (par p) est le bord d'un secteur de cercle; la tanière de l'ours est au pôle Nord; l'ours est donc blanc. Vous trouverez peut-être une autre solution avec un itinéraire *voisin* du pôle Sud, mais elle suppose qu'un fort blizzard efface les traces de l'ours et qu'il existe des ours dans l'Antarctique...

[W. 14] Corrigeons une imperfection de l'énoncé. Il y a plusieurs applications c possibles de l'ensemble D des dates du XXe siècle dans l'ensemble S des jours de la semaine. En voici une, fondée sur le fait que S a sept éléments. Pour calculer sur les termes du triplet x, y, z, je leur fais correspondre d'abord les termes (x', y', z') d'un triplet simplifié de la façon suivante $x' = x$, $z' =$ le naturel formé par les deux derniers chiffres de z (z' est le numéro de l'année dans le XXe siècle); enfin y' est le naturel qui correspond au mois dans la table suivante :

y	jan	fév	mar	avr	mai	juin	juil	août	sept	oct	nov	déc
y'	1	4	4	0	2	5	0	3	6	1	3	6

(il y a, dans ce tableau un « mystère » qui reste à éclaircir).

D'autre part, je désigne par b le nombre de jours bissextiles écoulés depuis le début du XXe siècle, le 1er janvier 1901, jusqu'à la date (x, y, z). Je calcule la somme

$$x' + y' + z' + b$$

et je la divise par sept; le reste de cette division est r. J'établis alors entre les restes possibles et les jours de la semaine la correspondance suivante :

r	1	2	3	4	5	6	0
S	dim	lun	mar	mer	jeu	ven	sam

Exemples : 1er janvier 1901; $x' + y' + z' + b = 3$; $r = 3$ donc

c (1er janvier 1901) = mardi.

31 août 1914; $x' = 31$, $y' = 3$, $z' = 14$, $b = 3$; $x' + y' + z' + b = 51$; $r = 2$; le 31 août 1914 était un lundi.

22 mars 1968; $x' = 22$, $y' = 4$, $z' = 68$, $b = 17$; $x' + y' + z' + b = 111$; $r = 3$; le 22 mars 1968 était un vendredi.

Pour le 31 décembre 1900, la règle ne s'applique pas puisque cette date est celle du dernier jour du XIXe siècle. Mais si le 1er janvier 1901 était un mardi, la veille ...

Deux questions restent posées : comment expliquer les naturels affectés aux mois? comment modifier le calcul pour les autres siècles? Cela vous permettra de savoir quel jour fut prise la Bastille.

[W. 15] $f\langle \mathbb{R} \rangle = \mathbb{R}^+$ ensemble des réels positifs ou nuls. Le quotient $\mathbb{R}/f$ est l'ensemble des classes de réels qui ont même carré (ou encore : deux réels sont dans la même classe s'ils ont même carré).

$g\langle \mathbb{R} \rangle = \mathbb{R}$; $\mathbb{R}/g$ est l'ensemble des classes de réels qui ont même image par g.

Exemples : $\{0; 2\} \in \mathbb{R}/g$ puisque $g(0) = g(2) = 0$; $\left\{ \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\, 1-\sqrt{3}), \frac{2}{3}\,(1+\sqrt{3}) \right\} \in \mathbb{R}/g$ puisque $g\left(\frac{2}{3}\right) = g\left(\frac{2}{3}\,(1-\sqrt{3})\right) = g\left(\frac{2}{3}\,(1+\sqrt{3})\right) = -\frac{16}{27}$.

Quant à l'application réciproque de $x \mapsto \sin x$, nous y reviendrons quand vous voudrez.

L'après-feuilleton.

Le cinquième épisode, ci-dessous, apporte-t-il une sorte de conclusion au feuilleton commencé (en ce qui me concerne) il y a presque un an? Évidemment non : une histoire mathématique n'a pas de fin; toute question résolue pose de nouvelles questions. Et puis, à nouvelle année scolaire, nouvelle formule. Pour 1970-71, il faut envisager « autre chose ».

Dans le livre si remarquable écrit (en anglais) par Constance Reid sur Hilbert, je trouve cette caractérisation d'un *bon* problème par ce très grand mathématicien : (1) que le problème soit *clair* et facile à comprendre; (2) qu'il soit *difficile* (en vue de nous séduire) et pourtant pas complètement inaccessible (pour ne pas nous rebuter); (3) qu'il soit *significatif* c'est-à-dire qu'il soit un jalon dans notre tortueuse et indéfinie recherche des vérités encore cachées. En quête du clair, du difficile et du significatif, quels problèmes nous poserons-nous?

Sous cette étiquette, puis-je espérer de mes lecteurs plus de réponses aux questions que je me pose, que je nous pose? Le feuilleton « de ceux-ci vers ceux-là » m'a bien valu quelques lettres, celles qui ont constitué mon quatrième épisode en particulier, j'en espérais plus. Viendront-elles après ce cinquième épisode et dernier?

Cinquième épisode : des mots et des nombres.

Que mes lecteurs se reportent aux judicieuses remarques de Wolfgang Wörter sur les dictionnaires dans le *Cahier 9*; il est rare que j'épouse aussi complètement l'avis d'un collègue. La langue mathématique est vivante; à nous de la faire prospérer en évitant l'hypertrophie aussi bien que le déssèchement. Tout échange sur la mathématique concerne d'une façon ou d'une autre la langue. Je souhaite spécialement des critiques à mes expressions, essayant d'écrire directement en français tout en pensant d'abord à la mathématique.

Nous avons opposé *surjection* ($\varphi\langle A\rangle = B$, l'image est égale à l'arrivée) à *sélection* ($\varphi\langle A\rangle \neq B$, le complémentaire de l'image par rapport à l'arrivée n'est pas vide, il y a des non-sélectionnés). Ceci résulte de l'observation de l'ensemble d'arrivée dans l'application φ.

Revenons sur l'ensemble de départ A; l'application φ y a défini l'ensemble-quotient A/φ, image réciproque de $\varphi\langle A\rangle$. X, élément de A/φ, est la classe de tous les éléments de A qui ont même valeur dans B par φ. Un cas particulier très remarquable est celui où chacune de ces classes, chaque élément de A/φ, est un singleton; toute valeur prise dans l'image $\varphi\langle A\rangle$ n'a qu'un seul antécédent. Symboliquement :

$$\forall b \in \varphi\langle A\rangle, \quad \exists! x \in A \quad \varphi(x) = b$$

ou encore

$$\forall X \in A/\varphi, \text{ card } X = 1.$$

Alors, l'ensemble-quotient est une réplique de l'image. On dit que φ est une *injection*. [Il aurait été plus correct de dire « unijection », ainsi que Chastenet de Géry l'a fait remarquer dans le *Bulletin* de l'A.P.M.E.P.; mais l'habitude universelle de dire injection a prévalu, ce qui prouve, une nouvelle fois, que la langue mathématique est vivante; aussi bien faite que possible mais œuvre humaine et riche par conséquent d'imperfections plus ou moins gênantes qui s'imposent cependant soit par le poids des habitudes soit par l'universalité de leur emploi.]

Surjection : l'arrivée est une réplique du quotient.

Injection : le départ est une réplique de l'image.

De ces deux phrases construites sur le même moule mais où les rôles de sujet sont arrivée ou départ, où les rôles de complément de l'attribut sont quotient (dans le départ) et image (dans l'arrivée), résulte la conclusion.

Une application à la fois surjective et injective est telle que l'arrivée soit une réplique du départ. Elle est dite *bijective*. Dans une bijection, l'image est l'arrivée, le quotient n'est pas égal au départ mais chaque élément du quotient est un singleton ayant pour élément un élément du départ. Une bijection définit donc une correspondance un à un de A sur B et il existe une bijection réciproque de B sur A. Une bijection définit une correspondance biunivoque entre les éléments de A et de B.

Ces précisions du langage mathématique ne seront vraiment comprises que si des exemples viennent les illustrer.

La table de correspondance entre les valeurs 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 des restes r possibles dans les divisions de naturels par 7 et les jours de la semaine (voir plus haut [W. 14]) est une bijection de l'ensemble de ces valeurs de S sur l'ensemble des jours de la semaine. La table de correspondance entre les mois de l'année et les naturels (même exercice) définit une surjection de l'ensemble des mois sur l'ensemble $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; cette application n'est pas injective puisque février $\mapsto 4$ et mars $\mapsto 4$.

Dans tous les cas l'application réciproque $\overset{-1}{\varphi}$ d'une application $\varphi : A \to B$ est une bijection de $\varphi\langle A \rangle$ sur A/φ (voir [W. 11]).

Le type même de l'application injective non surjective est l'attribution à chaque salarié, en France, d'un matricule de sécurité sociale. La manière même dont ce matricule est défini interdit l'existence de deux individus distincts ayant même matricule. La non surjection permet d'affirmer que cette vérité restera vérifiée quand les enfants non encore nés seront inscrits, le moment venu, à la sécurité sociale (en admettant que le système actuel d'inscription soit conservé).

***

Après les mots, venons-en aux nombres. La recette compliquée donnée dans [W. 14] pour retrouver le jour de la semaine connaissant la date illustre bien le fait que pour appliquer l'ensemble des dates (x, y, z) dans l'ensemble S des jours de la semaine il y a sûrement plus d'une façon d'opérer. Alors combien?

Réfléchissons à un autre exemple, imité de [W. 12]. A l'ensemble des points figurés sur une carte, il y a de nombreuses façons d'attribuer à chacun un nombre. Dans [W. 12] ce nombre est la mesure de l'altitude en mètres (la cote); ce pourrait être, à un moment donné, la mesure de la pression atmosphérique (en millibars). Alors combien d'applications de cet ensemble infini de points dans l'ensemble infini des naturels? On a envie de répondre : une infinité; mais est-ce plus ou moins que l'infinité des points du départ?

Quand il y a bijection de l'ensemble infini des points de l'hémisphère boréal sur l'ensemble des points du disque ayant l'équateur pour bord, ne peut-on conclure qu'il y a *autant* de points sur l'hémisphère et sur le disque? La bijection permettra donc de classer les ensembles en ensembles *de même puissance* (ou ensembles équipotents ou ensembles de même cardinal). Mais le problème plus général posé ci-dessus est celui de dénombrer les applications distinctes de A dans B.

Il paraît évident que ce nombre dépendra du nombre des éléments de A et de B, c'est-à-dire du cardinal de chacun de ces ensembles. On posera card $A = m$, card $B = n$; on désignera par $\mathcal{A}(m, n)$ le nombre des applications de A dans B.

Simplifions alors le problème. A est l'ensemble formé d'une seule personne, vous-même par exemple. B est un ensemble de n villégiatures possibles pour vos vacances. Vous avez deviné que l'application f de A dans B consiste, pour vous, à choisir votre villégiature. Vous avez le choix entre n éventualités; soit $\mathcal{A}(1, n) = n$.

Supposez maintenant que A soit constitué par vous-même et l'ami Jules, B restant le même ensemble de villégiatures. Jules est aussi libre que vous-même de choisir sa villégiature. Si Jules va en vacances avec vous, l'application de A dans B ne sera pas injective; si Jules ne va pas en vacances avec vous, f sera injective. Mais le choix de Jules venant après le vôtre (ou l'ordre inverse), vous conduit à $\mathcal{A}(2, n) = n^2$.

Plus généralement si m personnes constituant A ont choisi leurs villégiatures parmi les n éventualités de B, une $(m + 1)^{\text{ème}}$ personne venant s'agréger à A aura aussi le choix entre le n villégiatures. Soit :

$$\mathcal{A}(m + 1, n) = n \times \mathcal{A}(m, n).$$

En rapprochant ces formules :

$$\mathcal{A}(1, n) = n,\ \mathcal{A}(2, n) = n^2,\ \ldots,\ \mathcal{A}(m + 1, n) = n\mathcal{A}(m, n)$$

on obtient le résultat cherché :

$$\boxed{\mathcal{A}(m, n) = n^m}$$

Ce premier résultat, valable pour des ensembles A et B finis (m et n sont des naturels) surprendra quand on passera aux exercices les plus simples. Voici par exemple toutes les applications de $\{a, b, c\}$ dans $\{x, y\}$; d'avance la formule donne $\mathcal{A}(3, 2) = 8$; définissons chacune de ces applications par le triplet à éléments pris dans $\{x, y\}$ image de (a, b, c).

$$(x, x, x),\ (x, x, y),\ (x, y, x),\ (y, x, x)$$
$$(x, y, y),\ (y, x, y),\ (y, y, x),\ (y, y, y).$$

C'est ce que vous devrez savoir si pour les trois repas, chaque jour, vous avez seulement le choix entre x = caviar farci à la bordelaise et y = soupe aux choux; vous avez huit jours de menus différents.

Dans un village, le boucher, le dentiste, le médecin et le libraire décident d'y venir en tournée un jour par semaine (mais pas le dimanche). Chacun choisit librement son jour. Il y a 1296 solutions. Si un charcutier se mêlait d'imiter les autres, il y en aurait 7776.

Dans un autre village, Il y a trois boulangers; chacun ferme un mois par an pour ses vacances. Il y a 1728 cas possibles (en supposant que les congés aillent toujours d'un début à une fin de mois). Parmi ces 1728 cas, il y a celui des trois boulangeries fermées en août...

***

Revenons au choix des villégiatures. Supposons que Jules, un ami, c'est entendu, préfère, de toute façon, ne pas aller en vacances avec vous. C'est dire que $f : A \to B$ doit être injective. Si vous avez choisi dans B l'une des n adresses possibles, Jules n'a plus le choix qu'entre $n - 1$ adresses. Il y aura $\mathcal{I}(2, n) = n(n - 1)$ injections (en supposant $n \geqslant 2$).

Ce qui conduit à deux remarques presque évidentes : $\mathcal{I}(2, n) < \mathcal{A}(2, n)$; il y a moins d'injections que d'applications pour $n \geqslant 2$ puisqu'il y a des applications non injectives (Jules, pris de remords à l'idée de vous abandonner, viendra avec vous en vacances).

Plus généralement :

$$\mathcal{I}(m + 1, n) = (n - m) \times \mathcal{I}(m, n),$$

pourvu que $m \leqslant n$.

Le rapprochement de

$$\mathcal{I}(1, n) = n;\ \mathcal{I}(2, n) = n(n - 1);\ \ldots;\ \mathcal{I}(m + 1, n) = (n - m)\ \mathcal{I}(m, n)$$

conduit à la formule

$$\boxed{\mathcal{I}(m, n) = n(n - 1)\,(n - 2) \ldots (n - m + 1)\ (m \leqslant n).}$$

L'exemple qui vient malheureusement à l'esprit de tout le monde est de trouver le nombre de triplets qu'il est possible de constituer avec dix chevaux au départ d'une course. C'est le nombre des injections de $A = \{1, 2, 3,\}$ dans l'ensemble B des

10 chevaux, soit $\mathfrak{J}(3, 10) = 10 \times 9 \times 8 = 720$. S'il y avait eu 15 chevaux au départ, on aurait eu $\mathfrak{J}(3, 15) = 15 \times 14 \times 13 = 2\,730$ triplets possibles. Ces nombres sans mystère retiennent cependant l'attention de milliers de parieurs et c'est une chose qui m'attriste toujours.

Si les trois boulangers conviennent que deux quelconques d'entre eux ne prendront pas leurs vacances en même temps, il leur reste quand même le choix entre $\mathfrak{J}(3, 12) = 12 \times 11 \times 10 = 1\,320$ solutions possibles.

***

Il reste le cas de la famille de cinq personnes $A = \{a, b, c, d, e\}$ qui sont bien décidées à aller en vacances chacune de leur côté. Cela exige $n \geqslant 5$. Le cas limite, le cas le plus défavorable pour la liberté de leurs choix est celui où $n = 5$. Aller chacun de son côté, c'est dire que f est injective; prendre $n = 5$, c'est dire que f est surjective et injective donc bijective. De façon générale $\mathfrak{J}(n, n)$ est le nombre des bijections d'un ensemble à n éléments sur un ensemble à n éléments. D'après la dernière formule encadrée

$$\mathfrak{J}(n, n) = n(n-1)(n-2) \ldots 3 \times 2 \times 1$$

ce qu'on écrit

$$\mathfrak{J}(n, n) = n!$$

(on prononce « factorielle n »).

Pour la famille des cinq personnes qui se connaissent trop

$$\mathfrak{J}(5, 5) = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120.$$

Pour les 12 élèves (effectif trop souvent dépassé, hélas) qui ont à choisir entre 12 places dans la classe, il y a

$$12! = 12 \times 11 \times 10 \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1 = 479\,001\,600$$

façons de s'asseoir.

***

Les remarques précédentes ne sont que les premiers pas dans cette science des dénombrements qui est appelée *la combinatoire*. Ses débuts coïncident avec les premières questions de calcul des probabilités : c'était le temps de Fermat et de Pascal. La statistique moderne, les applications mathématiques aux sciences humaines et la forte consommation d'ensembles finis qui y est faite ont remis cette science en honneur. C'est une aubaine pour nous qui apprenons à compter aux petits enfants.

Pour de plus amples développements, je renvoie le lecteur au livre de Barbut déjà cité (*Mathématiques pour les sciences humaines*, deux volumes, P.U.F.). Pour le lecteur « savant » ou spécialement curieux le plus récent *Analyse combinatoire* par Louis Comtet (deux volumes, P.U.F.) lui montrera que cette branche de la mathématique est une mine de problèmes pour tous les niveaux de chercheurs, de la Maternelle à l'Université, comme on dit, je crois, en français...

Tribune de discussion.

Comme nous l'avons déjà fait dans le Cahier 9, *nous présentons ici une analyse d'un matériel pédagogique diffusé depuis peu. Conformément à un principe auquel nous tenons, ce texte a été soumis aux auteurs du matériel ; une entrevue a eu lieu, dans le cadre d'un chantier. Nous publions à la suite une réponse du principal auteur. Nous publierons volontiers tout autre avis.*

Les plaquettes à caractéristiques multiples Hachette (Brédijeux - matériel P.L.E.M.)

Dans le *Cahier 8* de la présente série (déc. 1969), faisant écho à une lettre de notre collègue Denise, professeur à l'École Normale d'Auxerre, nous avions signalé l'existence du matériel P.L.E.M. édité par Hachette. Cette maison a bien voulu nous confier pour étude un exemplaire de ce matériel ainsi que les fiches d'accompagnement correspondantes.

Pour être en mesure de présenter sur ce matériel et ces fiches une opinion circonstanciée nous avons constitué au *chantier Balard* un groupe de travail de neuf institutrices, d'un physicien-mathématicien père de jeunes enfants et d'un membre de l'équipe de rédaction des *Cahiers* également père d'élève. Ce groupe a consacré plusieurs séances à l'étude attentive du matériel et des documents d'accompagnement. D'autre part il a recueilli l'avis d'un petit groupe d'enseignants (Maternelle et Primaire) d'une école de la banlieue parisienne qui expérimente la mathématique moderne depuis plusieurs années.

Le résultat de cet examen et de cette consultation est consigné dans le rapport ci-dessous.

1. — Le matériel P.L.E.M., ses caractéristiques, ses particularités.

Ce matériel est constituté de pièces à caractéristiques multiples, plaquettes en matière plastique au nombre de 576 contenues dans 4 boîtes pouvant recevoir chacune 144 pièces. Les plaquettes sont présentées sous trois formes (carrée, circulaire, triangulaire) et deux tailles.

Les plaquettes de grande taille sont de dimensions relativement importantes : 13 cm de diamètre pour les ronds, 16 cm de côté pour les triangles équilatéraux, 11,5 cm de côté pour les carrés.

Les petites pièces ont des dimensions encore notables (côté de 8 cm, par exemple pour les carrés).

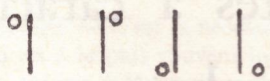
Les pièces sont en outre différenciées par :

— la couleur (bleu, rouge, jaune, vert);

— par l'aspect d'une des faces (recto) qui porte soit des petits carrés en relief, soit des petits cercles, soit de petits triangles;

— par les symboles figuratifs inscrits sur l'autre face (verso).

Ces symboles comportent une partie commune : un cadre carré en relief repéré latéralement par 4 figurines (un soleil en haut, un poisson en bas, une main gauche à gauche pointant vers la droite, une tête de chien à droite regardant vers la gauche. Dans ce cadre est inscrit soit un signe en ∪ orienté suivant une des 4 positions : (∪, ∩, ⊂, ⊃), soit un couple d'une barre et d'un rond disposés suivant une des 4 positions :



Il y a donc en tout six « variables », c'est-à-dire beaucoup plus que ce n'était le cas pour le matériel dont nous avons précédemment parlé (blocs Hull-Dienes de l'O.C.D.L., blocs KML de Nathan, pièces de carton CEPEMAT de Lavauzelle). Ici, le nombre de pièces est beaucoup plus grand et, compte tenu de leurs dimensions, le tout forme un ensemble particulièrement volumineux : chacune des quatre boîtes a pour dimensions 18 × 20 × 73 cm.

Le sigle désignant le matériel (P.L.E.M.) signifie « Perceptions Logiques et Ensembles Mathématiques ».

L'introduction du mot « perception » dans la désignation du matériel s'explique parce qu'il fait appel à des caractéristiques (ou propriétés) pouvant être révélées par le *toucher*. Il y a là un souci extrêmement louable de ne pas cantonner l'éducation des très jeunes enfants à ses tâches traditionnelles et de l'étendre vers le domaine de la perception et de la psycho-motricité, dans l'espoir notamment que ce type d'apprentissage favorisera l'acquisition ultérieure de la lecture et de l'écriture.

C'est dans le même esprit qu'ont été introduits les signes orientés figurant au verso des plaquettes.

En bref il s'agit d'un matériel aux possibilités multiples plus « riche » que les matériels auxquels il avait été fait allusion précédemment dans les *cahiers*.

Cette caractéristique se retrouve au niveau de l'utilisation qui en est proposée. D'une part, outre l'usage prévu à la Maternelle comme matériel de jeu pour l'initiation aux ensembles et à la logique (classements, emboîtements, etc.), le P.L.E.M., pour reprendre les termes mêmes d'une fiche introductive, prépare l'enfant à l'apprentissage de la lecture car il permet de proposer à celui-ci « une multitude d'exercices de perception, orientation, position relative, succession, tracés de signes ». D'autre part, ce matériel est suffisamment complexe pour être proposé aux élèves des classes de Sixième : il permet d'illustrer la partie nouvelle du programme entré en vigueur cette année.

2. — Les fiches.

Nous avons examiné les fiches cartonnées 18,5/21 s'adressant au niveau « Maternelle » et intitulées : « P.L.E.M. Fichier d'utilisation par R. Coquille avec la collaboration de Mme J. Bergère, institutrice de classe de perfectionnement ».

Ce fichier comprend :

— des *fiches générales* numérotées GEN/1 à GEN/8 : elles précisent les conceptions pédagogiques des auteurs et indiquent le mode d'emploi des fiches et du matériel;

— des *fiches d'exercices* (destinées aux maîtres) numérotées J Ex. 1 à J. Ex. 57.

Les premières de ces fiches (J. Ex. 2 à J. Ex. 7) indiquent aux maîtres comment ils pourront faire découvrir par les enfants les caractéristiques de P.L.E.M. et leur faire étudier les divers attributs des plaquettes. C'est la phase « d'éducation perceptive et psychomotrice sensibilisant puis familiarisant l'enfant aux divers attributs ».

La fiche J. Ex. 2 explique en détail comment l'élève doit procéder pour reconnaître par le toucher seul l'aspect du recto des plaques.

Exemple : « La main investigatrice perpendiculaire à la plaque, saisir les petits volumes en relief entre le pouce et l'index. Si, en faisant tourner la plaque de l'autre main, les doigts de la main investigatrice ne perçoivent aucun angle, l'élément est clouté. »

La fiche J. Ex. 3 détaille l'étude de la forme. Chaque enfant est muni d'un « univers de travail » (sous-ensemble de P.L.E.M.) dont les éléments — considérés au verso — ont même couleur, même taille, même aspect. La seule variable est la forme. Déroulement de l'exercice :

A. — *a*) Faire comparer par superposition : carré et triangle, carré et cercle, cercle et triangle;

— suivre la forme extérieure avec le doigt,
— le cercle : « ça tourne toujours »,
— le carré et le triangle : il y a des lignes droites et des pointes,
— le triangle : c'est plus pointu dans les coins,
— chercher des objets en forme de carré, de cercle et de triangle,

b) Les tracer :
— en suivant les contours,
— en repassant sur les contours de figures déjà tracées,
— à main levée.

c) Les reconnaître par le toucher seul (yeux bandés par exemple).

d) Employer correctement les mots : forme, carré, cercle, triangle.

B. — Les enfants réunissent tous les univers de travail. Le maître y joint les éléments non distribués.

On constate que tous les éléments sont des carrés, des cercles ou des triangles.

On les classe : un tas de carrés, un tas de cercles, un tas de triangles.

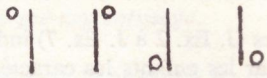
C. — Demander à chaque élève un carré (par exemple).

Faire remarquer que tous les éléments donnés par les élèves ont une « propriété commune » : ils ont la même forme. Pour celui qui les demande, ils sont pareils, ils se valent. On dit qu'un élément carré est équivalent par la forme à un autre élément carré.

Aider ainsi à former progressivement ce concept de « propriété commune », d' « équivalence ». Ne faire formuler que lorsque tous les élèves ont acquis le « concept ».

La dernière fiche de cette première série (J. Ex. 8) a trait à l'étude des signes

disposés au verso. Outre les plaques, chaque enfant reçoit des allumettes en matière plastique ou à tête de porcelaine et 4 anneaux de rideau et on leur apprend à disposer 1 allumette et 1 anneau l'un par rapport à l'autre des diverses façons figurant sur le verso des plaques, puis à dessiner les schémas correspondants :



Viennent ensuite des *jeux de notation codée* (Fiches 8 et 9) joués collectivement par groupes de deux équipes de 4 à 6 enfants. Dans le « jeu du bon de commande » on fait établir la liste des éléments d'un « univers de travail » en utilisant un code, le petit triangle rouge clouté, par exemple, étant représenté par un contour triangulaire de couleur rouge à l'intérieur duquel est placé un petit cercle et à côté duquel est tracée schématiquement une figurine assise (évoquant ce qui est « petit » par opposition à une figurine debout évoquant ce qui est « grand »). Le jeu consiste à faire vérifier par l'équipe adverse que la liste a été correctement établie.

Ces fiches introduisent la notion de classe d'équivalence : un tas d'éléments rouges constitue une classe qui peut être individualisée par un cerceau encerclant tous ces éléments et n'encerclant qu'eux. La classe est repérée par un signe adéquat, par exemple une marque rouge.

Les fiches 10 à 15 sont consacrées à des « *jeux d'éducation perceptive et psychomotrice* » joués individuellement ou en équipes. Il s'agit de faire reconnaître tel ou tel élément, de chercher un élément « pareil » à un autre, de décrire, dessiner, coder divers éléments. Puis viennent des partages, des tris, des exercices de mémoire portant sur des listes d'objets ou sur des configurations réalisées avec les plaques.

Les fiches 15, 16 et 17 proposent des exercices de *pré-apprentissage à la lecture* basés sur l'assemblage de plaques suivant un tracé linéaire (à la manière dont les lettres d'un texte sont placées côte à côte sur la ligne d'un livre).

Les fiches 18 à 26 peuvent être rangées sous la bannière « *initiation à la logique* ». Elles introduisent la notion d'attribut nié (élément non carré, par exemple), et la notion de différences (éléments ne différant les uns des autres que par 1, 2, ..., attributs). On y retrouve les classiques jeux de dominos et de damiers.

Tout naturellement viennent ensuite (Fiches 27, 28) des *classifications simples puis croisées* (tableaux de rangement à double entrée).

Après une courte incursion dans le domaine des *opérateurs non numériques* et des *transformations* sur des éléments ou des ensembles (sous l'effet d'un coup de baguette magique ou d'une machine), le programme aborde (Fiche 32) les opérateurs numériques ($+2$, -2, $\times 4$, $:3$).

Viennent ensuite des *jeux de conjonction* sur des ensembles en faisant appel à des routes qui se croisent et à des parkings puis à des cerceaux ou des cordes (cercles de Venn-Euler). Dans la fiche 39 il est question de plateaux de pâtissier, les plaques P.L.E.M. étant censées représenter des gâteaux.

Les fiches poursuivent par des *jeux de disjonction* qui donnent l'occasion d'introduire, outre la notion d'ensemble complémentaire, les *règles de De Morgan* (« L'ensemble complémentaire d'un ensemble « ou » est un ensemble « et ») (Fiche 41).

La fiche 45 indique aux maîtres comment ils peuvent apprendre aux élèves le vocabulaire relatif aux ensembles : « univers de travail », « ensemble », « élément », « appartient », « n'appartient pas », « est identique ».

La fiche suivante introduit la distinction entre « ensembles égaux », « ensembles identiques », « ensembles équipotents ».

Les fiches 48 à 55 abordent successivement les questions suivantes : relation d'équivalence, inclusion, suite des entiers naturels (on part d'un ensemble à un élément, on forme l'ensemble équipotent auquel on ajoute un deuxième élément, et ainsi de suite), réunion, différence de deux ensembles.

Les dernières fiches (56 et 57) sont consacrées à une révision du vocabulaire relatif aux ensembles. Cette révision permet notamment d'introduire la locution d' « ensemble vide ».

3. — Appréciations concernant le matériel et les fiches.

La description qui précède aura certainement permis au lecteur de noter combien le matériel présente des possibilités d'utilisation variées, combien la matière traitée est abondante. On doit ajouter que les jeux proposés sont ingénieux et leur dénomination souvent heureuse.

Le souci de ne pas isoler la mathématique d'autres activités fondamentales (lecture, écriture), l'intérêt porté par les auteurs aux exercices de toucher et d'orientation sont également des éléments très positifs.

Pourtant, au cours de l'examen du matériel et des fiches, de nombreuses réserves, voire des critiques sérieuses, ont été formulées que nous voudrions résumer ci-dessous.

1. Le matériel

Les reproches faits au matériel sont les suivants :

Les plaquettes présentent l'inconvénient de n'avoir qu'une très faible épaisseur. On peut difficilement les faire tenir en équilibre sur la tranche. Les activités de construction — qu'adorent les enfants d'âge de Maternelle — se trouvent ainsi pratiquement écartées. Tout se passant à plat et les plaquettes étant d'asez grandes dimensions, les tables de travail sont très vite encombrées. Si on travaille à terre le jeune enfant qui concentre son attention sur une zone de travail risque de complètement ignorer des pièces distantes de quelques dizaines de centimètres du point central.

L'encombrement des boîtes elles-mêmes ne peut être ignoré. De nombreuses maîtresses font remarquer qu'il faut beaucoup de temps pour sortir les pièces, les assortir et les distribuer aux divers enfants ou équipes. Vérifications et rangements en fin de travail risquent de prendre un temps assez long.

Concernant l'aspect (recto), on a constaté à la suite de divers essais que les petits volumes en relief (petits ronds, petits carrés, etc.) sont trop rapprochés (4 mm) pour qu'il soit facile de distinguer les diverses formes par le toucher seul. La distinction entre le triangle et le carré qui offrent tous deux des angles apparaît comme particulièrement délicate si on ne fait pas appel à la vue.

Pour les dessins au verso, un des membres de notre groupe fait état de l'intérêt pris par son jeune fils (d'âge de Maternelle) aux symboles (soleil, tête de chien, etc.) qui sont représentés. L'enfant toutefois dans le cours des jeux ne s'attache guère à la bonne orientation prescrite par les fiches (le soleil en haut). De façon générale les maîtresses craignent qu'elles ne puissent vérifier avec suffisamment de soin la façon dont les enfants orienteront les figurines et par conséquent redoutent qu'il en résulte pour certains, ceux qui précisément ont des difficultés dans ce domaine, des confusions plutôt qu'une aide. Les quatre combinaisons de dispositions « barre-

rond » créeront certainement, dans beaucoup de cas, des difficultés. D'autre part il est rappelé que les enfants de cet âge sont très « dispersés » et « fantasques ». L'attention de certains sera attirée par le soleil ou la tête de chien, celle de tel autre par la forme de telle plaque qu'il s'amusera à faire rouler, etc. et les maîtresses craignent de ne pouvoir maintenir les enfants sur l'étroit chemin que leur prescrivent les fiches.

L'appréciation générale est que le « programme » proposé est beaucoup trop vaste et risque d'inciter les maîtresses qui n'y prendraient garde à pratiquer une « pédagogie galopante » là où beaucoup pensent qu'il convient de préparer longuement le terrain en laissant la possibilité de la découverte aux enfants.

Ce risque est d'autant plus grand que les fiches, par leur libellé même, incitent à une grande directivité. Voici quelques exemples :

Fiche Ex. 4, nous relevons les expressions : « emploi correct des mots et expressions : taille, grand, petit, moyen (si on le juge bon), aussi grand que, plus petit que, moins grand que. Enseigner la notation codée...

a) faire comparer simultanément par la vue et le toucher la surface des éléments;

b) faire reconnaître la forme des petites figures en relief par la vue seule, par le toucher seul (yeux bandés);

c) faire saisir (...) que l'aspect de l'élément est indépendant de la forme et de la couleur;

d) si possible, faire utiliser la notation codée enfantine de l'aspect (...) ».

De même, fiche J. Ex. 6, on peut lire : « Dans un premier stade, on *exige* (1) que l'enfant exprime la direction de l'ouverture par : le signe est ouvert du côté du soleil, etc., et plus loin : *exiger* (1) : le cercle est en haut à gauche, le cercle est en haut à droite, etc.

Autre exemple (fiche J. Ex. 9) : chaque équipe reçoit deux cerceaux, les deux attributs de définition sont indiqués en notation codée. Consigne : « Posez dans l'un des cerceaux tous les éléments qui conviennent et marquez en notation codée dans l'autre et dans l'intersection tous les éléments qui pourraient s'y trouver ».

En lisant une telle consigne on ne peut s'empêcher de penser qu'elle s'adresse à des élèves de niveau Cours Moyen ou de Sixième plutôt qu'à des enfants de 5 à 6 ans d'âge... Certes des enfants très jeunes peuvent apprendre sans trop de difficultés des termes tels que « clouté », « lancéolé », « intersection », « identique », etc. Mais il est à craindre que beaucoup de ces termes ne recouvriront pour l'enfant aucune réalité et l'on voit mal la nécessité d'en imposer si tôt l'usage.

A propos de la notation codée, plusieurs des membres de notre groupe, qui ont des contacts quotidiens avec des enfants dont les âges s'échelonnent de 7 à 11 ans, craignent que beaucoup d'élèves de Maternelle auxquels est destiné l'enseignement des fiches sous revue soient incapables de reproduire avec suffisamment d'exactitude les dessins prévus dans la « notation codée enfantine ». A plusieurs reprises d'ailleurs les fiches laissent entendre que les enfants en cause savent non seulement dessiner correctement mais également lire et compter!

La fiche sur les opérateurs numériques (+2, —2, ×4, : 3) appelle également beaucoup de réserves. Certes elle prend soin de dire : « Lorsque le niveau atteint par les enfants le permet, il faut faire effectuer des transformations de cardinal, comme on fait effectuer des transformations portant sur d'autres variables : taille, forme, couleur ». La sagesse semble-t-il devrait inciter à garder les transformations numériques pour un peu plus tard.

---

(1) C'est nous qui soulignons.

Réserves encore à propos des diagrammes de Venn à trois cerceaux (« intersection double ») et à quatre cordes (ou plateaux de patissier), des jeux sur l'inclusion avec introduction de phrases (placées entre guillemets dans le texte), telles que : « chaque sous-ensemble que vous avez formé est à l'intérieur de la corde qui entoure l'ensemble des bleus. On dit qu'il est inclus dans l'ensemble des bleus ».

Dans ce dernier cas il s'agit d'ailleurs plus que de réserves. En effet il est dangereux d'associer systématiquement, comme on le fait trop souvent, la notion d'inclusion d'une classe dans une autre avec la notion d'inclusion spatiale (« est à l'intérieur ») beaucoup plus immédiatement compréhensible mais qui ne correspond pas à la première. C'est d'ailleurs un des inconvénients propres à l'utilisation trop systématique et exclusive des diagrammes de Venn.

Faire prendre de telles habitudes aux enfants dès leur très jeune âge risque de leur rendre difficile l'acquisition ultérieure de la véritable notion d'inclusion qui ne sera guère accessible, comme l'ont bien montré les travaux très minutieux de J. Piaget (1), que vers l'âge de 9-10 ans.

Ces mêmes recherches, qui ont porté sur 2 159 enfants de 4 à 13 ans, ont montré que le mot « ensemble vide » restait vide de sens pour les jeunes enfants. Pour eux un ensemble est avant tout une collection figurale comportant forcément plusieurs éléments (au moins deux). Ils pourront répéter fidèlement (« par cœur »), comme les y invite la fiche 56 : « le sous-ensemble des carrés noirs est vide » (il n'y a pas de plaquettes de couleurs noires dans P.L.E.M.) et toute la litanie analogue qui suit, mais le concept « ensemble vide » ne se dégagera pas de cette récitation. Tout au plus l'enfant retiendra-t-il qu'un ensemble vide c'est un cerceau dans lequel il n'y a rien, c'est-à-dire une image simplifiée qui appauvrit et mutile trop le concept pour pouvoir être considérée comme un pas préliminaire utile sur la voie de l'acquisition dudit concept.

En *résumé* il est apparu à notre groupe que l'ensemble de notions exposées dans les fiches sous revue est beaucoup trop important pour être abordé dans sa totalité au cours d'une seule année pré-scolaire. Songeons que ce programme recouvre sensiblement toute la partie du programme « relations, ensembles, opérations » envisagée pour le Primaire et l'essentiel de la partie « moderne » des nouveaux programmes de Sixième et Cinquième! Il ne laisse de côté ni la notion de complémentaire, ni la notion d'ensemble vide, ni les règles de De Morgan!

Partant des meilleures intentions qui puissent être, les Auteurs des fiches de Maternelle Hachette ont, semble-t-il, été emportés par leur élan et ont voulu, dès l'abord, faire parcourir aux très jeunes enfants la quasi totalité du très bel édifice mathématique que constituent les notions de base relatives aux ensembles, aux relations et à la «logique des attributs». Ce faisant, ils ont quelque peu perdu de vue les servitudes des classes de Maternelle dont les effectifs sont souvent lourdement chargés.

On ne peut s'empêcher à la lecture attentive de ces documents de penser à ces parents qui, pour habituer leurs enfants à la « beauté », les traînent dans les musées ou leur font écouter de la musique symphonique (Mozart n'y était-il pas sensible très jeune!). Certes les auteurs ont placé leur visite de l'édifice mathématique sous le signe du jeu. Mais il est à craindre que des jeux ainsi pratiqués n'en aient plus guère

---

(1) Voir notamment les exemples détaillés publiés et analysés dans son ouvrage (en collaboration avec B. Inhelder) « *Genèse des structures logiques élémentaires* », Delachaux et Niestlé.

que le nom et que par leur caractère trop systématique et souvent fastidieux ils ne détournent les enfants des activités mathématisantes plutôt que de leur en donner le goût.

J. S.

Réponses.

Nous sommes très reconnaissants à l'Équipe du Chantier Balard de l'étude qu'elle a faite de notre matériel P.L.E.M.; cependant notre étonnement est grand devant une conclusion à laquelle il est difficile de s'attendre après la partie positive de la critique.

Nous pensons qu'il y a malentendu entre les participants du Chantier Balard et nous. Afin de le dissiper, nous demandons à les rencontrer, ce qu'ils acceptent très courtoisement.

Au cours de cette rencontre, nous examinons ensemble les critiques formulées sur le matériel et sur le fichier.

1. — *Le matériel:*

Nous exposons les raisons de nos choix.

Les caractéristiques de relief, d'orientation de signe et de position relative des signes ont été retenus, après expérimentation en école maternelle, afin de permettre à la maîtresse de suivre et d'aider les enfants dans leur évolution psycho-motrice, car, comme l'a si bien exprimé Mucchielli, « l'intelligence analytique ne peut se développer qu'à la condition sine qua non d'avoir la maîtrise du temps et de l'espace » (1). Par expérience, nous savons qu'un enfant arrive normalement à la perception « fine » des petits reliefs de P.L.E.M. à cinq ans environ — leur taille a été choisie pour satisfaire à ce critère — donc au cours de son année scolaire dans la section des grands de l'école maternelle. Jusque là, dans les jeux pratiqués, on exploite seulement les variables de « forme », « couleur », « taille ». Quand l'enfant, suivi et aidé, a passé le seuil des perceptions « fines » et établi une liaison sûre entre ses perceptions visuelles et ses perceptions tactilo-kinesthésiques des petits reliefs, la maîtresse mobilise l'attention de son élève sur l'orientation des signes ou sur leur position relative, et cela, au cours de jeux.

La pratique de ces jeux facilite le développement de l'intelligence, prépare aux apprentissages ultérieurs et évite à bon nombre d'enfants des troubles dans la relation de leur moi à leur univers tels que seuls des rééducateurs de psycho-motricité pourraient les faire disparaître (2). Il importe donc de les proposer aux enfants. Les membres de la Commission qui croient, comme nous, à l'utilité de ces exercices sous forme de jeux ont tort de craindre que la pratique en soit difficile. Il suffit pour les réussir, si l'effectif est trop important, de partager la classe en plusieurs groupes de travail.

Le rapporteur de la Commission reproche au matériel P.L.E.M. d'être trop « intelligent » pour être utilisé par les maîtresses de Maternelle (*). Nous ne partageons pas cette opinion, car les institutrices de Maternelle suivent de fréquents stages de perfectionnement professionnel qui raffermissent leurs connaissances en psychologie de l'enfant. Ces connaissances et l'habitude de faire pratiquer par leurs élèves des jeux de psycho-motricité leur permettent de dominer le matériel P.L.E.M. et de l'utiliser avec facilité et réussite.

Une Institutrice de Maternelle, membre de la Commission, nous dit qu'elle a expérimenté le matériel. Elle a confié des éléments de P.L.E.M. pendant deux heures à ses élèves. Le rapporteur précise qu'ils n'ont construit que des choses comme celles représentées ci-dessous.

(*) Voir notre note en bas de la page 176 (N.D.L.R.).

FIG. 1.

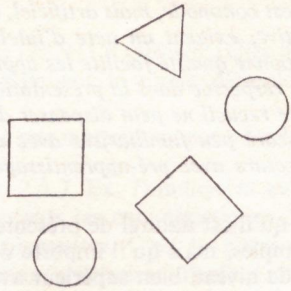


FIG. 2.

L'examen de ces dessins révèle :

a) que les enfants en question n'ont pas encore atteint le stade de perception des éléments fin, puisque, dans leur « classement », ils ne tiennent pas compte du relief des plaques;

b) que du point de vue logique, ils ne sont encore qu'au stade des collections figurales (3). Le dessin de la figure 1 reproduit exactement l'exemple donné par Piaget, page 35, figure 5.

Cette expérimentation, menée dans ces conditions (méthode et durée) permet-elle d'aboutir à un jugement aussi catégorique que celui qui est formulé dans la conclusion sur la valeur et l'utilisation d'un matériel estimé par ailleurs « intelligent »?

2. — *Le fichier :*

Les critiques s'adressent à la teneur des fiches et à leur rédaction.

Bien que nous précisions qu'un fichier « Maternelle » est en préparation, malgré le titre du fichier « FICHIER D'UTILISATION » et le texte de la première fiche que nous reproduisons in-extenso ci-dessous, la Commission persiste à voir dans ce fichier, un fichier pour maternelle. De là, les jugements sur les jeux proposés.

Fac-similé de la première fiche du fichier P.L.E.M.

Gén. 1

Présentation des fiches

Ces fiches ne constituent pas un manuel de mathématiques, de pédagogie, d'éducation perceptive, d'enseignement de la lecture ou d'initiation à la logique, aux ensembles et à la mathématique moderne.

Ce n'est que le recueil de premiers jeux, expériences ou exercices — beaucoup d'autres seront trouvés par les maîtres et les élèves lorsqu'ils seront familiarisés aux caractéristiques de P.L.E.M. — destinés à aider l'éducateur dans la délicate et lourde tâche de formation mentale des enfants qui lui sont confiés.

En gros, les activités proposées, selon leur finalité la plus apparente, peuvent être classées sous trois rubriques :

— éducation perceptive et psycho-motrice,

— pré-apprentissage de la lecture,

— initiation à la logique, aux ensembles, à la mathématique.

Ce classement est commode, mais artificiel, car tous les jeux et exercices requièrent une activité perceptive, exigent un acte d'intelligence et contribuent à l'organisation mentale — dont la bonne qualité facilite les apprentissages.

La progression respectée dans la présentation de ces activités ne suit le programme d'aucune classe et ce recueil ne peut dispenser de l'usage d'un manuel, surtout pour les maîtres qui sont encore peu familiarisés avec des enseignements de la mathématique moderne et de la lecture avec pré-apprentissage.

Nous pensons qu'il est naturel de présenter les fiches en commençant par celles des jeux les plus simples, mais qu'il importe de montrer aux utilisateurs qu'on peut pratiquer des jeux de niveau bien supérieur avec notre matériel.

Nous sommes persuadés que les maîtresses et les maîtres sont capables d'établir eux-mêmes leur programme en fonction du niveau de leurs élèves et de choisir dans un fichier ce qu'il peut leur apporter.

Nous convenons bien volontiers de la directivité de certaines fiches. Elle répond à un besoin exprimé par de nombreux maîtres. Le canevas proposé leur permet de mieux percevoir l'esprit dans lequel la fiche a été rédigée et les aide à concevoir les jeux ou exercices selon leur tempérament et le niveau de leurs élèves. De ce fait, de fastidieuse et contraignante, la fiche devient sécurisante.

En résumé, nous pensons que la partie négative de la critique formulée par l'Équipe du Chantier Balard est pour une bonne part le résultat d'une expérience trop courte et que l'argumentation repose sur quatre *a priori* :

1° Le matériel est trop « intelligent » pour les Institutrices de l'École Maternelle (*).

2° Les exercices de psycho-motricité proposés sont difficiles à pratiquer dans une classe d'École Maternelle.

3° Le fichier est un fichier d'École Maternelle.

4° Les utilisateurs sont incapables d'échapper à la directivité des fiches.

Nous remercions les membres de l'Équipe du Chantier Balard de la critique approfondie qu'ils ont faite de notre travail. Ce fut pour nous un grand plaisir de les rencontrer et nous leur sommes reconnaissants de nous permettre de présenter ici notre point de vue.

R. COQUILLE.

(1) Muchielli et Bourcier : *La dyslexie, maladie du siècle.*

(2) Le Boulch : *Éducation par le Mouvement ou Psychocinétique.* Picq et Vayer : *Éducation psycho-motrice.* Sivadon et Gantheret : *La rééducation corporelle des Fonctions mentales.* Soubiran et Mazo : *La réadaptation scolaire des enfants intelligents.* Etc.

(3) Piaget et Inhelder : *Genèse des structures logiques élémentaires.*

(*) N.D.L.R. — Sans vouloir polémiquer, je ferai remarquer que rien de tel ne figure dans l'analyse présentée et que les Rédacteurs de ces Cahiers n'auraient pas admis sans réagir une telle assertion.

Formation Permanente des Maîtres (F.P.M.)

Un bilan de l'utilisation des films de la série « témoignages pédagogiques »

Le « Chantier de Pédagogie Mathématique » d'Orly, animé par M. Clopeau durant l'année scolaire 1969-70 a réuni des instituteurs soucieux de l'évolution actuelle de l'enseignement des mathématiques. Il leur a proposé un complément d'information et quelques sujets de réflexion. « Le Chantier » s'est réuni en principe tous les quinze jours le samedi après-midi de 14 h 30 à 17 h 30. Une séance consacrée à la projection de deux ou trois films avec débat immédiat était suivie de une à trois séances d'approfondissement. Treize films ont été présentés au cours de l'année.

M. Clopeau a bien voulu traduire ses impressions sur cette expérience, et indiquer ce que ces films lui semblent avoir apporté aux maîtres :

« Les films ont servi de point de départ à nos réflexions et de première motivation à nos études. Ces projections ont eu une grande utilité. L'utilité principale passe inaperçue, je crois, aux yeux des spectateurs eux-mêmes. Chacun y voit en effet l'exposé de notions mathématiques nouvelles ou la présentation de méthodes pédagogiques nouvelles, bref chacun voit dans le film une source d'information. Je ne nie pas cet intérêt très réel; mais je crois qu'il est plus important encore de *sécuriser* les maîtres qui auront à « se lancer » demain dans la grande aventure de la réforme. Pour cela le film leur montre des maîtres *comme eux* avec des *élèves ordinaires*. Parfois une critique peut naître : « le maître parle trop » ou « il y aurait une meilleure méthode... » ou « on a négligé telle difficulté... ». Mais je crois que ces critiques-là font justement l'efficacité des films tels que nous les avons utilisés. Elles permettent au maître spectateur de se *situer honorablement* par rapport au maître acteur, et elles lui donnent le courage d'oser, l'audace de s'exprimer et d'entreprendre.

« Un document qui paraîtrait l'expression pure et abstraite d'une doctrine officielle et sacrée pourrait théoriquement véhiculer une information, mais cette information ne serait en fait pas reçue, le spectateur n'en tirant qu'un sentiment de découragement devant l'impossible. C'est pourquoi cette formule qui consiste à filmer ce qui se fait, erreurs comprises, honnêtement, authentiquement est si efficace.

« Bien sûr, il ne faudrait pas aller jusqu'à soutenir que le contenu n'a aucune importance bien au contraire, et il faut aussi rendre hommage « aux maîtres acteurs » qui n'ont pas craint de se livrer à la critique et ont su présenter du neuf et de l'intéressant. Mais, je crois que l'authenticité est la vertu essentielle de ces films et que c'est grâce à cette authenticité qu'ils ont touché leur public, encouragé les timides, et permis un dialogue fructueux. »

Nous remercions M. Clopeau de ces remarques. Ses observations rejoignent certaines réponses au questionnaire distribué, en fin d'année, aux instituteurs ayant participé au Chantier. 21 instituteurs sur 27, provenant de 12 écoles différentes des secteurs d'Orly et Fresnes ont répondu à ce questionnaire. Ils enseignent à différents niveaux (8 CP - 4 CE1 - 5 CM1 - 3 CM2), dans 11 classes mixtes, 3 classes de garçons, 6 classes de filles (l'un d'eux est directeur d'école).

Onze enseignants n'avaient jamais amorcé de formation mathématique avant ces séances de F.P.M., 10 avaient déjà effectué ou tenté une formation à l'aide de manuels, d'ouvrages destinés aux professeurs, de fiches ou bien par un stage d'École Normale (1), des cours en Faculté (1), l'étude du programme de mathématiques élémentaires (1).

1) *Les motivations du recyclage.* — C'est la nécessité d'appliquer prochainement les nouveaux programmes qui les a le plus souvent incités à suivre ces séances. Ils précisent que pour adapter la théorie à la pratique, les livres ne suffisent pas. Un instituteur écrit : « Je me recycle parce que j'ai le sentiment que l'enseignement que je dispense ne correspond plus à ce que les enfants doivent apprendre maintenant »; d'autres écrivent : « Pour mieux dominer ce que nous enseignons déjà en classe », « Pour savoir où nous allons ».

Onze enseignants ont assisté à toutes les séances; 5 en ont manqué 2 ou 3; 4 en ont manqué plus de 4.

2) *Le cours théorique.* — D'après les maîtres, les *difficultés de compréhension du cours* tiennent le plus souvent au *vocabulaire* (« les mots ne sont pas toujours utilisés dans leur sens habituel », « chaque mot exige des retours en arrière »), au fait que cet enseignement est trop *abstrait* (« on aimerait des exemples tirés de la vie courante comme pour les enfants, mais à notre niveau », « des exemples que l'on pourrait utiliser dans notre enseignement », « des exemples plus concrets »); une personne précise : « quelqu'un qui a abandonné ses études depuis quelques années éprouve des difficultés à assimiler un enseignement théorique ». Un autre écrit : « j'éprouve des difficultés à relier la formation théorique à la pratique pédagogique ». Cette impression est formulée plusieurs fois.

La solution utilisée pour *les exercices*, exercices proposés en cours de séances, recherchés individuellement, par équipes ou collectivement et corrigés le plus souvent par l'animateur est appréciée par la majorité (14). Mais n'ayant pas expérimenté d'autres méthodes de travail, les points de comparaison leur manquent. Cinq personnes préfèreraient une correction par l'un des participants. Cependant dans la pratique les volontaires pour la correction sont rares.

Quelques enseignants souhaitent pouvoir rechercher des exercices d'application entre les séances. Ceux-ci se proposent d'y consacrer entre une demi-heure et deux heures par semaine. Pour les maîtresses, qui composent la presque totalité de l'assistance, le manque de temps (le travail ménager s'ajoutant à la préparation des leçons) rend plus difficile une formation continue efficace et approfondie.

3) *Les films.* — Treize films de la Série « Témoignages Pédagogiques » ont été présentés dans le courant de l'année dont 10 avant la distribution du questionnaire, ce sont dans l'ordre des séances les n°s 1, 3 et 16; n°s 9 et 10; n°s 6, 12 et 13; n°s 7 et 8; et 3 films après le questionnaire, les n°s 14, 15 et 20.

Les enseignants ont particulièrement apprécié *les films tournés dans des classes*

du niveau de celle où ils enseignent, ceux dont ils peuvent tirer des thèmes, des idées, des situations pour leurs leçons, en mathématiques ou dans d'autres disciplines (grammaire, géographie...) (ex. film n° 3 : Flèches; n° 6 : Les chats; n° 9 : Logique-Voitures; n° 17 : Machines...). « Ces films donnent des idées pour mettre la mathématique au niveau des enfants »; « pour exploiter mathématiquement des situations propres à ma classe ».

L'attention des maîtres est souvent centrée sur *la manière de faire passer telle ou telle notion à un niveau d'âge donné*, l'essentiel du contenu mathématique ayant été abordé le plus souvent dans un exposé précédent. Des maîtres précisent par ailleurs : « Ces films apportent des éléments de comparaison avec ce que je fais »; « Ils donnent des idées pour décloisonner l'enseignement », « des indications quant à la conduite d'une classe »; « une nouvelle manière de présenter certaines notions », « des idées pour abandonner le manuel scolaire ». Ils se sont intéressés au *fonctionnement des classes filmées*, à l'attitude du maître et à celle des élèves : « C'est un exemple qui prouve l'intérêt que portent les enfants à la mathématique » (n° 9 : Logique-Voiture); « Ça montre combien les enfants peuvent avoir des idées à suggérer sur un même sujet » (n° 12 et 13 : Codes et Symétries). Les enseignants ont été particulièrement intéressés par les *leçons de base* et par celles où *une notion est abordée pour la première fois dans la classe* (n° 20 : Désignation; n° 21 : Signes; n° 7 : Graduation; n° 12 : Code et Symétrie n° 2...) plus que par les leçons de révision ou de synthèse. Ils souhaitent en voir plus de ce type, car l'introduction d'une notion nouvelle représente un pas délicat à franchir parce qu'elle exige des connaissances mathématiques et pédagogiques, mais aussi pour des raisons purement psychologiques : la peur de se lancer dans l'inconnu. Il est difficile d'évaluer dans quelle mesure et de quelle manière ces films incitent à innover, mais ils y contribuent : au cours de visites de classes, nous avons vu des leçons inspirées par des films (en grammaire par exemple). Certains maîtres ont joint au questionnaire des fiches de travail rédigées pour les élèves et dont les idées sont tirées de films aussi bien que d'émissions de télévision, des cours, ou de livres.

Quinze maîtres ont utilisé les documents d'accompagnement de ces films. Ils ont apprécié les informations qu'ils y ont trouvées, elles leur ont permis de mieux se rappeler le film, de le situer dans son contexte. Ils souhaitent y retrouver le plan net de la leçon correspondante, les croquis utilisés dans les films, et plus de renseignements sur ce qui a précédé et suivi la leçon filmée. Les compléments mathématiques introduits dans ces fiches sont appréciés, mais leur formulation est souvent jugée trop technique, difficile à comprendre. Ces fiches n'ont pas encore été utilisées systématiquement. Leurs modalités d'exploitation seront à étudier et leur forme et leur contenu à revoir compte tenu de l'expérience de cette année.

Sur 21 maîtres, 4 seulement affirment ne pas avoir encore introduit de changements dans leur enseignement depuis qu'ils suivent la F.P.M. L'un de ces 4 précise : « J'ai surtout pris conscience de ce que je ne savais pas ».

Pour les autres, les changements apportés dans leur enseignement portent sur l'esprit, les méthodes (attitude de recherche de la part du maître et des élèves, plaisir et intérêt des élèves, climat nouveau de la classe, modification des relations avec les élèves, indépendance vis-à-vis des manuels) et sur le contenu (travail partant du concret pour aller à l'abstrait, attitude synthétique allant du particulier au général, goût des enfants pour les schématisations, les classifications, jeux, interdisciplinarité...).

Monique DUBOST, M. RAPEGNO.

Evariste Dupont

Le carnet d'exercices et de solutions

Une remarque pour commencer : la Rédaction annonçait dans le Cahier 10 que j'étais parti sans prévenir à la Jamaïque. C'est vrai et je ne suis pas certain que cette retraite au soleil m'ait permis de voir plus clair dans mon ouvrage. Des lettres de quelques lecteurs attentifs, mes propres lectures me conduisent à envisager, avant de donner une suite à *Apprentissage I*, un remaniement, en particulier pour toutes les questions qui touchent à la logique : cela reviendrait à transformer le chapitre 2 et à éliminer du chapitre 3 ce qui aurait été traité dans ce chapitre 2 rénové. D'avance merci aux lecteurs qui me donneraient leur avis à ce sujet.

En attendant, reprenons la correction d'exercices, en nous consacrant spécialement à ceux qui portent sur l'algèbre des ensembles.

Le carnet d'exercices.

[E. 44] Dans l'ensemble E des élèves de la classe, vous aviez déjà (exer. 36) réalisé des intersections de sous-ensembles. Vous faites réaliser maintenant des réunions. Deux difficultés pédagogiques : le mot réunion est souvent utilisé comme synonyme d'ensemble dans le langage courant (il faut désormais lui réserver le sens défini ci-dessus); la conjonction *ou* est d'un maniement plus délicat que *et*.

[E. 45] Réalisez des réunions et des inclusions reproduisant les situations présentées ci-dessus en formant des parties d'ensembles familiers, l'alphabet, les entiers naturels (de 1 à 100), etc.

[E. 46] E est l'ensemble des entiers de 1 à 100, X le sous-ensemble des multiples de 3, Y le sous-ensemble des multiples de 5; vous formez $X \cup Y$; vous faites une remarque pertinente sur $\overline{X \cup Y}$.

[E. 47] Dans le même ensemble E, S est le sous-ensemble des diviseurs de 72, J le sous-ensemble des diviseurs de 60. Vous formez $S \cup J$.

[E. 48] Vous reconnaissez sur la figure 18 chacun des sous-ensembles

$$X \cup Y,\ X \cup \overline{Y},\ \overline{X} \cup Y,\ \overline{X} \cup \overline{Y}$$

[E. 49] Sur une figure reproduisant la même situation que la figure 16 vous reconnaissez toutes les réunions du type

$$X \cup Y \cup \overline{Z}$$

et là encore, vous rapprochez vos résultats de ceux donnés par l'arbre des choix [3.2].

[E. 50] Dans l'ensemble E des entiers de 1 à 100 reprenez les sous-ensembles T des multiples de 3 et C des multiples de 5. Définissez $\overline{T}$, $\overline{C}$, $\overline{T} \cap \overline{C}$, $\overline{T} \cup \overline{C}$ et comparez ces deux derniers à $T \cup C$ et $T \cap C$ déjà obtenus dans [E. 38] et [E. 46].

[E. 51] Appliquez les formules [3.4.3.1] et [3.4.3.2] à $X \cap \overline{Y}$, $\overline{X} \cup Y$, $\overline{X} \cap Y \cap \overline{Z}$, $X \cup \overline{Y} \cup Z$, $\overline{X} \cap (Y \cup \overline{Z})$, $X \cup (\overline{Y} \cap Z)$.

[E. 52] On dit : « le lièvre est un animal craintif et délicieux ». Dans l'ensemble des animaux, analysez les situations qui résultent de la définition du sous-ensemble des craintifs et du sous-ensemble des délicieux. Où est le lièvre? Que dire des animaux qui ne cumulent pas, comme le lièvre, ces deux qualités?

[E. 53] Dans l'ensemble des humains on a défini les sous-ensembles des beaux, des intelligents et des modestes. Un certain *j* (mieux vaut lui conserver l'anonymat) est beau et modeste mais pas intelligent. Définir de plusieurs façons l'ensemble des humains qui ne sont pas comme *j*. Un autre individu *b* est certainement beau mais les témoignages disent seulement « il a certainement l'une des qualités : intelligence, modestie ». Définir encore de plusieurs façons l'ensemble des humains qui ne sont pas comme *b*.

[E. 54] Les règles opératoires trouvées vous permettent de transformer (c'est-à-dire écrire autrement mais fidèlement) toute formule ensembliste donnée. Exemple :

$$[X \cap (\overline{X} \cup Y)] \cup [Y \cap (Y \cup Z)] \cup Y.$$

Nous avons

$$X \cap (\overline{X} \cup Y) = (\overline{X} \cap X) \cup (X \cap Y)$$

grâce à la distributivité de l'intersection par rapport à la réunion; puis

$$X \cap \overline{X} = \phi \text{ et } \phi \cup (X \cap Y) = X \cap Y$$

donc

$$X \cap (\overline{X} \cup Y) = X \cap Y.$$

Nous avons aussi :

$$[Y \cap (Y \cup Z)] \cup Y = (Y \cup Y) \cap [(Y \cup Z) \cup Y]$$

grâce à la distributivité de la réunion par rapport à l'intersection et

$$Y \cup Y = Y; \; Y \cup Z \cup Y = Y \cup Z$$

d'où

$$(Y \cap Y \cup Z) \cup Y = Y \cap (Y \cup Z) = Y.$$

Par conséquent :

$$[X \cap (\overline{X} \cup Y)] \cup [Y \cap (Y \cup Z)] \cup Y = (X \cap Y) \cup Y = Y.$$

A chaque transformation, assurez-vous que vous observez bien le règlement! Faites-le vous-même, pour les exemples suivants :

$$X \cup (\overline{Y} \cap Z)$$
$$(X \cap \overline{Y}) \cup [\overline{X} \cap (Y \cup Z)]$$
$$(X \cap Y \cap Z) \cup \overline{X} \cup \overline{Y} \cup \overline{Z}$$
$$(\overline{X} \cap \overline{Y}) \cup [X \cup (\overline{X \cup Y})]$$

[E. 64] Ce qui surprend, ce qui doit surprendre, c'est la possibilité de définir $X - Y$ et $Y - X$. Vous proposez aux élèves : E = ensemble des entiers de 1 à 100; X = ensemble des multiples de 6; Y = ensemble des multiples de 10. Définir alors $X - Y$, puis $Y - X$. On observe bien : les éléments à supprimer du premier ensemble sont ceux de $X \cap Y$. Avec des enfants plus petits, vous formez des sous-ensembles d'élèves dans la classe.

[P.E. 65] Dans l'ensemble des élèves, réaliser la disjonction exclusive de ceux qui ont visité le Zoo et de ceux qui sont montés sur la Tour Eiffel. Vous pouvez varier les lieux de promenade.

[E. 66] Définissez $(X \Delta Y) \Delta Z$; vérifiez l'associativité.
Vérifiez

$$X \Delta Y \Delta Z \neq (X \cup Y \cup Z) - (X \cap Y \cap Z).$$

Faites un dessin.

Le carnet de solutions.

[E. 44 et 45] Ambiguïté du mot « réunion » : dans le langage courant, « une réunion de dix personnes » désigne *un ensemble* de dix personnes; dans le langage ensembliste, il ne peut y avoir réunion d'ensembles ou de sous-ensembles que dans un ensemble de référence donné. Autrement dit, dans toute situation mathématisée, nous n'utiliserons plus le mot « réunion » que dans son sens mathématique. Ce n'est pas la première ni la dernière fois que la langue usuelle et la langue mathématique ont des règles différentes; d'aucuns en sont contrariés; ils ont bien tort car à contraindre l'une par l'autre, aucune n'y gagnerait. Il faut courageusement admettre que l'humanité est polyglotte!

Pour l'emploi de la conjonction *et*, pas de difficulté trop grande : en mathématique, elle est réservée à l'expression de la conjonction logique, celle qui conjoint : « Paris est en France *et* au bord de la Seine », « le pelage de ce chat est gris *et* doux ». Pour l'emploi de la conjonction *ou*, il faut d'abord distinguer la disjonction normale (non exclusive), « si je prends un nom au hasard sur l'annuaire de téléphone, c'est un lecteur des *Chantiers* ou un amateur de Pop » (*), rien n'interdisant aux lecteurs des *Chantiers* d'affectionner la Pop-musique, et la disjonction exclusive, « si je tire au hasard un numéro de billet de loterie, il est pair ou impair », l'exclusion étant ici évidente. Méfions-nous aussi d'un usage courant énonçant les qualités des éléments d'un ensemble, par exemple : « cet ensemble comprend des carrés, des ronds, des pièces rouges et des pièces jaunes ». Les virgules semblent remplacer des *et* (en même temps qu'elles évitent des répétitions) mais si vous tirez une pièce de cet ensemble vous constaterez qu'elle est (un rond ou un carré) et qu'elle est (rouge ou jaune). Supériorité évidente du symbolisme ensembliste.

En tout cas, dans les exercices les plus simples pour introduire la notion de réunion, plaçons-nous dans un ensemble de référence bien connu, nous éviterons ainsi des ambiguïtés troublantes à ce niveau. L'ensemble des naturels de 1 à 100 est assez riche pour nous donner tous les exemples désirables.

(*) Bien entendu, énoncer cette phrase ne signifie pas que ce qu'elle affirme soit vrai ; il y a des personnes qui n'aiment pas le Pop et qui ne lisent pas les *Chantiers*. On retrouvera plus loin cette question.

[E. 46] $X = \{3, 6, 9, \ldots, 96, 99\}$; $Y = \{5, 10, 15, \ldots, 90, 95, 100\}$; $X \cup Y = \{3, 5, 6, 9, 10, \ldots, 90, 95, 96, 99, 100\}$, c'est l'ensemble des naturels de 1 à 100 qui sont multiples de 3 *ou* multiples de 5; *ou* non exclusif : $15 \in X \cup Y$. Son complémentaire, noté $\overline{X \cup Y}$, désigne, parmi ces naturels de 1 à 100, l'ensemble de ceux qui ne sont multiples ni de 3 ni de 5 ou, pour parler de façon plus lourde peut être : le sous-ensemble des naturels non multiples de 3 *et* non multiples de 5. Passage du *ou* au *et* en passant de $X \cup Y$ à $\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cap \overline{Y}$.

[E. 47]
$$S = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72\}$$
$$J = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}$$
$$S \cup J = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 30, 36, 60, 72\}$$

qui est l'ensemble des naturels diviseurs de 72 *ou* de 60, le *ou* n'étant pas exclusif :
$$1 \in S \cup J.$$

[E. 48] Pour simplifier la rédaction, je remarque que sur le diagramme de Venn, le contour des ensembles X et Y délimite quatre zones. Dans chacune, j'écris un nombre de deux chiffres : le premier chiffre est 1 ou 0 selon que les points de la zone figurent des éléments de X ou non, le deuxième chiffre est 1 ou 0 selon que les points de la zone figurent des éléments de Y ou non. Parmi les quatre zones, celle qui est marquée 11 désigne $X \cap Y$. La région qui figure $X \cup Y$ c'est toute la surface de E à l'exception de la zone marquée 00. [Dans cette représentation conventionnelle, les frontières des zones ne figurent aucun élément de l'ensemble, « personne n'habite sur les frontières ».]

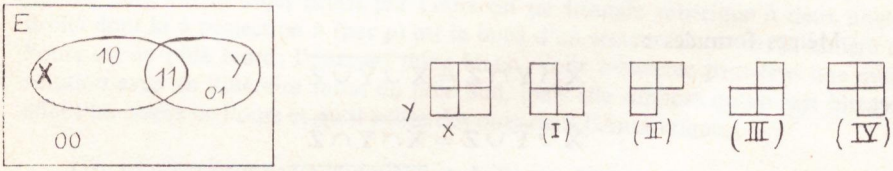


FIG. 1.

On remarquera ici les avantages du diagramme de Carroll comme étape dans l'apprentissage du codage. Apprentissage qui prépare aussi à celui du repérage dans le plan. En I, II, III et IV on a des représentations respectives de
$$X \cup Y,\ X \cup \overline{Y},\ \overline{X} \cup Y,\ \overline{X} \cup \overline{Y}.$$

[E. 49] Même principe de codage, ici, avec des nombres de trois chiffres, le dernier à droite étant 1 ou 0 selon que la zone est celle de points éléments de Z ou non. $X \cup Y \cup \overline{Z}$ est figurée par toute la zone E à la seule exception de celle qui est notée 001.

Mêmes avantages du diagramme de Carroll à trois ensembles (Z est le carré central). $X \cup Y \cup \overline{Z}$ est figuré par la totalité de la zone E à la seule exception du petit carré hachuré qui, notons-le en passant, figure $\overline{X} \cap \overline{Y} \cap Z$ (l'intersection des complémentaires...).

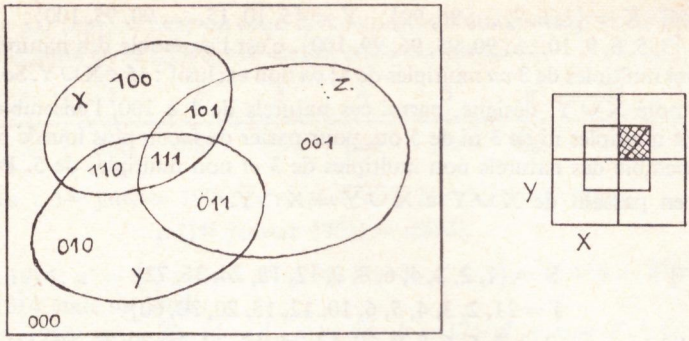


FIG. 2.

[E. 50] $\overline{T}$ est l'ensemble des naturels de 1 à 100 qui ne sont pas multiples de 3; $\overline{C}$ est l'ensemble des naturels de 1 à 100 qui ne sont pas multiples de 5. Pour abréger, ne répétons pas « de 1 à 100 ».

$\overline{T} \cap \overline{C}$ est l'ensemble des naturels ni multiples de 3 ni multiples de 5. C'est le complémentaire de $T \cup C$, ensemble des multiples de 3 *ou* de 5.

$\overline{T} \cup \overline{C}$ est l'ensemble des naturels non multiples de 3 ou non multiples de 5. C'est le complémentaire de $T \cap C$, ensemble des multiples de 3 *et* de 5.

[E. 51] Il s'agit d'appliquer les formules dites de De Morgan

$$\overline{X} \cap \overline{Y} = \overline{X \cup Y} \qquad \text{et} \qquad \overline{X} \cup \overline{Y} = \overline{X \cap Y}$$

On trouve

$$X \cap \overline{Y} = \overline{\overline{X} \cup Y} \qquad \text{et} \qquad \overline{X} \cup Y = \overline{X \cap \overline{Y}}$$

Mêmes formules :

$$\overline{X} \cap Y \cap \overline{Z} = \overline{X \cup \overline{Y} \cup Z}$$

et

$$X \cup \overline{Y} \cup Z = \overline{\overline{X} \cap Y \cap \overline{Z}}$$

$$\overline{X} \cap (Y \cup \overline{Z}) = \overline{X \cup (\overline{Y} \cap Z)}$$

$$X \cup (\overline{Y} \cap Z) = \overline{\overline{X} \cap (Y \cup \overline{Z})}.$$

[E. 52.53] Le lièvre est élément de l'intersection de l'ensemble des craintifs et de l'ensemble des délicieux.

j est beau et modeste mais pas intelligent (il n'est probablement pas seul). Le sous-ensemble complémentaire des humains qui sont comme *j* est celui des hommes qui ne sont pas beaux ou qui sont non-modestes ou qui sont intelligents, ces ou n'étant pas exclusifs; exemple : *k*, qui est laid, modeste et pas intelligent est élément de ce complémentaire (il ne voisine pas avec *j*) non plus que *m* qui est laid, modeste et intelligent.

[E. 54] Jeux de transformations :

$$X \cup (\overline{Y} \cap Z) = (X \cup \overline{Y}) \cap (X \cup Z)$$

par simple application de la distributivité de l'union par rapport à l'intersection. Vérifiez sur un diagramme de Carroll comme dans [E. 49].

$$(X \cap \overline{Y}) \cup [\overline{X} \cap (Y \cup Z)] = (X \cap \overline{Y}) \cup (\overline{X} \cap Y) \cup (\overline{X} \cap Z)$$

Pour transformer $(X \cap Y \cap Z) \cup \overline{X} \cup \overline{Y} \cup \overline{Z}$ on peut noter que $X \cap Y \cap Z$ et $\overline{X} \cup \overline{Y} \cup \overline{Z}$ sont complémentaires; leur réunion est donc la partie pleine E. (Le vérifier par des transformations détaillées.)

Dans $(\overline{X} \cap \overline{Y}) \cup [X \cup (\overline{X \cup Y})]$, les crochets sont inutiles puisque la réunion est associative; supprimons-les; la réunion étant aussi commutative, on pourra écrire $(\overline{X} \cap \overline{Y}) \cup X \cup (\overline{X \cup Y})$. On remarque alors que $\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cap \overline{Y}$, soit le résultat

$$(\overline{X} \cap \overline{Y}) \cup X \cup (\overline{X \cup Y}) = (\overline{X} \cap \overline{Y}) \cup X$$

et enfin

$$\begin{aligned}(\overline{X} \cap \overline{Y}) \cup X &= (\overline{X} \cup X) \cap (X \cup \overline{Y}) \\ &= E \cap (X \cup \overline{Y}) \\ &= X \cup \overline{Y}\end{aligned}$$

[E. 64] L'expérience pédagogique n'a pas fini de nous instruire. Quand j'ai écrit mon livre, il y a six ans déjà, j'avais hésité à employer le signe \ pour noter la différence dissymétrique de deux ensembles (symbole utilisé par les Russes et par Papy, entre autres). Puis il m'avait semblé qu'on pouvait faire l'économie de cette introduction. Aujourd'hui, je suis d'un avis opposé, justement parce que $X \backslash Y$ et $Y \backslash X$ peuvent être définis tous les deux alors que dans *IN*, $9 - 5$ a un sens et $5 - 9$ n'en a pas.

Ici $X \backslash Y$ est l'ensemble des multiples de 6 à l'exception des multiples de 10; $Y \backslash X$ est l'ensemble des multiples de 10 à l'exception des multiples de 6. Dans un cas comme dans l'autre, ceux qui font exception, sont les multiples de 6 et de 10, les éléments de $X \cap Y$.

Autre avantage de la différence dissymétrique, une notation simple du complémentaire d'un sous-ensemble F plongé dans un ensemble G :

$$\complement_G F = G \backslash F.$$

[E. 66] Écrire $a \in X \Delta Y$ signifie « a est élément soit de X soit de Y mais pas des deux »; écrire $a \in (X \Delta Y) \Delta Z$ signifie « a est élément soit de $(X \Delta Y)$ soit de Z mais pas des deux ». Conclusion, écrire $a \in (X \Delta Y) \Delta Z$ signifie que a est soit élément des trois soit élément d'un seul des trois. La symétrie du rôle des trois sous-ensembles apparaît et permet d'écrire

$$(X \Delta Y) \Delta Z = X \Delta Y \Delta Z$$

c'est-à-dire de vérifier l'associativité de l'opération Δ. Autre manière de le vérifier, calculer la table de la fonction caractéristique de $(X \Delta Y) \Delta Z$.

φX	φY	φZ	$\varphi X \Delta Y$	$\varphi (X \Delta Y) \Delta Z$
1	1	1	0	1
1	1	0	0	0
1	0	1	1	0
1	0	0	1	1
0	1	1	1	0
0	1	0	1	1
0	0	1	0	1
0	0	0	0	0

Sur deux diagrammes de Carroll (avec les conventions habituelles) nous figurons $X \Delta Y \Delta Z$ (I) et $(X \cup Y \cup Z) \backslash (X \cap Y \cap Z)$ (II).

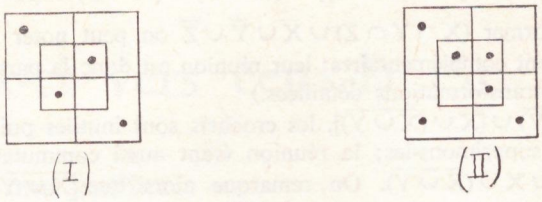


FIG. 3.

Je termine cette série de corrigés en citant, d'après mon ami Mountebank qui l'a exploitée dans un récent numéro de la *Quinzaine Littéraire*, la définition suivante. A chaque mot français, faisons correspondre l'ensemble des lettres qui y figurent; exemple, au mot « lunette » correspond l'ensemble $\{e, l, n, t, u\}$, au mot « brouette », l'ensemble $\{b, e, o, r, t, u\}$; alors $\{e, l, n, t, u\} \Delta \{b, e, o, r, t, u\} = \{b, l, n, o, r\}$; le nombre des éléments du dernier ensemble obtenu est appelé la distance des mots « lunette » et « brouette »; on écrit d(lunette, brouette) $= 5$.

Mountebank pose alors la devinette : trouvez tous les mots dont la distance à « sel » est nulle (ou bien égale à 1, à 2, ...). En passant notez que l'usage du mot *distance* est autorisé ici puisque, si α, β, γ sont trois mots quelconques, vous vérifierez $d(\alpha, \alpha) = 0$, $d(\alpha, \beta) = d(\beta, \alpha)$ et $d(\alpha, \gamma) \leqslant d(\alpha, \beta) + d(\beta, \gamma)$.

Lectures actuelles ou inactuelles

« ... comme après la construction d'une voûte ... ».

« Prenons l'idée de *fonction continue*. Ce n'est d'abord qu'une image sensible, un trait tracé à la craie sur le tableau noir. Peu à peu elle s'épure; on s'en sert pour construire un système compliqué d'inégalités, qui reproduit toutes les lignes de l'image primitive; quand tout a été terminé, on a *décintré*, comme après la construction d'une voûte; cette représentation grossière, appui désormais inutile, a disparu et il n'est resté que l'édifice lui-même, irréprochable aux yeux du logicien. Et pourtant, si le professeur ne rappelait l'image primitive, s'il ne rétablissait momentanément le *cintre*, comment l'élève devinerait-il par quel caprice toutes ces inégalités se sont échafaudées de cette façon les unes sur les autres? La définition serait logiquement correcte, mais elle ne lui montrerait pas la réalité véritable.

Nous voilà donc obligés de revenir en arrière; sans doute il est dur pour un maître d'enseigner ce qui ne le satisfait pas entièrement; mais la satisfaction du maître n'est pas l'unique objet de l'enseignement; on doit d'abord se préoccuper de ce qu'est l'esprit de l'élève et de ce qu'on veut qu'il devienne. »

Henri POINCARÉ
(« Les définitions mathématiques et l'enseignement » dans *Science et Méthode*, p. 134).

L'enfant et le mathématicien.

« ... On peut, indépendamment de la nature des ensembles de base, construire des « structures » en dégageant des propriétés communes grâce aux opérations effectuées sur ces ensembles et ces structures peuvent alors être comparées entre elles au moyen de théories qui seront univalentes s'il y a isomorphisme (telles la géométrie euclidienne et la théorie des nombres réels), sinon multivalentes (groupes et topologie). Les mathématiques entières peuvent donc se traduire en termes de construction de structures et une telle construction demeure indéfiniment ouverte. Le signe le plus éloquent de cette sorte de dégel, qui a marqué l'extension extraordinaire des mathématiques récentes, est le nouveau sens qu'a pris le terme d' « êtres » mathématiques : cessant de constituer des sortes d'objets idéaux donnés une fois pour toutes en nous ou au dehors, donc cessant de présenter un sens ontologique, ils changent sans cesse de fonction en changeant de niveau, une opération portant sur de tels « êtres » devenant à son tour objet de la théorie, et ainsi de suite jusqu'aux structures alternativement structurantes ou structurées par des structures plus fortes; tout peut donc devenir un « être », selon l'étage...

... Malgré l'irrévérence qu'il peut sembler y avoir à comparer un mathématicien et un enfant, il est difficile de nier qu'il existe quelque parenté entre cette continuelle construction intentionnelle et réfléchie d'opérations sur des opérations et les premières synthèses ou coordinations inconscientes permettant la construction des nombres ou des mesures, des additions ou multiplications, des proportions, etc. Le nombre entier lui-même, en tant que synthèse des classes et de l'ordre sérial peut déjà être considéré comme le résultat de l'une de ces opérations effectuée sur d'autres; il en est de même de la mesure (partition et déplacement). La multiplication est une addition d'additions, les proportions des équivalences appliquées à deux rapports multiplicatifs, la distributivité une suite de proportions, etc. Mais même avant la constitution des premiers êtres mathématiques, le processus de l'abstraction réfléchissante, dont les exemples précédents représentent des formes déjà évoluées, est constamment à l'œuvre dans la formation même des notions et opérations de départ : or, elle consiste toujours à introduire de nouvelles coordinations sur ce qui est tiré des formes antérieures, ce qui est déjà une manière d'opérations sur des opérations. »

Jean PIAGET
(« *L'épistémologie génétique*, p. 88).

Le Coût de l'éducation.

Dans chaque numéro, des *Cahiers Pédagogiques*, la quatrième page de couverture est occupée par un « billet du mois » qui met en valeur un sujet d'actualité. Le meilleur de ces textes est sans doute celui du numéro 90 (avril 1970) que nous reproduisons intégralement :

« Dans le monde, la dépense annuelle moyenne par soldat est de 7 800 dollars. La dépense annuelle moyenne par enfant, au titre de l'éducation, est de 100 dollars.

Au Japon, les dépenses pour l'éducation publique sont plus de quatre fois plus élevées que les dépenses militaires. Au Canada, deux fois. Autres pays développés qui dépensent plus pour l'éducation publique que pour les armements : Belgique, Danemark, Italie, Pays-Bas, Norvège, Suède, Suisse. »

Source de ces informations : *Courrier de l'Unesco*, janvier 1970, p. 14.

Jeux d'enfants.

Sous le titre *Mathématiques et jeux d'enfants*, notre Collègue Nicole Picard publie un livre de poche (Casterman éditeur) d'une formule originale. Le but poursuivi est d'informer un très large public (parmi lequel il y a celui des parents des élèves de l'école primaire) sur la réforme de l'enseignement mathématique qui va peu à peu se développer. Mais au lieu d'en rester au stade des principes et des idées générales, Nicole Picard a pensé que la méthode active, bonne pour les enfants, ne pouvait pas être mauvaise pour des adultes. Aussi, de la page 23 à la page 106 présente-t-elle des situations familières, l'observation de ce qui les fait se ressembler ou différer conduisant à des exemples de structures : groupes d'ordre 4, corps $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, groupe des symétries et rotations du carré, strcture simplifiée de la circulation dans les rues voisines de la Place de l'Étoile. Ces excellents exemples donnent envie au lecteur d'en savoir plus; une information élémentaire sur ensembles, relations et structures complète ce livre de 188 pages. Autre originalité remarquable : plusieurs tables de groupes sont imprimées en couleurs, la couleur étant bien employée comme un moyen d'expression supplémentaire.

Dans la tâche immense qui consiste à bien informer le public des réalités de la réforme, le livre de Nicole Picard devrait jouer un rôle essentiel. Mieux que par des discours, il fait comprendre qu'au delà des questions de vocabulaire, de programme et même de méthodes pédagogiques, c'est le rôle de la mathématique dans une éducation libératrice qui se précise. Il dépend de nous tous que ce rôle soit bien joué.

Dans la même collection (Casterman/poche), nos collègues C. Corne et F. Robineau publient *Les Mathématiques nouvelles dans notre vie quotidienne*, 158 pages également consacrées à présenter les idées, nouvelles pour un très vaste public, que la mathématique fait germer dans toute situation aussi banale soit-elle. Logique, ensembles, relations et structures sont présentées de façon plus systématique que dans le livre précédent; les auteurs ont, c'est évident, plus de mal à présenter un sujet mathématique sans le formalisme qui, pour eux initiés, en simplifie l'expression, alors que pour un non initié, il n'est pas sûr que ce formalisme soit une aide. En tout cas, le style est alerte et il faut saluer la multiplication de tels livres.

L'informatique et nous.

Sous le titre *Informatique à l'usage des éducateurs* (P.U.F.), Daniel Pham, professeur à l'Université de Caen où il dirige le centre de calcul, de statistique et d'économétrie donne, en 144 pages, un moyen « d'entrouvir les portes de ce monument qu'est l'informatique » pour reprendre une de ses expressions. En un si petit volume, il ne pouvait être question d'initier complètement et l'auteur a réussi dans la mesure où son ouvrage donne le désir au lecteur d'en savoir plus.

Mais, commençons, inhabituellement, par le reproche qu'on peut lui faire. S'il est très complet sur les algèbres de Boole (complet au point de vue de la compréhension des principes de l'informatique) et sur les bases du calcul automatique, sa description des langages reste trop générale et sa rédaction n'est pas exempte d'une technicité fort compréhensible pour les initiés mais qui l'est certainement beaucoup moins pour les autres à qui le livre est destiné. Enfin, pour ceux-ci, on aurait souhaité quelques indications bibliographiques pour qu'ils poursuivent leur initiation.

Il faut donc prendre ce petit livre pour ce qu'il est et veut être : une introduction. Le monument de l'informatique est en construction; il est donc inévitable qu'un spécialiste ne puisse en parler sans hésiter à prendre parti devant nous. Il nous prévient honnêtement qu'il y a plusieurs techniques, plusieurs langages et il faut reconnaître que cette inévitable variété complique la vision d'ensemble que le néophyte voudrait tout de suite avoir.

Dans le détail des notations, je signale que D. Pham note N l'anneau des entiers que nous (A.P.M.E.P.) avons choisi de noter toujours $\mathbb{Z}$ comme beaucoup d'autres (et Bourbaki en particulier). Ailleurs, au lieu de donner la table d'addition et de multiplication modulo 8 sous la forme de tableaux à double entrée, il nous donne la liste de toutes les égalités. Autre détail, que je trouve plus heureux, l'usage du terme *opérande* pour désigner les termes d'une opération (comme on dit « multiplicande ») et qui peut très bien s'associer avec opérateur.

J'attendais D. Pham avec curiosité dans son chapitre de conclusion : « l'ordinateur et l'enseignement » et je suis un peu déçu. L'absence de quelques réserves me gênent un peu : si, pour préparer un exposé, on peut imaginer qu'un jour l'ordinateur mettra rapidement à la portée de l'élève une abondante documentation, il faut dès maintenant affirmer que cette documentation devra être complète, je veux dire non systématiquement orientée, triée; nous avons, sous les yeux, trop d'exemples pénibles. De même, sur l'enseignement programmé, je ne crois pas qu'on explique bien la différence de Skinner à Crowder par une comparaison avec les diverses méthodes de lecture [il est à noter que les allusions à la « méthode globale », quelle que soit la personne qui en parle, tombent presque toujours à côté].

Ces remarques ne changent rien à l'intérêt que j'ai pris à ce livre dans lequel on sent que l'auteur a voulu informer et par là agir heureusement sur notre société.

Il faut rapprocher du livre précédent, non pour l'opposer, la traduction de l'anglais : « *Nous construisons nos propres ordinateurs* » qui fut réalisé par un groupe d'élèves d'Exeter (édition en français par O.C.D.L., la traduction ayant été réalisée par un groupe d'élèves de Montmorillon). Ouvrage beaucoup plus élémentaire qui a le rare mérite de proposer des exercices réalisables par des élèves de Seconde ou plus âgés : une preuve que si on propose à ceux-ci autre chose que du rabâchage hors de saison, ils peuvent faire beaucoup. Ceci ne s'inscrit dans aucun programme au sens des instructions officielles de l'Éducation Nationale. Mais il n'y a peut-être pas meilleur sujet pour une activité libre et créatrice donc vraiment formatrice.

G.E.P. - math.

Dans le *Cahier* 9, nous avons déjà cité le bulletin de liaison du *Groupe d'Étude et de Pédagogie en mathématique*. Son n° 2, daté premier trimestre 1970 contient : la grande panique par Michel Thebault (sur la réforme au niveau de l'école élémentaire et pour montrer la volonté du groupe de conjurer la dite panique); les réflexions d'un groupe d'instituteurs de Cours Moyen sur l'introduction des nombres à virgule par repérage d'un point sur une demi-droite (article très intéressant signé S. Lechat et A. M. Ronco); quelques remarques de D. Robin sur le travail en groupe.

Le G.E.P. Math, tout en travaillant en liaison avec l'A.P.M.E.P. est partisan d'une action indépendante. Ce qui invite tous les lecteurs qui veulent soutenir son effort à prendre contact avec son responsable : Michel Thebaut, 59, rue Raymond-Losserand, Paris-14e. Toute contribution matérielle sera également bien accueillie.

L'épistémologie génétique.

Jean Piaget vient de publier, sous le petit format d'un « Que sais-je? » (P.U.F.) un volume qui lui permet d'insister sur l'idée suivante : la connaissance ne peut être conçue comme prédéterminée, elle est construite. Les lecteurs de nos *Cahiers* sont préparés à la lecture des ouvrages de Piaget par les articles de Sauvy.

Au sommaire de celui que nous signalons : 1. La psychogenèse des connaissances; 2. Les conditions organiques préalables (biogenèse des connaissances); 3. Retour aux problèmes épistémologiques classiques. C'est dans cette troisième partie, après avoir traité de la logique et avant de traiter de la physique que Piaget s'occupe de la mathématique; j'ai cité, plus haut, l'une de ces pages. C'est dire l'intérêt de ce petit livre et situer, en même temps, la difficulté de sa lecture : pour réduire l'exposé aux 128 pages fatidiques l'Auteur a été contraint à bien des raccourcis; il n'est pas sûr que, dans ce domaine comme beaucoup d'autres, le chemin des écoliers (si j'ose dire) ne soit pas, en fin de compte, plus rapide.

Cependant, lecture recommandée : elle invite à en lire plus et la précieuse bibliographie finale en dit long sur la portée des travaux de l'école de Piaget.

Je me permets de rapprocher du précédent un nouveau livre de Z. P. Dienes « *Les six étapes du processus d'apprentissage en mathématique* » (70 p., O.C.D.L.). Pour Dienes, ces six étapes sont : 1. Les jeux libres; 2. Les jeux structurés; 3. La reconnaissance des similitudes de structures; 4. La représentation (graphique ou autre) d'une structure commune; 5. L'étude des propriétés de la structure au moyen d'un langage bien adapté; 6. Le développement axiomatique d'une théorie. L'auteur illustre sa méthode par trois exemples : notions de logique, de géométrie, d'algèbre (sur la relation d'ordre). Pour qui connaît déjà les travaux de Dienes, c'est un complément utile; pour qui ne le connaîtrait pas encore, une introduction imagée à ses idées.

Encyclopédie et mathématique.

Quelle doit-être la place de la mathématique dans une encyclopédie de notre temps? Certainement importante. J'ai voulu en avoir une première idée « statistique » d'après les six premiers tomes, aujourd'hui parus, de l'*Encyclopaedia Universalis*, éditée par le Club Français du Livre. Tant par le nombre des rubriques que la qualité de leur rédaction et la qualification des rédacteurs, l'entreprise promet beaucoup et elle a déjà tenu beaucoup de ses promesses. Jean Dieudonné est le responsable général de la partie mathématique; il est secondé par J.-L. Verley, auteur de nombreux articles. Dieudonné lui-même a écrit les articles sur l'analyse mathématique moderne, sur Cauchy et sur Dirichlet. En choisissant de traiter historiquement de quelques mathématiciens dont l'œuvre marque une étape dans l'histoire de la pensée on complète les articles traitant de grands sujets mathématiques.

Se rattachant à la première catégorie, j'ai déjà cité Cauchy et Dirichlet par J. Dieudonné; Alexandrie et Apollonius, Archimède, Euclide, Eudoxe, Euler et Fermat, par notre ami Jean Itard; Abel, d'Alembert, Artin, Cantor par Verley; Élie Cartan par Libermann; Borel par M. Fréchet; Bourbaki par Martineau; Cayley par Novy; Carroll (par Gattegno); etc. On remarquera l'absence de Boole (qui sera sans doute cité à l'article sur la logique).

Parmi les principaux articles mathématiques, citons : algèbre, anneaux, axio-

matique (par Glaeser), calcul infinitésimal (par Taton, Godement et Glaeser), catégories et foncteurs (par Benabou); combinatoire (par Foata), coniques (par Warusfel), corps (par Gergondey), équations aux dérivées partielles et distributions (par Krée), équations diophantiennes et divisibilité (par David), équations algébriques (par J. Itard), ensembles (par Roumanet et J.-L. Verley).

Malgré le haut niveau de ces rédactions, le style en a été soigneusement revu et les articles sont donc aussi lisibles qu'il est possible dans ce genre d'ouvrage. La typographie parfaite (je n'ai trouvée qu'une malencontreuse faute à l'orthographe de Bertrand Russell, deux l, dans l'article « ensembles »). Quand on veut bien se représenter quel travail de coordination est exigé par un tel ouvrage, il faut en saluer les auteurs avec reconnaissance.

P. S. — Depuis la rédaction de cette note, le tome VII a paru. On y trouve en particulier les articles sur les fonctions analytiques, l'approximation des fonctions, les géométries, les graphes ; quant aux savants, Frege, Frobenius, Galois, Galilée, Gauss (ces deux derniers par P. Costabel et J. Dieudonné).

Institutrice de village.

Bien que le livre qui porte ce titre (édité au Mercure de France) ne concerne pas l'enseignement mathématique, je crois que nous avons tous intérêt à lire le témoignage écrit par Huguette Bastide sur ses débuts récents dans des écoles rurales du département de la Lozère. Ce n'est pas de l'histoire ancienne : le récit commence en 1962, s'achève en 1969. On a le droit d'imaginer qu'en 1970, rien n'est fondamentalement changé.

Aussi instructif que soit, pour le citadin que je suis, la description de l'habitat de l'instituteur de village ou les difficultés de la classe unique (j'entends un bon camarade se récrier que lui, c'est ce qu'il préfère), je retiens surtout l'effet démoralisant de l'isolement. Comment se fait-il que n'y pensent plus ceux qui, comme nous, avons l'avantage de pouvoir discuter, au jour le jour, entre camarades, de notre travail?

Je terminais la lecture du livre de Huguette Bastide quand j'ai lu sur le journal que : « le collectif budgétaire n'a pas permis d'augmenter le nombre des élèves recrutés dans les Écoles Normales après le baccalauréat »; ce qui signifie qu'on recrutera encore des « remplaçants » à qui on confiera des classes sans les y avoir préparés. Je ne connais pas ces personnes qui se groupent sous le nom de « collectif budgétaire » mais il est trop évident qu'elles ignorent tout du travail des remplaçants ou qu'elles s'en moquent (et je crains que ce ou ne soit pas exclusif). Ne soyez pas comme elles, lisez le livre de H. Bastide : mieux qu'un bon livre, une action réfléchie.

G. W.

---

parmi nos lettres

En maintes occasions, nous avons exprimé le souhait que cette rubrique de la correspondance soit abondante. Par-dessus le marché, ce souhait était sincère. Nous étions tous conscients d'un péril : à trop proclamer que nous espérions des critiques, nous en aurions de sévères. A vrai dire, ce n'était pas, à nos yeux, un péril mais une chance : c'est seulement dans le climat d'une critique tout à fait libre que nous pouvons progresser.

D'autant plus que nous l'avons toujours dit, il n'existe pas d'oracle pédagogique; en tout cas, pas parmi nous qui faisons ... ce que nous pouvons. En voici une preuve éclatante : parmi nos lettres, voici d'abord celle de l'ami J.-C. CHEVALLIER contestant la rédaction ... de sa note sur la $\mathbb{Z}$-balance! Ce n'est étrange qu'en apparence car la rédaction des *Cahiers* s'était permis des modifications sur le manuscrit original. Ainsi est-elle prise « la main dans le sac ».

Sur la Z-balance.

Je ne suis pas d'accord avec le texte de la $\mathbb{Z}$-balance tel qu'il est publié dans le « Cahier » n° 10. Je sais bien que les adaptations mutuelles du texte au dessin — par téléphone — n'ont pas clarifié la chose, mais quand même... je me suis fait bien mal comprendre; la prochaine fois j'écrirai en anglais à Mountebank qui retraduira.

Bien sûr la théorie des moments reste à la base de la forme actuelle, mais pédagogiquement la « règle des signes » n'apparaît plus nettement, ni la différence fondamentale de $\mathbb{Z}^+$ et $\mathbb{Z}^-$ du point de vue multiplicatif. La forme initiale comportait un petit bras transverse au fléau: une unité de longueur de part et d'autre vers le milieu du bras inférieur du fléau; alors les surcharges accrochées à ce bras donnent la valeur absolue du produit, le côté (droit ou gauche) en donne le signe. Ce n'était sûrement pas génial, mais tout le monde ne peut pas s'appeler Archimède (et d'ailleurs le monde est bien assez soulevé comme ça).

Pour s'en tirer sans trop de déshonneur, la Rédaction demande aux lecteurs de proposer leurs dispositifs; dessins clairs à l'encre de chine pouvant être reproduits S.V.P.!

A propos du test par 7.

Ce petit exercice d'arithmétique (voir *Cahier* 10, p. 125) nous a valu deux lettres intéressantes. Tout d'abord P. Jacob (lycée d'Antony) nous signale une regrettable faute de calcul (p. 126). Pour calculer le reste de la division par 7 du nombre 847 972 438 509 738, il avait bien été indiqué que le chiffre 9 des mille devait être multiplié par 6 mais le résultat de cette multiplication est 54 (et non 15) congru à 5 (mod 7). Le nombre proposé est donc congru à 3 comme on le vérifie en faisant la division. Mes excuses aux lecteurs et mes remerciements à notre Collègue Jacob qui ajoute le schéma suivant d'une petite leçon à ses élèves de Cinquième :

« Théorème : *le reste de la division d'un naturel par* n *ne change pas lorsqu'on lui ajoute ou retranche un multiple de* n.

Corollaire (caractère de divisibilité passe-partout : un naturel est divisible par n *si, après lui avoir retranché ou exceptionnellement ajouté des multiples de* n *on peut trouver zéro.*

D'autre part, il se trouve que $1\,001 = 7 \times 11 \times 13$; on peut donc traiter simultanément la recherche du reste de la division d'un grand nombre par 7, 11 ou 13. Exemple pour le naturel 847 672 138 509 738 avec soustractions préliminaires de multiples de 1 001.

```
  847 672 138 509 738
— 846 846
———————————————————
      826 138
    — 825 825
    ———————————
          313 509
        — 313 313
        ———————————
                196 738
                196 738
                ———————
                    542
```

Division par 7 :

```
    542
  —  42
  ———————
    500
  — 490
  ———————
     10
  —  7
  ———————
le reste est ...  3
```

Division par 11 :

```
    542
  — 440
  ———————
    102
  —  99
  ———————
le reste est .....  3
```

Division par 13 :

```
    542
  — 520
  ———————
     22
  — 13
  ———————
le reste est ....  9
```

P. J. »

Par ailleurs, les congruences étant définies dans $\mathbb{Z}$, notre Collègue André Fouché (lycée Janson de Sailly) fait observer :

« *Les multiplicateurs 6, 4, 5 sont congrus à —1, —3 et —2 respectivement, modulo 7 ; si bien qu'au lieu d'avoir à retenir la suite des six multiplicateurs 1, 3, 2, 6, 4, 5, il suffit de retenir les trois premiers et la suite 1, 3, 2, —1, —3, —2, 1, 3, 2, —1, ...* A. F. »

Conclusion (provisoire) très banale : les sujets les plus anciens méritent toujours d'être repris. Le calcul proposé par notre Collègue Jacob n'est pas, dans son principe, différent de celui que rappelait Itard à la page 123 du Cahier 10 et qui donnait lieu à la disposition suivante :

```
  15 683
— 14
———————
   1 683
—  1 4
———————
     283
  — 28
  ———————
       3
```

Sur la réforme.

De façon malheureusement indirecte, nous avons eu connaissance de réactions défavorables à l'éditorial du *Cahier* 10 où nous prenions position à propos de l'assemblée générale de l'A.P.M.E.P. à Clermont et des élections au Comité National. Bien évidemment, nous ne retirons rien de ce que nous avons écrit; nous pensons toujours avoir usé du droit d'exprimer notre avis alors que nous assumons la charge de l'édition de ces *Cahiers*. Cela ne signifie pas que nous refusons d'entendre les avis ou les critiques des opposants. Sans vouloir prolonger indéfiniment des polémiques, il nous paraît salutaire que toutes les opinions s'expriment et nous sommes donc prêts à publier des réponses à cet éditorial. Les élections 70 sont passées mais le sujet débattu n'est pas épuisé. Nous non plus d'ailleurs et il faut bien ajouter que la raison d'être de ces *Cahiers*, c'est justement la réforme. Ce qui ne signifie pas que ses adversaires n'aient rien à nous apprendre.

Le bloc-notes de la Régionale où nous réunissons des échos variés sur l'actualité pédagogique et sur les activités propres de notre Régionale.

L'assemblée de la régionale.

Elle a eu lieu le jeudi 30 avril 1970 à 14 h 30, à l'Institut Henri Poincaré devant une assistance de 250 personnes environ. Le rapport d'activité a été présenté par M. Hameau, secrétaire. La principale activité de la Régionale a été, comme auparavant, l'organisation et l'animation de nombreux chantiers de pédagogie mathématique (plus de 20); des conférences générales n'ont pu être organisées qu'après janvier : le 19 février, M. Boulanger, *Mathématique et initiation aux techniques de gestion;* le 26 février, M. Bouzitat, *Introduction à la théorie des jeux;* le 5 mars, M. Gentilhomme, *La mathématique à travers la linguistique;* le 18 mars, M. Gréco, *Aspects psychologiques du premier apprentissage mathématique.*

En juin 1969 puis en septembre 1969, la Régionale a organisé des journées d'études pour la réforme au niveau de l'école élémentaire. Le succès de ces réunions justifie le projet de nouvelles journées en juin 1970 (voir plus loin).

La publication des Cahiers des *Chantiers de Pédagogie Mathématique* en 1968-69 a connu un tel succès que la réunion des Cahiers 1 à 6 en un volume « Initiation à la mathématique de base » a permis l'information de nombreux collègues. L'édition 1969-70, tout en connaissant un moindre succès, assure ses frais et permet de prolonger l'action pédagogique entreprise : il est utile pour tous les maîtres de disposer de nombreuses tribunes pour exposer *librement leurs idées.*

M. Blanzin, trésorier, a présenté le bilan financier de la Régionale pour la période du 15 novembre 1968 au 15 avril 1970. Le voici :

Dépenses

Initiation à la mathématique de base (Cahiers 1 à 6 et réédition; 25 000 ex)	98 980,04
Chantiers de Pédagogie Mathématique (Cahiers 7, 8, 9; 10 000 ex.)....	18 663,92
Frais de secrétariat	10 123,19
Frais de trésorerie	601,42
Journées de Sèvres (1969)	5 508,90
Matériel audio-visuel	1 521,53
Total des dépenses	135 399,00

Recettes

Versements de l'A.P.M.E.P. à la Régionale	5 504
Vente de 24 251 Initiation, 5 644 Chantiers (69-70).....	262 598
Total des recettes	268 102

Solde au 15 avril 1970

Chèques postaux	31 258
Compte Crédit Lyonnais	1 445
Placement au Crédit Lyonnais	100 000
Total	132 703

L'aspect favorable de nos finances doit être cependant corrigé par les observations suivantes : 1° les recettes des Chantiers 69-70 doivent payer les numéros 10, 11, 12; 2° un arriéré de frais d'expédition viendra effectuer une grosse ponction sur notre capital. Celui-ci, fruit de notre effort collectif, nous permet cependant d'envisager l'avenir avec confiance.

Les brefs échanges, à la suite des rapports précédents, montrent l'accord général des membres de l'A.P.M.E.P. pour l'action de la Régionale (ou les mécontents sont absents). Il est convenu que le cycle des conférences générales commencera dès novembre 1970, que les équipes des Chantiers seront multipliées (pour soutenir la « première étape » de la réforme à l'école élémentaire). La principale difficulté est toujours de trouver des animateurs. La preuve en est faite avec le renouvellement (sic) du Comité de la Régionale au sein duquel est élu le bureau de la Régionale.

Comité de la Régionale.

Mlle ADDA (Supérieur); M. BASSECOULARD (I.D.E.N.); M. BLANZIN (C.E.G.); M. BOULADE (E.N.); M. COLMEZ (I.R.E.M.); M. ESTGEN (1er degré); Mme GARNIER (C.E.G.); M. HAMEAU (1er degré); M. JULIAN (C.E.G.); M. LAURENT (Secondaire); M. LEBOULLEUX (Secondaire, Spéciales); Mlle LOPATA (Secondaire); M. MATHEZ (C.E.G.); M. PELLIEUX (C.E.G.); M. REVUZ (I.R.E.M.); Mme ROBERT (Secondaire); M. ROUQUAIROL (Secondaire); Mme SALIN (Secondaire); M. SAMUEL (Supérieur); M. VETTICOZ (C.E.G.); M. VISSIO (Secondaire); M. WALUSINSKI (Secondaire).

Bureau de la Régionale.

Président : M. Gilbert WALUSINSKI, 26, Bérengère, 92 - Saint-Cloud (Tél. 603-69-09).

Secrétaire : M. Claude HAMEAU, 38, avenue du Général-de-Gaulle, 94 - Vincennes (Tél. 808-43-79).

Secrétaires adjoints : M. JULIAN, 7, place Paul-Éluard, 94 - Villejuif (organisation des chantiers).

M. VETTICOZ, 5, boulevard Henri-Poincaré, 95 - Sarcelles (liaison avec les délégués d'établissement).

Mlle LOPATA, 31, rue de Coulanges, 94 - Sucy-en-Brie (Tél. 925-62-58).

M. ROUQUAIROL, lycée de Meaux (organisation des mini-régionales).

Mme GARNIER, 39, avenue de Seine, 92 - Rueil-Malmaison.

Trésorier : M. André BLANZIN, 150, avenue Félix-Faure, Paris-15e (Tél. 250-16-41).

Trésorier adjoint : M. PELLIEUX, 36, avenue de Clamart, 92 - Issy-les-Moulineaux.

Pour tous versements, à la Régionale,
utilisez le compte courant postal au nom de
Régionale Parisienne de l'A.P.M.E.P. — Cc Paris 25 108 63

Le langage des approximations.

Sous ce titre, G. — Th. Guilbaud, directeur d'études à l'École Pratique des Hautes Études, nous a donné, à la suite de l'assemblée générale, une conférence captivante : comment faire comprendre simplement qu'à partir des premières idées sur la limite d'une suite, sur la continuité des fonctions, puisse se dégager la notion de *filtre*, découverte par Henri Cartan en 1937? Résumer l'exposé si vivant de notre ami est impossible. Mais il nous a confié des notes et nous espérons mettre au point un texte que nous lui soumettrons pour le publier afin que tous nos lecteurs en profitent. Modèle d'exposé, pour le fond et pour la forme.

Sur l'assemblée de Clermont.

Comme le savent les membres de l'A.P.M.E.P. par le *Bulletin*, l'assemblée générale de Clermont a connu un très grand succès : plus de 300 participants. Les élections pour le renouvellement partiel du Comité national ont été l'occasion de confronter deux orientations vis-à-vis de la réforme : que l'A.P.M.E.P. poursuive son action pour être la locomotive de la réforme ou bien qu'elle marque le pas (et attende que l'initiative vienne de l'administration). Nous avons dit (Cahier 10) notre préférence pour une locomotive sous pression (sachant que le train est lourd à remuer). Tel fut l'avis de la majorité et nous nous en réjouissons.

Le nouveau Bureau national est présidé par notre collègue Colmez, maître-assistant à l'I.R.E.M. de Paris. Il est entouré par une équipe de collègues dont le caractère évident est la jeunesse et l'ardeur. Nous leur souhaitons bon courage avec confiance.

Nos journées d'études.

Fixées aux 11, 12, 13 juin, elles devaient avoir lieu à Sèvres. Le Centre International d'Études Pédagogiques ayant été, en dernière heure, empêché de nous recevoir, nous avons eu la chance d'être accueillis avec beaucoup d'obligeance, les 11 et 12 au Foyer des Lycéennes et le 13 à l'École Normale d'Auteuil; cadres particulièrement propices à nos travaux et nous devons de grands remerciements aux chefs de ces établissements pour leur accueil sympathique. Mention spéciale à notre ami Nicolas qui s'est chargé de toute l'organisation à l'École Normale, y compris celle d'un banquet qui clôtura les journées de façon particulièrement euphorique.

Les journées avaient commencé de façon plus sérieuse mais non moins plaisante par une remarquable conférence de M. J.-B. Grize, de l'Université de Neuchâtel sur « Mathématique et genèse de l'intelligence ». M. Grize a bien voulu rédiger un texte que nous publierons en tête de notre *Cahier* 13 afin que tous nos lecteurs en profitent. A la suite de cet exposé et des échanges qui le suivirent, les quelque 120 participants (nous en attendions la moitié) se répartirent en 7 ou 8 équipes pour étudier telle ou telle partie de ce qui sera la première étape de la réforme. Une série de documents ont ainsi été élaborés, comme à Sèvres en 1969; la Rédaction des *Cahiers* y puisera pour ses prochains numéros.

Ne terminons pas ce bref compte rendu de nos journées sans quelques remarques. Soulignons d'abord l'atmosphère cordiale et sérieuse; telle est la bonne condition du travail d'équipe indispensable à la réalisation de la réforme. Le mélange de séances générales et de travaux en petites équipes est sans doute difficile à bien doser (ne pas abuser des premières, savoir animer les secondes); c'est pourtant une façon de faire qui semble efficace. Une séance de projection de films a également eu lieu le 12; peut-être aurait-il mieux valu la faire le 11 pour en tirer des leçons ensuite. Les participants ont été plus nombreux que prévu, principalement originaires de l'académie de Paris bien entendu; remercions cependant les quelques collègues venus de plus loin, Bordeaux et Toulouse par exemple; une délégation de Collègues Florentins honora même nos séances du 13 juin. Peut-être faut-il en tirer cette conclusion qu'à l'avenir il serait spécialement intéressant d'avoir la participation de Collègues d'autres pays.

Enfin, n'oublions pas de rappeler que si l'administration rectorale nous a donné toutes les autorisations indispensables pour l'organisation de ces journées, c'est la Régionale Parisienne de l'A.P.M.E,P. qui en a assumé toute la responsabilité, y compris sur le plan financier.

A la suite de ces journées, le communiqué suivant a été adressé à plusieurs journaux (qui ne l'ont pas reproduit) :

Pour étudier la mise en application, à partir de la rentrée 70, de la première étape *d'une réforme de l'enseignement mathématique qui doit s'étendre et se prolonger durant les années à venir, 120 éducateurs, enseignant pour la plupart à l'École Primaire, se sont réunis les 11, 12 et 13 juin 1970 à l'appel de la Régionale Parisienne de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public (A.P.M.E.P.).*

Les travaux de ce séminaire qui seront publiés dans les cahiers des Chantiers de Pédagogie Mathématique, montrent quel champ de travail fructueux cette réforme ouvre aux éducateurs justement convaincus du caractère indispensable de l'évolution des méthodes et du contenu de l'enseignement, de son climat et de ses perspectives.

Les participants à ces trois journées ont aussi vérifié combien le travail des maîtres

en équipe, avec la mise en commun des expériences diverses et des réflexions parfois opposées qu'il permet, était profitable à tous.

Ils souhaitent que l'A.P.M.E.P. poursuive son action pour l'information du public et pour la formation permanente des maîtres en attendant que les Instituts de Recherche sur l'Enseignement Mathématique (*I.R.E.M.*) *soient créés en nombre suffisant par l'Éducation Nationale et avec les moyens qui leur permettent d'assurer ce service d'intérêt national qui comporte la formation permanente des maîtres et la recherche pédagogique, toutes deux également indispensables au progrès continu de l'enseignement. Ils déplorent que, pour l'heure, l'Éducation Nationale n'ait pas fait tout ce qui était de son devoir à ce sujet.*

Aussi appellent-ils tous les citoyens qui veulent être renseignés sur la réforme de l'enseignement mathématique et tous les maîtres qui désirent être associés au travail en commun pour la réaliser à prendre contact avec les équipes de la Régionale Parisienne de l'A.P.M.E.P.

L'actualité pédagogique.

Nous groupons ici informations ou remarques relatives aux perspectives pédagogiques de la rentrée 70.

Recrutement des maîtres. On a remarqué qu'aux concours 1970 des agrégations de mathématiques 64 places sont restées vacantes (34 femmes, 30 hommes). Le grand nombre des candidats aurait très probablement permis de recevoir 64 agrégés de plus sans autre inconvénient que de rétribuer mieux des professeurs assurant à moindres frais pour le budget un service d'enseignement.

Le nombre des élèves recrutés dans les Écoles Normales après le baccalauréat n'augmente pas.

Le ministère a claironné qu'il avait obtenu des finances la création de 8 000 postes supplémentaires. Or, il en avait demandé 26 000.

La réduction des effectifs des classes « de la Maternelle à l'Université », le recrutement et la formation sérieuse des maîtres sont les conditions premières d'une véritable réforme de notre enseignement. Comme souvent, sous des prétextes financiers qui n'ont pas de fondement (voir le prix des « expériences » de Mururoa), le Ministère sabote les réformes.

Réductions d'horaire. La preuve de ce que nous venons de dire : la réduction des horaires de français en Cinquième, de mathématique en Quatrième sous le mauvais prétexte que des accroissements d'horaire avaient lieu dans d'autres classes. L'Association Française des Professeurs de Français a justement dénoncé cette mesure alors qu'une commission ministérielle entreprend la réforme de l'enseignement du français. D'autre part, ces mesures de réduction ont été improvisées le 23 juillet alors que les prévisions pour la rentrée 70 étaient faites depuis longtemps.

Nous recommandons à tous nos Collègues qui enseignent en Quatrième de réclamer à la rentrée 70 les quatre heures prévues (dont une de travail dirigé pouvant être dédoublée si l'effectif de la classe dépasse 24 élèves). La réalisation de ce vœu est réglementairement possible. Tenez le Bureau de la Régionale informé des difficultés que vous pourriez rencontrer.

L'I.R.E.M. A notre connaissance, il n'a pas reçu de moyens spéciaux, particulièrement en personnel, pour s'occuper comme il le faudrait de la réforme dans l'enseignement élémentaire. Affaire à suivre.

La rentrée. La circulaire du 1er-6-70 qui prévoit la rentrée le 10 septembre pour les maîtres et le 14 pour les élèves est le type des réalisations que l'Éducation Nationale affectionne : une preuve de ses bonnes intentions, une dépense supplémentaire nulle et l'appel répété à l'initiative et à la bonne volonté des maîtres. Reconnaissons que l'idée est bonne; nous ferons (ou nous aurons fait) de notre mieux pour en tirer profit en particulier pour constituer des équipes de travail.

Tous les postes seront-ils pourvus? Il est permis d'en douter. Cependant notre ministre a annoncé : « la rentrée sera réussie à 99,5 % ». Ce qui m'a fait me poser la question : « pour cent de quoi?». Comme le disait fort justement G.-Th. Guilbaud dans son émission sur les pourcentages (dans la série R.T.S.-Promotion) : « Quand on vous parle de pourcentages, c'est qu'on ne vous dit pas tout. Je n'irai pas jusqu'à insinuer qu'on vous cache quelque chose... mais je dis... qu'il vaut mieux se demander si c'est le moment d'ignorer. »

Nous sommes les mieux placés pour savoir ce qui va (99,5 %) et ce qui ne va pas (0,5 %). Tenir le Bureau de la Régionale informé et, chacun de son côté, savoir que l'avenir de la réforme repose essentiellement sur nos épaules.

R.T.S.

Rappelons les émissions consacrées à la F.P.M. :

— *Atelier de pédagogie*, pour les maîtres des enseignements pré-élémentaire et élémentaire. *Radio*, le lundi de 17 h 30 à 18 h à partir du 28 septembre ou le mercredi de 17 h 30 à 18 h à partir du 30 septembre. *Télévision*, le lundi de 17 h 30 à 18 h à partir du 28 septembre, le mercredi de 17 h à 18 h à partir du 30 septembre, le jeudi de 9 h 30 à 11 h 30 à partir du 1er octobre, le vendredi de 17 h 30 à 18 h à partir du 2 octobre. Activités mathématiques, communication et apprentissage de la langue, approche des problèmes posés par l'éducation physique et les activités d'éveil.

— *Études pédagogiques*, pour le premier cycle du second degré. *Radio*, le mardi de 16 h 30 à 17 h à partir du 29 septembre. *Télévision*, le vendredi de 16 h 30 à 17 h à partir du 2 octobre. Conduite de la classe, connaissance de l'élève et de la classe, information générale.

— *Technologie*, pour le premier cycle du second degré. *Télévision*, émission bi-mensuelle, le vendredi de 17 h à 17 h 30 à partir du 2 octobre.

— *Chantiers mathématiques*, premier cycle. *Télévision* (2e chaîne) le mardi de 17 h 30 à 18 h à partir du 29 septembre. Premier trimestre : arithmétique (I et II); cartes perforées; appliquons la règle du jeu; problème ouvert; mathématisation d'une situation; entiers relatifs; un débat en classe; formules et significations.

— *Chantiers mathématiques*, deuxième cycle. *Télévision* (2e chaîne) le jeudi de 17 h 30 à 18 h à partir du 1er octobre. Premier trimestre : dix émissions sur les angles.

Nous nous contentons de signaler d'autres séries également susceptibles d'intéresser des Collègues :

— *Français. Radio* le mardi de 17 h à 17 h 30 à partir du 29 septembre. *Télévision*, le jeudi de 14 h à 14 h 30 à partir du 1er octobre.

— *Information biologique. Télévision* le jeudi de 14 h 33 à 15 h 03 à partir du 1er octobre.

— *Philosophie. Radio*, le mercredi de 17 h à 17 h 30 à partir du 16 décembre.

— *Sciences physiques. Télévision*, le jeudi de 14 h 03 à 14 h 33 à partir du 19 novembre. Sur l'enseignement de la mécanique.

Rappelons enfin à nos lecteurs que leur établissement a dû recevoir, sous le titre, « Dossiers pédagogiques de la radio-télévision scolaire » une brochure orange donnant le détail de toutes les émissions de la R.T.S. (pour les élèves et pour la F.P.M.).

Attirons l'attention spécialement vers la série *Mathématiques pour tous*, télévision (1re chaîne), le samedi de 14 h à 14 h 30, dans le cadre *R.T.S.-promotion*. Trois émissions de présentation d'une heure les 12, 19 et 26 septembre.

Les conférences de la régionale.

Au programme du premier trimestre :

Jeudi 22 octobre, Mme Zofia KRYGOWSKA, professeur à l'Ecole Normale Supérieure de Cracovie : « La réforme de l'enseignement mathématique dans l'école élémentaire en Pologne ».

Jeudi 19 novembre, M. J.-C. PECKER, professeur au Collège de France : « Poussières dans l'Univers » (un des problèmes très actuels en astrophysique).

Jeudi 26 novembre, M. HERZ, ingénieur conseiller scientifique à IBM-France : « Introduction à la théorie des automates ».

Jeudi 10 décembre, M. LENTIN, professeur à l'Université, Paris (Ve), UER de mathématiques, logique formelle et informatique : « Automates et langages formels ».

Toutes ces conférences ont lieu à 14 h 30, à l'amphi Hermite de l'Institut Poincaré, à l'exception de celle de M. Pecker, à 14 h 30, à l'Institut d'Astrophysique, 98 *bis*, boulevard Arago, Paris (XIVe) (métro Denfert).

Ces cahiers.

Il reste, pour clore ces bribes ou si vous aimez mieux ces échos, à dire un mot du passé et de l'avenir de ces *Cahiers*.

La réunion en volume des Cahiers 1 à 6 pour donner l'*Initiation à la mathémathique de base* s'imposait; la preuve : le volume est toujours demandé. Il ne peut en être de même pour les Cahiers 7 à 12 de 1969-70 traitant des sujets divers (dont certains d'actualité). Quels sont les articles parus qui pourraient constituer les noyaux de petites brochures utiles? Nous en discuterons mais les décisions seraient plus faciles à prendre si de nombreux lecteurs nous donnaient leur avis.

La série 1970-71, des Cahiers 13 à 18, s'ouvrira en octobre avec la publication de la conférence de Jean-Blaise Grize, « Mathématique et genèse de l'intelligence ». Nous y joindrons des documents établis lors des journées de juin. Tout au long de l'année, nous voulons suivre d'aussi près que possible la réalisation de la réforme. C'est dire que nous voulons nous faire l'écho des questions que les maîtres se posent et se poseront pour tenter, *ensemble*, d'y répondre.

Ce qui conduit à vous demander le double service suivant :

1° Remplir la feuille jaune encartée dans ce *Cahier* 11-12; tout lecteur comprend que plus les contributions financières seront nombreuses, plus seront grands les moyens dont nous disposerons pour l'aider dans ses tâches de la réforme.

2° Adresser toute observation, critique ou contribution à la rédaction de ces *Cahiers* à Gilbert Walusinski, 26, Bérengère, 92 - Saint-Cloud (Tél. 603-69-09).

Le bribeur.

Supplément au Bulletin de l'A.P.M.E.P. n° 274 - Juin-Juillet 1970

Printed in France *Le Directeur de la publication:* G. WALUSINSKI

FD - Imp. Alençonnaise, B.P. 57. 61-Alençon - Dépôt légal 1970 : 9.208 - C.P.P.P 35.996