chantiers de pédagogie mathématique

Bulletin bimestriel de la Régionale Parisienne – Janvier 1971 – CAHIER Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

14

Les freins

Après un certain « dégel pédagogique » et la mise en application d'amorces de réformes, nous constatons, dans tous les secteurs de notre école, une volonté de retour en arrière. Comment cela se fait-il? Quelle doit être notre réaction?

Un administrateur de l'Éducation Nationale, grand amateur de paraboles, aurait dit: « Dans une auto, il y a trois organes essentiels, le moteur, la direction et le frein; dans notre voiture de l'enseignement, je suis le frein! ». L'histoire se raconte, probablement inventée mais significative: combien de personnes, dans des fonctions qui devraient en faire des animateurs, se réfugient dans une « prudence » qui fait courir à notre ensei-

gnement les plus grands dangers!

Des réformes ont pourtant été amorcées. En Sixième, il y a eu, en septembre 1969, un bon départ pour la réforme de l'enseignement mathématique. Des Instituts de Recherche sur l'Enseignement Mathématique (I.R.E.M.) ont été créés et, tout en prolongeant ses travaux dans le trop exclusif domaine des laborieuses discussions sur les programmes, la commission ministérielle dite Commission Lichnerowicz peut considérer qu'elle a bien rempli une partie au moins de sa mission; en préparant l'Arrêté du 2 janvier 1970 (déjà un an!) sur la première étape de la réforme au niveau élémentaire, elle a affirmé le caractère nécessaire et irréversible de cette évolution de l'enseignement. On a préconisé enfin de commencer par le commencement.

Pas seulement en mathématique. Dans l'enseignement du français, un effort semblable était entrepris. Des expériences conduites depuis des années étaient prises sérieusement en considération. Les avantages d'une évolution concertée apparaissant enfin, des commissions de réforme se mettaient ou allaient se mettre au travail pour les sciences

physiques ou naturelles.

C'était trop de bouleversements en perspective pour les tenants de l'immobilisme. Une bruyante campagne de presse conduite par un académicien du type le plus conservateur trouvait un appui dans les postes les plus élevés de ce qu'on appelle maintenant le pouvoir (on disait jadis la République). Ces personnes n'ayant aucune compétence sur les problèmes de l'enseignement ni même aucun contact avec lui, ont osé prétendre que les réformateurs, dans leur enseignement, ne voulaient plus faire appel « à la logique, à la réflexion et à la mémoire ». Nos Collègues de l'Association Française des Professeurs de Français (A.F.P.F.) ont été accusés de « préparer une révolution culturelle, prélude à une subversion généralisée ».

Ces outrances feraient sourire si, de façon plus hypocrite et plus subtilement efficace, l'Éducation Nationale n'en profitait pas pour réduire le soutien déjà fort limité qu'elle accordait aux expériences préparatoires à toute réforme sérieuse. Depuis deux ans, systématiquement, le champ des expérimentations est réduit, la publicité de leurs résultats restreinte. Voyez la façon désastreuse dont les nouveaux programmes de Quatrième ont été établis sans tenir compte des avis des expérimentateurs. Alors que la formation permanente des maîtres a montré son efficience, en particulier pour la réalisation de la réforme dans les académies pourvues d'I.R.E.M., le développement de ces instituts (qui sont le nerf de la réforme) est ralenti; en 1971, deux nouveaux I.R.E.M. seulement seront créés, au lieu de trois ou quatre les années précédentes (rythme dont nous déplo-

rions déjà la lenteur) et alors que les I.R.E.M. qui existent n'ont toujours pas les moyens, ni en personnels, ni en crédits, de participer, comme il est dans leur mission de le faire,

à la réforme au niveau primaire.

Comment expliquer cette tendance anti-réformiste? N'y voir, chez ses tenants, qu'un certain aveuglement ne peut constituer une explication suffisante. Nos adversaires savent, en général, que l'évolution de l'enseignement mathématique dans son contenue et dans ses méthodes est une nécessité. Mais toute réforme coûte cher et les restrictions de crédits sont un bon prétexte pour retarder l'inévitable. Car ce retard que nous déplorons, d'autres s'en réjouissent. Sans aller jusqu'à nous accuser de fomenter « la subversion généralisée », certaines autorités de l'Éducation Nationale ont compris que les I.R.E.M., s'ils sont les noyaux d'instituts de recherche sur tous les domaines de l'enseignement, ont vocation pour devenir les centres académiques vitaux de l'école. Par la formation permanente, les maîtres prendront peu à peu conscience que leur métier est celui de chercheurs en pédagogie, qu'ils sont les mieux placés pour comprendre les besoins de l'école et qu'ils doivent donc, au sein d'Instituts de Recherche Pédagogique nécessairement pluri-disciplinaires, en devenir les véritables gestionnaires.

Les prétendus animateurs qui sont en réalité des freins sentent, avec raison je crois, que la réforme de l'enseignement les privera de l'autorité qu'ils détiennent encore. Il ne faut donc pas s'étonner de leur résistance ni s'exagérer son importance. Car cette « autorité » des freins ne peut se traduire que par des manifestations de retardement. Le vrai pouvoir, en ce qui concerne la réforme de l'enseignement, est aux mains de ceux qui enseignent. La réforme sera ce que nous la ferons dans nos classes.

C'est pourquoi l'action de notre association est toute tracée. Suivre attentivement les décisions administratives et dénoncer chaque fois que c'est utile leurs insuffisances ou le malin soutien que les conservateurs de tout poil apportent aux champions de freinage. Applaudir aussi aux initiatives heureuses, n'en excluons pas la possibilité, faisons de notre mieux pour obtenir des conditions de travail plus favorables à la réalisation de nos tâches. Mais sachons toujours et surtout que, pour l'essentiel, pour faire que la réforme soit une chose bien vivante, critique d'elle-même et riche autant de promesses que de réalisations, c'est sur nous-mêmes que nous devons compter. Ces cahiers des Chantiers de Pédagogie Mathématique veulent être le témoignage pratique de notre effort collectif.

En 1912, Albert Thierry écrivait: « Si le Travail est vraiment ce qu'il y a de plus grand dans le monde (et vous n'en savez rien du tout, pas plus que moi: mais comme moi vous le croyez, et votre action n'importe que dans cette foi), si cela est, l'Éducation ne révolutionnera pas le Travail, c'est le Travail qui révolutionnera l'Éducation » (Réflexions sur l'Éducation, p. 14). Les « freins » n'y peuvent rien; notre travail réfor-

mera l'école.

Gilbert WALUSINSKI.

Sommaire du cahier 14,

- 35 MICHEL BINEAU : De l'enseignement mathématique dans le cycle primaire aux États-Unis.
- 40 La réforme en actes :

- Marchand de sable et ensemble des parties.

Modulations, par J.-M. CHEVALLIER.

- Activités préparatoires à la résolution d'équations, par Boulade, Hameau et Laurent.
 Comment naît l'esprit mathématique dans ma classe, par J.-J. Dumora.
- 50 Jean Sauvy : Enseignement mathématique et psychologie de l'enfant.
- 55 K. MIZAR : Ce 25 février 1971.
- 57 Parmi nos lettres: à M. Gauthier, de M^{me} Teulan, de M^{me} Papazian, de M. Le Goupil.

De l'enseignement mathématique dans le cycle primaire aux États-Unis

A New York, l'été.

Le D^r Rosskopf, directeur du département d'éducation mathématique à Teachers College, Columbia University, avait invité l'été dernier Z. Dienes et G. Matthews à y exposer leurs conceptions de l'éducation mathématique dans l'enseignement primaire au cours de deux sessions successives d'une semaine. L'auteur de cet article, en visite dans les parages à la même époque, doit à l'amabilité du D^r Rosskopf et de Mrs Herman, organisatrice de la session, d'y avoir participé.

Il n'est pas nécessaire de présenter Z. DIENES dans ces pages; ses publications ont fait largement connaître ses travaux. Quant à G. MATTHEWS, il dirige en Angleterre un programme de rénovation de la pédagogie mathématique connu sous le nom de "Nuffield Project". Ce programme, initié en 1964, semble être un facteur d'animation efficace pour les écoles du Royaume-Uni. Il a produit une série de publications attrayantes et riches d'idées.

Dienes et Matthews.

Étrange introduction à l'éducation mathématique aux États-Unis que le nom de ces deux hommes venus d'ailleurs; mais le fil des événements, fruit du hasard, la provoque. En outre, les recherches de Dienes et du projet Nuffield s'imposent à l'attention et émergent d'une quantité d'autres par leur cohérence et leur originalité de sorte qu'elles ont une valeur de référence. L'amour du paradoxe suggère d'opposer l'ambition de DIENES d'amener l'enfant, par la reconnaissance de structures, à la pensée abstraite et à la méthode axiomatique des mathématiques, à l'absence d'ambition du projet Nuffield dans son effort d'utiliser au mieux l'environnement pour introduire l'enfant à la connaissance d'une mathématique en laquelle les oppositions entre ancienne et nouvelle, classique et axiomatique, sont estompées, L'opposition est certes abusive car l'influence mutuelle est évidente et les opinions communes nombreuses, d'ailleurs partagées par les programmes spécifiquement américains dont nous parlerons plus loin. Même si la démarche de DIENES suscite une certaine réserve, il est clair que nombre de ses idées s'infiltrent partout. Le procédé pédagogique des deux hommes est semblable dans leurs sessions. Ils alternent exposés, films et activités avec des enfants. Mais tandis que DIENES démontre devant les participants

comment lui-même et son équipe mènent l'activité d'un groupe d'enfants, MATTHEWS amène les participants eux-mêmes au rôle de pédagogues sur des thèmes qu'il a suggérés. Pour lui l'éducation se développe en spirale ou, vue autrement, se tisse en une toile d'araignée de concepts dont les fils importent autant que les nœuds. Des activités scolaires créatives et imitatives développent et élargissent le langage qui s'étoffe au cours d'expériences préconceptuelles. Volume, poids et balance, longueur et surface, forme et dimension, nombre, mesure du temps sont les composants de relations que l'on traduit par l'expression mathématique et au moyen de représentations diverses, que l'on analyse au moyen des structures arithmétiques, par la reconnaissance des formes et le calcul des dimensions. L'enchaînement des expériences vers le nombre et les opérations commence au niveau préscolaire dans les expériences avec les matériaux, dans les premières expériences sur l'espace, la forme et la dimension, la capacité de contenir, d'emboîter, de construire et dans l'expression vocale des nombres. Vient ensuite la notion de relation que l'enfant perçoit déjà lorsqu'il voit que certaines choses vont ensemble. Son intuition s'affirme dans les premières expériences de rangement suivies peu à peu de classifications plus complexes. La correspondance terme à terme construit le concept de nombre, concept reconnu comme cet invariant particulier du discontinu qu'il désigne. Le nombre, propriété d'une classe d'ensembles, jouit d'une propriété de ces classes. De même que certains jeux de boîtes, certaines classes d'ensembles peuvent être ordonnées par inclusion et il en résulte un ordre pour les nombres. Arrêtons ici l'examen de cette progression familière en reconnaissant l'universalité du projet. Et certes, tous les programmes de recherche en pédagogie mathématique se fondent sur la question que G. Matthews place à la base du projet Nuffield « que faut-il enseigner comment? »

Ouestions.

Comment nos collègues américains accueillent-ils les messages de DIENES et MATHEWS? La rénovation de la pédagogie mathématique est-elle très en avance aux États-Unis et dans quelle direction s'oriente-t-elle?

La rencontre des participants à cette session fournit une occasion de voir ces questions à travers des personnes directement concernées plutôt que d'en chercher la réponse dans les textes d'un des projets présentés succinctement plus loin. Qui sont les participants à la session? Environ vingt-cinq en nombre, ce sont, en fractions égales, des maîtres et des animateurs pédagogiques. La plupart habitent la région de New-York, cependant certains viennent de loin.

La réponse à la première question traduit les impressions des participants. DIENES fascine mais sa pédagogie semble parfois hort d'atteinte. N'a-t-il pas parlé à cette occasion de « corps de Galois ». Son style est en outre imprégné d'une attitude expérimentale. La fin et les moyens seront perpétuellement remis en question (mais peut-il en être autrement? Le refus de saisir la nature de cette incertitude est une cause d'incompréhension entre les maîtres et le réformateur, il peut entraîner le refus de tout changement). Le caractère extrême de certains exercices ne doit cependant pas masquer les thèmes essentiels qu'il a développés, les multibases, les relations, la logique, et qui sont universellement acceptés. Pour les participants l'enseignement de DIENES sera plus une information qu'un guide. A sa technique de pédagogie

structurée s'oppose l'apparence naturelle, attentive à l'enfant, de MATTHEWS. Le message de celui-ci est d'une efficacité directe.

Notre seconde question est ambitieuse. La réponse, subjective, sera de valeur limitée. Pour la préparer, quelques remarques relatives à l'organisation de l'enseignement sont nécessaires.

Le système scolaire aux Etats-Unis.

L'éducation scolaire aux États-Unis est traditionnellement plus libérale qu'en France. Moins exigeante à l'égard des enfants au point de vue des horaires et des programmes, l'éducation accorde une place importante aux sports. L'apprentissage de la liberté, thème pédagogique actuel, peut se trouver favorisé par des facteurs extrascolaires. Ainsi la recherche d'une pédagogie active se place dans un contexte différent du contexte français, elle se trouve moins urgente en quelque sorte.

La structure même du système a l'avantage d'une souplesse qui rendra l'évolution plus aisée. La séparation traditionnelle entre l'école primaire et l'école secondaire n'est pas systématique. La transition se fait dans une tranche intermédiaire qui réunit l'équivalent de nos Cours moyens et de la Sixième. Par suite de cette situation la réforme de l'enseignement des mathématiques introduite en premier lieu dans les classes secondaires trouve son prolongement naturel vers les Cours moyens. A ces niveaux le problème posé consiste moins à élaguer un enseignement surchargé qu'à structurer et fortifier des programmes faibles en mathématiques.

Un autre facteur favorable à l'évolution est d'ordre administratif. Les écoles sont sous l'autorité et la responsabilité des communautés locales qu'elles servent. Il y a ainsi environ 35 000 districts scolaires autonomes. Les autorités locales ont en principe plein pouvoir sur le recrutement du personnel, le niveau des salaires et la définition des programmes. Remarquons incidemment que le prestige de la profession d'enseignant n'est probablement pas plus brillant aux États-Unis qu'en France. Cependant le niveau des rémunérations est notablement plus élevé, approximativement double pour sa borne inférieure; la gamme des rémunérations possibles varie elle-même du simple au double dans l'enseignement primaire. Aujourd'hui de nombreux districts scolaires emploient un consultant ou conseiller en pédagogie mathématique. Un district peut également choisir de s'affilier à un des projets de pédagogie mathématique dont il recevra diverses formes d'aide.

Depuis plusieurs années de nombreuses sources de financement ont alimenté des groupes de recherche en pédagogie mathématique formés au sein d'universités. Il est intéressant de considérer le fonctionnement et l'évolution de tels groupes. Un groupe se forme sur la base de contrats à durée limitée avec un ou plusieurs bailleurs de fonds. Après une période de recherche et d'expérimentation le groupe arrive normalement à une phase d'exploitation dans laquelle il produit des documents, guides et matériels divers. Cette phase est alors suivie de commercialisation et du relais du financement initial par un financement commercial. Les projets mentionnés ci-après sont déjà plus ou moins engagés dans cette phase commerciale.

Projets américains et leurs productions.

Une large variété de projets s'offre au choix de chaque district scolaire, voire de chaque école, pour mettre au point son enseignement des mathématiques. La relation avec un projet va de la simple fourniture de documentation et de matériel

pédagogique jusqu'à l'affiliation. Parmi ces projets mentionnons le "Madison Project", le "School mathematics study group" (S.M.S.G.), "Minnemast" et "Math workshop for children". Du point de vue de l'utilisateur on peut d'ailleurs ajouter à cette liste le "Nuffield Project" anglais et les productions de DIENES bien que les services qu'ils offrent soient probablement moins directement disponibles.

Un tel projet fournit à ses utilisateurs une documentation complète et suivie, livres de classe, fiches, livres du maître et matériel pédagogique ainsi qu'une aide à la formation et l'information des enseignants. — Vu de l'extérieur il n'est pas aisé de les différencier. — En effet, leur objectif dans leur réalisation commerciale actuelle n'est pas de susciter une révolution complète des techniques et de l'objet de l'apprentissage scolaire mais, acceptant dans leur ensemble les thèmes des programmes scolaires actuels, ils visent à en améliorer la pédagogie. La mise au point des textes nouveaux procède de considérations semblables dans les différents cas. Il y a tout d'abord un glissement vers les classes inférieures de sujets traditionnellement introduits selon une répartition analogue à celle des programmes français. Dans l'élaboration d'un texte nouveau le contenu et la méthode de l'enseignement ne peuvent plus être séparés. On parle souvent d'apprentissage par la découverte bien que cette notion reste encore difficile à définir. Cependant l'apprentissage d'un concept mathématique passe en général par trois étapes : l'exploration non structurée, la découverte de propriétés ("pattern" est le mot magique qui désigne toute organisation que l'on peut reconnaître), enfin le stade formel où la preuve se construit au moyen d'axiomes et de règles.

1º Le "Madison Project" se nomme lui-même un des projets de mathématiques nouvelles (the Madison Project, Syracuse University, Syracuse N.Y. 13 210). Son centre est situé à l'université de Syracuse et au "Webster College" (Saint Louis, Mo) qui sert de centre expérimental. Selon ce projet, la situation actuelle rend inévitable la variété, l'incertitude, l'expérimentation et la remise en cause continuelle des idées acquises. Aussi convient-il d'assurer une évolution sans heurts. C'est pourquoi le "Madison Project" propose une méthode de transformation progressive. Les informations recueillies à son sujet laissent penser qu'il ne s'est pas attaché à des recherches pédagogiques originales mais plutôt à intégrer en un ensemble complet les productions d'autres projets. Pour le niveau secondaire, il s'appuie en particulier sur l'U.I.C.S.M. (University of Illinois Committee on School mathematics) et sur le S.M.S.G. présenté plus loin. Pour le niveau primaire, il s'est appuyé sur l'"University of Illinois Arithmetic Project" et plus récemment, semble-t-il, sur le projet Nuffield. Il couvre maintenant les mathématiques depuis le jardin d'enfants jusqu'aux classes secondaires comprises et a atteint une phase de développement commercial. Il offre des écoles d'été, des services permanents répartis géographiquement, des films, des livres et une revue.

2º S.M.S.G.: Il s'agit d'un groupe de recherche formé à l'université de Stanford, Californie, en 1958 et dont le contrat doit s'achever dans deux ans. Le processus de commercialisation est déjà très avancé. (Les documents sont édités par A.-C. VROMAN, Inc. 2085 E. Foothill Blvd, Pasadena, California 91109). L'éditeur propose une gamme complète d'ouvrages scolaires depuis le jardin d'enfants jusqu'à l'université, une sélection de monographies pour éveiller l'intérêt sur des domaines particuliers des mathématiques, divers documents sur la pédagogie des mathématiques, des textes destinés à la formation des enseignants et un journal.

3º Minnemast: Le "Minnesota mathematics and Science teaching project" est un programme à long terme qui se propose de coordonner la mathématique et la science et de déterminer ce que les enfants peuvent apprendre. Son directeur, Dr J. Werntz, est professeur de physique. Le projet est financé par la National Science Foundation. Pour les classes élémentaires le travail est centré sur deux structures mathématiques: le système des nombres réels et la géométrie de l'espace. La mesure est un lien entre science et mathématique. Si l'ambition de ce programme ainsi présenté peut paraître banale, il est toutefois considéré avec faveur pour la qualité de sa production.

4º Math Workshop for children: Ce projet, dirigé par le Pr Sawyer, Department of Mathematics, Wesleyan University, Middletown, Connecticut, est commercialisé par Encyclopedia Britannica Films, Inc. Il proclame ouvertement son absence d'ambition en annonçant qu'il ne contient ni mathématique nouvelle, ni théorie nouvelle de l'éducation mais que son but est de fournir aux enseignants le meilleur outil de travail possible en rassemblant dans un ensemble unifié ce qui est généralement accepté du point de vue mathématique et pédagogique. Les sujets couverts sont donc ceux de l'arithmétique, des mesures et de la géométrie mais l'accent est toujours mis sur les structures rencontrées aussi bien dans les propriétés des nombres que dans les activités que nous appelons habituellement « problèmes ».

Il est certain que le niveau de l'éducation scolaire aux États-Unis va, d'un lieu à l'autre, de l'indigence à la richesse, qu'il y a conflit permanent entre les tendances de divergence et d'uniformisation, entre les causes de stagnation et de progrès. Une éducation, image fidèle de notre époque, c'est-à-dire traductrice des formes de pensée, d'action, de vie qui en imprègnent les consciences, sera sujette à la loi nouvelle du mouvement, contradiction de l'équilibre que pourtant elle désire légitimement. Les facteurs de fluidité, le libre exercice des forces latentes qui cherchent à traduire les acquisitions en langage pédagogique seront les conditions nécessaires de sa réussite.

Bonne année.

La Rédaction des Cahiers souhaite à tous les lecteurs une très bonne et heureuse année $3^7 - 3^5 + 3^3$!

Nos publications.

Deux nouvelles brochures de l'APMEP vont sortir des presses en janvier : nº 4 : Les angles, par J. Frenkel; nº 5 : Éléments de logique pour servir à l'enseignement mathématique, par J. Adda et A. Faivre.

Quant aux cahiers des *Chantiers*, après avoir reproduit la conférence de J.-B. GRIZE (Suisse), ils publient cette fois un article sur la réforme aux USA et nous pensons publier dans le Cahier 15 la conférence de M^{me} Krygowska sur la réforme en Pologne.

Écrivez-nous vos suggestions, vos critiques. Faites abonner vos amis.

La réforme en actes

N.D.L.R. — L'idée de cette rubrique — anthologie expérimentale réalisée par ceux qui enseignent aux divers niveaux de l'enseignement scolaire — a été bien accueillie. Ses lecteurs ne doivent cependant pas rester au stade du critique enthousiaste ou mécontent; ils doivent prendre la plume et nous dire leurs réalisations ou leurs difficultés.

N'oublions pas que nous sommes tous solidaires. Celui qui enseigne en Sixième ne se contentera pas de lire les « modulations » de Chevallier mais aussi la note sur « le marchand de sable ». A qui opère au Cours préparatoire, les perspectives ouvertes à ses élèves doivent être connues.

Tous solidaires: nous en profitons tout de suite; l'article de M. Dumora est repris avec son autorisation et celle de nos amis de l'I.C.E.M. — pédagogie Freinet du nº 1 de L'Éducateur. Occasion pour nous de saluer ces camarades fidèles à l'exemple de Freinet: alors que les conservateurs pédagogiques tentent d'ultimes résistances, il est indispensable que les réformateurs de toutes orientations se tendent la main.

Marchand de sable et ensemble des parties

Voici un jeu très facile à réaliser qui participe à l'élaboration de la notion d'ensemble des parties d'un ensemble.

Le matériel: une plaque de carton sur laquelle a été collée une feuille de papier blanc figure un récepteur de télévision et son écran; une bande de carton agrafée aux deux bouts, en bas, permettra de glisser des figurines pour les faire apparaître sur l'écran et les y maintenir pendant certaines phases du jeu.

Commençons par un jeu à trois personnages : les figurines représentent Nicolas (N), Pimprenelle (P) et Nounours (O).

L'ensemble des personnages est ici $\{N, P, O\} = E$.

Qui pouvons-nous faire apparaître sur l'écran? La télé ne fonctionne pas : l'écran est vide. Puis chaque personnage vient se présenter. Ensuite, deux par deux, ils échangent un dialogue. Dans une grande scène finale, les trois personnages apparaissent en même temps.

Si les enfants disposent d'un matériel en réduction semblable à celui qui a été décrit, ou bien s'ils ne sont pas trop malhabiles pour dessiner, ils représentent les résultats obtenus.

 $\mathfrak{T}(E) = \{ \emptyset, \{N\}, \{P\}, \{O\}, \{N, P\}, \{P, O\}, \{N, O\}, E \}$

Remarques : 1) Le jeu pourrait être commencé avec une illustration de la fable « Le loup et l'agneau »; il peut être prolongé en faisant intervenir « le marchand de sable » (bien que sur l'écran celui-ci apparaisse rarement en même temp que les enfants).

2) Le déroulement dans le temps d'une saynète donne une réalité concrète à cet ensemble des parties. Au contraire, dans le cas de manipulation avec des objets, l'enfant a beaucoup plus tendance à réaliser des partitions.

3) Cet exercice n'a pas la prétention d'une grande originalité. Ses prolongements sont pourtant intéressants. Imaginez que vous l'appliquiez à deux tragédies, Richard III et Andromaque par exemple. Le nombre des personnages nous assure que les diverses scènes n'épuiseront pas les possibilités de l'ensemble des parties; chez Racine, le procédé des confidents privilégie certaines paires au détriment des autres. Sans prétendre résoudre ainsi les questions posées par l'analyse d'une tragédie ou plus généralement d'un texte littéraire, l'exercice avec Nounours ouvre des perspectives (*).

Modulations

Il est encore trop tôt pour prévoir l'évolution globale de notre enseignement du premier cycle, qui est en pleine mutation. Mais on ne court pas grand risque en présumant que l'aspect vectoriel ou affine de la géométrie revêtira une importance plus grande que par le passé, et en s'interrogeant — ou plutôt en continuant à s'interroger — sur les moyens pédagogiques propres à rendre ces notions assimilables et familières au plus grand nombre.

L'introduction du vecteur en tant que classe d'équivalence de bipoints peut être pédagogiquement justifiée, la préférence marquée par d'autres pour le caractère foncièrement algébrique du vecteur ne manque pas de raisons non plus. Par ailleurs, quand peut-on, quand doit-on l'introduire? En principe il faut attendre d'avoir un corps à sa disposition, pratiquement IR puisque Q n'est plus guère à la mode. Il y a bien les corps finis, qui peuvent être instructifs et attrayants, mais qui prêtent le flanc au reproche de nous éloigner de l'espace « sensible ». L'expérience des quadrillages — à Lyon par exemple — pouvait se permettre d'être plus précoce, mais elle a subi deux critiques : d'abord elle mène plutôt à un module sur l'anneau Z (ou D) qu'à un véritable espace vectoriel, ensuite elle prépare plus à une géométrie « analytique » qu'à une géométrie « intrinsèque ».

Je dois dire que je suis très peu sensible au premier grief, et cela non seulement parce qu'on peut toujours, si on le désire, passer de \mathbb{Z} . à \mathbb{Q} ou \mathbb{R} , mais surtout pour la raison suivante qui me paraît plus profonde : la chose importante — la seule, en fait — pour bien comprendre ce qu'est un « vecteur », c'est de savoir, je dirais presque de sentir, comment il se comporte par rapport aux « scalaires » : à cet égard module ou espace vectoriel se valent pratiquement, l'accès au module étant même plus aisé.

Le second grief me paraît plus sérieux, pas tellement parce que ces vecteurs conduisent à la « géométrie analytique », bien plutôt parce qu'ils en viennent. Je continue à ressentir comme une sorte de supercherie — bien intentionnée, il va sans dire, et je ne voudrais surtout pas avoir l'air de critiquer qui que ce soit — ces beaux quadrillages bien réguliers d'où l'on « dégage » la notion de vecteur. Je ne suis pas

^(*) N.D.L.R.: La Rédaction s'excuse auprès de la Collègue, auteur de cette note, de ne pas avoir noté son nom lorsque ce texte lui a été remis. Réparation sera faite.

trop sûr qu'à 13-14 ans j'aurais été touché par la grâce devant ces bipoints (A, B), (A', B'), etc., d'un quadrillage régulier, censés représenter le *même* vecteur (« Où qu'il est sur le dessin? »), et naturellement cela aurait été bien pire encore si le quadrillage avait été irrégulier : autrement dit, il y avait une chance non négligeable que je passe à côté du « vecteur » sans y rien comprendre. Ce n'est pas ma faute si j'ai l'esprit ainsi fait et je ne dois pas être le seul. Et cela ramène à la première question : vecteur « géométrique » ou bien vecteur, outil algébrique?

Il me semble qu'on pourrait « jouer aux vecteurs » de très bonne heure — en tout cas à l'âge des jeux — avec un matériel aujourd'hui très répandu, celui des blocs logiques. Cela commence dès la construction de (Z, +) — disons donc en Sixième. Je n'ai rien contre l'entier de Z considéré comme classe d'équivalence de couples de naturels, mais ne tiens pas non plus ce procédé pour supérieur à tout autre, au moins dans une première initiation. J'ai déjà exprimé une préférence (Bulletin spécial de l'A.P.M.E.P., n° 269-270, pp. 404-405) pour l'aspect directement opératoire de ces entiers. Supposons que chaque petite plaque carrée autorise le passage d'une case à la suivante du jeu de l'oie, le parcours d'une section d'autobus, etc., dans un sens donné. Dès l'abord la « géométrie » sous-jacente est extrêmement floue : pas question de trajets rectilignes, de parcours d'égale longueur, d'origine privilégiée : ce qui importe seul est l'opérateur de transport (c'est déjà un «vecteur» au sens étymologique!). Posséder 3 petites plaques carrées, c'est avoir le « titre de transport » 3, et une écriture

comme 3+2=5 se comprend d'elle-même (on peut naturellement raffiner sur le \square \square symbolisme en prenant un signe d'addition autre que +). Attribuons alors aux

petites plaques rondes un rôle analogue, mais dans l'autre sens : toute l'étude, au moins expérimentale, de l'addition dans un Z-module en découle, avec ses propriétés usuelles.

Dès ce niveau apparaît l'intérêt d'un signe qui puisse s'interpréter à volonté comme une « opposition » (relativement à l'addition) et comme une « négation » (relativement aux attributs « carré » et « rond ») : le trait suscrit peut jouer ce rôle, par exemple $3 = \overline{3}$. On ne tarde pas à s'apercevoir alors que les symboles \bigcirc et \square

ne sont plus indispensables et que tout peut s'exprimer en termes de $scalaires \ll positifs \gg ou \ll négatifs \gg$, éléments de \mathbb{Z} .

Mais c'est surtout au niveau de la multiplication que cela se révèle utile. En effet, dès que l'on considère une grande plaque (P) comme un « multiple » de la petite plaque (p) (une sorte de « botte de sept lieues » sur le jeu), il se pose un problème de change; savoir si l'équivalent de la grande plaque consiste en petites plaques de même forme qu'elle ou de forme contraire, c'est-à-dire si le « taux de change » est par exemple P=7p ou bien $P=\overline{7}p$. Toute l'étude expérimentale de la multiplication dans $\mathbb Z$ découle alors d'un « trafic de devises » extrêmement simple — ce qui n'empêche évidemment pas d'en donner d'autres illustrations, géométriques ou même physiques (comme la $\mathbb Z$ -balance). Mais de surcroît on a obtenu quelque chose de très important : le changement de base dans le $\mathbb Z$ -module de vecteur unitaire $\mathbb P$.

Passer à un module de dimension 2 — ce qui suffit certainement pour une initiation — ne présente plus aucune difficulté, si l'on s'astreint maintenant à tenir compte de la couleur, à n'employer par exemple que des plaques bleues (b, B) ou rouges (r, R). L'indépendance linéaire n'est autre que la non-convertibilité des deux « monnaies », les opérations de change n'étant licites qu'entre b et B, et entre r et R.

De toute évidence une interprétation géométrique des nouveaux vecteurs 4b + 3r, $3b + \overline{2}R$, etc., est possible et même souhaitable : les quadrillages, le jeu de l'oie bidimensionnel arrivent à point nommé, mais il importe peu à présent que les quadrillages soient réguliers ou biscornus, car l'idée de vecteur est matérialisée ailleurs. On ne séparera jamais trop rigoureusement les deux espaces, ponctuel et vectoriel, surtout dans l'esprit des débutants.

Peut-on envisager d'aller plus loin? Sans doute, mais comme toujours à condition de savoir s'arrêter. L'emploi de plaques jaunes (j, J) ou vertes (v, V), conjointement avec des règles de change simples, du type : j = b + r, v = b + 2r, permet de rendre n'importe quelle « somme », évaluée en monnaies jaune et verte, payable en monnaies bleue et rouge; et même inversement, pourvu qu'on prenne soin de se borner à des changes de déterminant 1 ou -1. Il y a donc là un moyen de rendre intuitif tout ce qui concerne les changements de base, concurremment avec l'illustration géométrique par quadrillages.

Il est clair toutefois qu'arrivé à ce point on ne serait plus au stade des manipulations, mais au seuil du calcul vectoriel; et les difficultés auxquelles on se heurterait dès que le change aurait un déterminant non unitaire imposeraient de bâtir un véritable espace vectoriel sur un corps. Ces « modulations » n'auraient été qu'un prélude, bien sûr, mais c'est le rôle d'un bon prélude d'éveiller l'attention à ce qui suivra.

J.-M. CHEVALLIER.

Activités préparatoires à la résolution d'équations (Sèvres, septembre 69)

Une situation familière (C.E.2 ou C.M.1): un ensemble de cinq lieux de vacances $L = \{$ plage, village, Sèvres, montagne, camping $\}$; on peut les figurer par des points reliés par une ligne fermée (en évitant toutefois de tracer un cercle; le jeu va consister à se déplacer de l'un des lieux à un autre en suivant cette ligne mais pour l'instant, il vaut mieux éviter l'idée que ces déplacements sont des rotations comme celles des aiguilles d'une montre).

Dans un sac, on peut tirer cinq billets marqués a, b, c, d, e et qui signifient respectivement déplacement d'une station à la suivante ou une étape, deux, trois, quatre et cinq étapes.

Le jeu: on se place en l'une des stations (état initial) et on organise un voyage en tirant un billet, puis deux, puis trois billets; on observe l'état final, la station où l'on est parvenu. On recommence, en partant d'une autre station.

C'est la phase de familiarisation. Le billet, c'est l'opérateur dont l'action est le geste de l'élève de telle station à telle autre. Des tirages successifs font apparaître que deux billets peuvent être échangés contre un autre billet « équivalent ». Exemples :

1º plage
$$\xrightarrow{a}$$
 montagne \xrightarrow{b} Sèvres

 c

2º camping \xrightarrow{a} Sèvres \xrightarrow{b} plage

Ce qui donnera l'idée d'écrire a*b=c (ou tout autre symbole que les élèves inventeront à l'exclusion de + ou \times que nous préférons réserver à l'usage habituel).

Elaboration d'une stratégie. A supposer que l'on ait bien pris son temps pour multiplier des exemples tels que les précédents, on aura bien distingué l'ensemble L des lieux de vacances de l'ensemble $V = \{a, b, c, d, e\}$ des voyages qui peuvent être effectués par tirage dans le sac à billets. On découvre alors qu'il y a une loi de composition des voyages tout à fait indépendante des lieux de vacances dont on part. Cette loi, notée *, est conforme à la table suivante que les élèves élaborent peu à peu :

L'utilisation de la table pour certains élèves, le recours à la manipulation des billets pour d'autres permettent de mettre en évidence les propriétés de la loi :

- la commutativité est probablement la plus facile à constater;
- l'associativité sera obtenue au prix de nombreux exemples tels que :

Sèvres
$$\xrightarrow{a}$$
 village $\xrightarrow{b*d}$ plage
Sèvres $\xrightarrow{a*b}$ montagne \xrightarrow{d} plage
soit $a*(b*d)=(a*b)*d$

- l'existence d'un neutre, le billet e qui ne fait pas changer de lieu;
- la symétrie est la réponse à la question naturelle : « après un premier voyage de la montagne à Sèvres par exemple, peut-on revenir à la montagne? » Autrement dit, on sait répondre à toute question du type : trouver le billet x tel que par exemple, d*x=e ou x*d=e.

Equations. La notion est introduite progressivement grâce à plusieurs exemples.

Exemple 1: on a tiré successivement les billets a, c, d puis un billet x dont on a oublié la valeur. On sait seulement que tous ces billets font un voyage équivalent

à celui que fournit un billet b. Quel est le billet inconnu x? C'est résoudre l'équation

$$a*c*d*x = b$$

$$d*d*x = b$$

$$c*x = b \quad \text{donc} \quad x = d.$$

La réponse est trouvée soit par des « manipulations », des déplacements figurés sur le parcours soit par le jeu de l'opération * comme nous venons de l'écrire. Après quoi nous prenons le temps de vérifier a*c*d*d=b.

Exemple 2: une histoire du même genre motivera l'équation c * x * x = a qui se ramène à x * x = c.

Exemple 3: pour amener l'équation a*b*x*b*c = a*d.

Une « technique » de résolution des équations est peu à peu mise au point : se ramener, par des transformations que la table opératoire autorise, à des égalités du type x = a ou x * x = a ou x * x * x = a ou etc...

La structure de groupe et ses propriétés sont toutes là; il n'est cependant pas question de prononcer si tôt les grands mots. Rencontrer d'autres exemples est indispensable auparavant et nous y reviendrons.

(A suivre.)

BOULADE, HAMEAU, LAURENT.

Comment nait l'esprit mathématique dans ma classe

C'est avec beaucoup d'hésitations que j'écris ce qui suit. Je tiens d'abord à dire qu'il n'y a pas pour moi, une façon de faire valable une fois pour toutes. Il n'y a pas de *méthode* proprement dite même naturelle, que ce soit en lecture ou en math. Si l'on suit les enfants dans leur tâtonnement expérimental, les recettes (s'il y en a) ne sont valables que dans la mesure où elles ne sont pas une entrave à la recherche, à la création de l'enfant. A l'heure où j'essaie de décrire aussi fidèlement que possible le travail dans ma classe je suis persuadé qu'il n'est déjà plus tout à fait valable, que l'on évolue très vite et je souhaite le dépasser. Je pense cependant, à un moment où l'on se préoccupe beaucoup d'information et où les documents en pédagogie du calcul sont assez rares, pouvoir aider quelques camarades qui je l'espère me rendront la pareille.

I. Le seul critère valable est de « suivre les enfants », d'être sans cesse à leur écoute et de ne rien leur imposer qui pourrait nuire à leur découverte. J'aide dans ma faible part et préfère que les enfants s'entraident et fassent leurs les notions abordées au moment où ils se sentent mûrs. Il ne faut pas être pressé, d'ailleurs que peut-on faire? On sait très bien maintenant qu'« un concept n'est acquis que lorsqu'il est redécouvert ».

II. Comment trouver des situations de mathématique?

Elles fourmillent autours de nous, le tout est de les saisir au vol.

On peut distinguer chez l'enfant du C.P. suivant son développement mental, quatre pôles d'attraction :

- tout ce qui est lui,
- tout ce qui l'entoure,
- tout ce qui agit sur lui,
- tout ce qui agit sur ce qui l'entoure.

Son gros travail sera de trouver des symboles, une écriture qui l'aidera à se connaître, et surtout à démystifier le monde qui l'entoure et enfin à trouver les moyens pour agir sur ce monde et en prendre la gouverne.

Il n'y a pas dans ma classe de moments privilégiés où l'on se branche sur du calcul, cela vient de diverses façons.

a) A l'entretien du matin, souvent un gosse dit : « Tiens, on pourrait en faire du calcul », c'est à propos d'un texte, d'un dessin, d'objets observés, d'une réflexion, d'un événement.

L'avantage est que l'on ne tombe pas dans l'« histoire chiffrée » qui déjà oriente vers le nombre et sépare le monde entre ce qui se compte (d'où le calcul) et ce qui ne se compte pas (le plus souvent la mathématique).

- b) J'ai souvent dès le départ de la journée divers ateliers dont un de math. Là, l'enfant qui y va peut faire à son gré un travail de consolidation s'il le juge nécessaire ou un travail de recherche et de création.
- c) Un autre point de départ et non le moindre est l'exploitation soit en commun soit par groupe des documents envoyés par nos correspondants. Ce point de départ est toujours très riche car il permet aux enfants d'aborder un aspect différent de la question : lire et comprendre un document de math, le vérifier et y répondre en l'améliorant ou en le complétant.
- d) Une autre source devrait aider beaucoup: c'est l'éducation corporelle. Je sens qu'il y a là beaucoup de recherches à faire.

Les départs ne manquent donc pas mais étant très diversifiés ils réclament chacun une façon de faire particulière. Il est assez difficile de décrire ces diverses recherches.

- III. Pour généraliser il y a la recherche à départ individuel et la recherche à départ collectif.
- a) La recherche à départ individuel: L'enfant exploite son idée en atelier; s'il est capable de conduire seul sa recherche, il trouve différentes pistes ou s'engage à fond dans l'une. J'apporte mon aide s'il en a besoin, une discussion s'établit entre nous deux, je procède de la même façon que pour aider à lire un mot d'une fiche, ou écrire un mot d'un texte libre. J'essaye de donner les moyens qui permettront de trouver les clefs de la découverte.

L'enfant fera plus tard, s'il le désire, l'exposé de son travail à ses camarades. Ce n'est pas obligatoire car un élève peut avoir fait une création qui n'apporte qu'à lui-même et risque de gêner par trop de précipitation le cheminement de ses camarades.

b) Le plus souvent il faut bien le dire, et l'âge en est la cause, l'enfant fait appel à la collectivité car il ne se sent pas assez solide pour continuer. Alors nous en arrivons à la seconde forme de recherche : la recherche collective. Je pense qu'elle est moins valable au départ que l'autre mais au C.P. le travail individuel étant encore bien aléatoire, elle présente par contre certains avantages.

COMMENT PROCÉDONS-NOUS?

— D'abord une amorce de recherche. Un enfant a une idée « on pourrait faire ceci », « moi je crois que cela serait bien »...

Tous en rond, le plus souvent à quatre pattes, autour d'une feuille de papier, on cerne le « problème », on définit ce dont on parle, on cherche par quels symboles on facilitera l'écriture, on définit les limites. S'il y a des objets, on manipule, on touche, on déplace et les réflexions jaillissent : des idées de classements, des comparaisons des relations entre les divers éléments...

- Peu à peu les pistes apparaissent, on « voit » ce que l'on pourrait chercher et tout le monde se disperse pour faire une petite recherche individuelle. Certains se contentent de répondre à la « devinette », d'autres poussent la recherche plus loin.
- Puis on se réunit de nouveau et on expose les trouvailles d'abord en réponse à la question, ensuite d'autres recherches qui mènent à une nouvelle mise au point et à un nouveau va et vient.

A chaque retour, une discussion s'engage, un enfant dit : « moi j'ai trouvé autre chose de bien » et l'intérêt devient alors collectif car chacun veut connaître la découverte du copain et au besoin la démolir (il arrive souvent que des enfants n'ayant pas terminé leur propre recherche restent à leur place mais si la discussion s'anime on les voit arriver).

- Cette discussion est le travail le plus important; elle permet:
- * d'exposer le travail,
- * de poser des questions du genre « je ne comprends pas pourquoi? », ce qui oblige à un effort de clarté.
- * une vérification : habituer les enfants à ne rien laisser passer sans l'avoir mûrement pesé, ne rien admettre a priori.

Cette vérification est le moment le plus riche. Elle apprend à l'enfant à développer son esprit critique (dans le monde où nous vivons, c'est indispensable si on veut garder sa liberté),

- * elle oblige l'enfant à chercher des « trucs » pour faire la preuve, d'où d'autres pistes.
- * elle démasque les erreurs qui sont riches, elles aussi, en pistes nouvelles,
- * enfin la discussion permet de faire avancer la recherche par une confrontation des points de vue, par un tâtonnement collectif (une sorte d'enchaînement des idées : chaque proposition étant énoncée, clarifiée, vérifiée, admise ou rejetée).

L'enfant a besoin de se frotter aux autres, il en a ici l'occasion; l'apport de chacun compte comme chaque brique d'un mur. J'ai retrouvé dans ma classe cette même démarche en lecture, quand il s'agit d'écrire une histoire, quand naît un poème collectif ou une danse libre.

Je considère, pour ma part, que si nous avons pu avoir ce dialogue, ce moment de communion (et ce n'est pas toujours le cas) nous avons atteint notre but. D'ailleurs les enfants le sentent bien. Ils en sont heureux. Ces moments de joie et de découverte, la mathématique est privilégiée pour nous les donner.

Peu importe si nous n'aboutissons pas à une connaissance codifiée dans les

programmes; cette communion de pensée est beaucoup plus importante car au fond la mathématique comme toute matière enseignée n'est qu'un prétexte au développement du raisonnement, de l'esprit critique, de la connaissance de soi. C'est l'apprentissage d'une liberté, elle prépare à la vie et c'est la raison majeure pour laquelle il ne faut pas la désincarner.

Vers un « touche à tout »

A la parution des nouveaux projets de programmes, certains se plaignaient d'être très limités dans leurs investigations. Pour ma part, j'en suis bien content, je les voudrais encore plus réduits et ne comportant aucune obligation d'apprendre quelque connaissance que ce soit. En effet au C.P., nos discussions ne permettent souvent que des amorces, nous ne pouvons aller vers des lois mathématiques.

Certes nous avons intuitivement une idée de la bijection, de la réflexivité, des permutations mais tout ceci, à mon avis, ne peut être considéré comme assimilé et acquis. Il serait stupide de soutenir que l'enfant possède la notion de symétrie; il l'a découverte dans un cas particulier, il l'a retrouvée à propos d'une autre observation, il lui faudra encore beaucoup de tâtonnements pour pouvoir généraliser. Pourquoi alors en parler? Mais parce qu'il est naturel que l'enfant ait à s'en préoccuper, à expliquer le reflet de la glace ou la phrase à l'envers sur son composteur. Notre rôle est de multiplier les occasions de tâtonnement, il n'est pas de forcer la connaissance. Nous n'avons pas à cultiver des azalées de serre. Ne serait-ce pas mettre la charrue avant les bœufs que vouloir à tout prix traiter la symétrie sous le seul prétexte que dans une autre classe nous avons vu un travail merveilleux à ce propos?

Pour moi, les amorces suffisent et n'entravent pas la liberté de chacun. Pourquoi vouloir pousser au-delà si je suis le seul à « me » suivre et si je démontre par là mon état de supériorité sur mes élèves? Le maître n'est pas celui qui sait mais celui qui suit.

Je pense qu'il y a matière à un travail qui nous permettrait peut-être de poser les fondements d'une « méthode » naturelle en math.

Si je fais une comparaison avec la méthode naturelle de lecture, je constate que, comme en lecture, il y a d'abord une accumulation un peu anarchique des outils, puis dans un second stade le choix d'outils référentiels, qui aideront dans une troisième phase au démontage de ces outils afin de les comprendre, d'en saisir les structures et d'en fabriquer d'autres.

En lecture l'enfant possède son livre de vie qui lui permet de faire son apprentissage comme il l'entend, à son rythme propre. Il faudrait essayer de lui donner un outil analogue en math. Or nos moyens sont pauvres, bien mal adaptés et l'élève le plus souvent est obligé d'avoir ces références « en tête » il manque de support.

Certes nous gardons la trace du travail, nous avons un dossier collectif, mais est-ce vraiment le dossier des enfants ou celui que le maître fait pour son propre tâtonnement et aussi pour sa tranquillité morale, cette même tranquillité qui l'entraînera à brûler les étapes, à considérer que la situation mathématique étant née naturellement dans sa classe, et exploitée collectivement, il peut répéter les exercices de contrôle, au risque d'enfermer l'enfant dans un mécanisme stérile (enfoncer le clou, comme on dit!).

Dans certaines classes, le travail étant plus individualisé, les enfants possèdent des carnets de recherche. Le livre de vie de math aurait une destination complémentaire, ce serait le répertoire des situations abordées par les enfants et non la démarche

d'un seul. En possédant ainsi les recherches des autres, l'enfant pourrait alors faire le point, trouver des similitudes, faire sa synthèse et ainsi puiser des matériaux pour avancer sa propre recherche. Le plus souvent l'enfant se contente de communiquer oralement sa découverte, il explique la recherche qu'il a inscrite au tableau mural mais il n'y a pas véritablement communication aux autres d'un document, il y a explication. On saute une étape importante : la lecture d'un document inconnu. Or, pour que chaque enfant puisse s'approprier la recherche du voisin, il faut que cette recherche arrive à lui sous la forme d'un document palpable qu'il pourra garder, répertorier, comme le texte de lecture... Cela suppose une démarche différente et doit changer beaucoup d'habitudes :

- a) un travail beaucoup plus individualisé, dans tous les domaines, permettrait une recherche plus approfondie, plus réelle, sur un cahier de recherche;
- b) l'enfant ayant créé quelque chose, dans une seconde étape devrait traduire clairement sa recherche dans un langage mathématique accessible à tous. Là, réside la grosse difficulté au C.P. L'enfant ne possédant pas souvent une bonne structuration spatiale ne peut traduire clairement sa recherche (dessins trop petits, désordre, etc.) il y a un déphasage très net entre la manipulation, et sa traduction, le travail collectif élude ce problème, car le document dans ce cas est élaboré en commun avec l'aide du maître;
- c) ce document devrait être reproduit afin d'être distribué aux enfants sans explication préalable afin qu'ils opèrent un travail de lecture du document comme pour le texte ou le document reçu des correspondants. Les outils dont nous disposons (limographe, duplicateur à alcool) ne sont guère appropriés, le manque de temps, l'utilisation de la machine, le format, l'emploi de couleurs sont bien des entraves à ce travail indispensable;
- d) avant une explication collective (celle-ci n'est pas toujours indispensable) et la discussion, il pourrait y avoir un dialogue entre l'auteur et les « récepteurs », d'où la création d'équipes de travail occasionnelles au sein desquelles la recherche pourrait alors rebondir.

Ces dernières idées ne sont qu'une hypothèse de travail que je lance, elles sont peut-être utopiques et comportent des difficultés réelles, mais je pense qu'elles vont vers un travail concret, fini et non approximatif comme c'est souvent le cas actuellement. Il ne faut pas se contenter d'être ravi, émerveillé par les découvertes des enfants, surtout quand la recherche est collective. Certes on est étonné par la puissance du raisonnement de l'enfant dans ces conditions, mais c'est le plus souvent un leurre dû au climat ambiant, un leurre pour le maître qui ne s'aperçoit pas que les enfants ne sont alors que les caisses de résonances de ses propres idées ou même de ses découvertes, un leurre quant à l'impact que ces discussions ont sur les enfants. Depuis le congrès de Charleville, j'essaie d'individualiser au maximum dans ma classe, et je mesure combien était vaine mon autosatisfaction.

Donc je fais appel à tous les camarades qui pourraient m'aider soit par leurs conseils soit par leurs critiques, à tenter cette expérience en étant persuadé que comme les autres, il faudra la démolir pour la dépasser. Ce n'est qu'à partir de tels dossiers et par leurs comparaisons que l'on pourra véritablement établir l'itinéraire mathématique de l'enfant.

J.-J. DUMORA.

Enseignement mathématique et psychologie de l'enfant (*)

4. Le stade des opérations concrètes (Piaget) ou de la pensée catégorielle (Wallon) : 6/7-11/13 ans.

Au terme du stade pendant lequel s'épanouit la pensée intuitive (Piaget) ou pré-catégorielle (Wallon), on peut considérer que commence un nouveau stade du développement de l'intelligence.

Nous nous proposons d'en décrire les principales caractéristiques, comme nous l'avons fait pour le stade précédent, avant d'envisager le rôle que peut jouer l'enseignement de la mathématique au cours de cette période.

4.1. Les caractéristiques du stade des opérations concrètes.

A. — Quelques conduites typiques.

Envisageons tout d'abord quelques conduites intellectuelles d'enfants ayant des âges compris entre 6-7 ans et 11-13 ans. Nous examinerons ensuite les caractéristiques communes de ces conduites.

a) Le problème de la distance.

Considérons une épreuve imaginée par Piaget pour étudier la géométrie spontanée des enfants. Deux poupées sont placées sur une table se faisant face à quelque 50 centimètres l'une de l'autre, l'une d'elle occupant une position B surélevée par rapport à la position A de la première (**). Des enfants d'âges divers sont mis en présence de ce dispositif. On leur montre de la main la distance qui sépare A de B, puis B de A, et on leur demande si c'est « la même chose loin? »

On constate alors que jusque vers 6-7 ans la distance évaluée en montant (de A vers B) est déclarée plus grande que la distance évaluée de B vers A. Autrement dit, à cet âge-là, la distance n'est pas encore conçue comme symétrique, elle dépend de l'effort que l'enfant ressent comme nécessaire pour la parcourir.

Par contre les enfants légèrement plus âgés indiquent que la distance est la même. L'un d'eux (6 ans 8 mois) explique pourquoi il le pense. Il dit : « C'est la

^(*) Les précédents chapitres ont été publiés dans les cahiers n° 9, 10 et 11-12. (**) J. Piaget : La géométrie spontanée de l'enfant, p. 98 et suivantes.

même chose parce que ça fera le contraire », faisant allusion, dans son langage peu précis, à un chemin contraire (inversé) possible.

Il s'agit là d'un progrès capital. Alors qu'au niveau précédent l'enfant « mêle son propre point de vue à celui des objets », dès qu'il se libère de cet égocentrisme « il découvre la possibilité de se placer alternativement par la pensée au point de vue de A (vers B) et de B (vers A) ».

b) Partage d'un gâteau.

Considérons une autre épreuve également pratiquée par Piaget (ouvrage cité, p. 382 et suivantes).

On présente à des enfants un disque de pâte à modeler, figurant un gâteau, et trois petites poupées. Celles-ci, explique-t-on aux enfants, « vont manger le gâteau tout entier, mais chacune doit avoir la même chose que l'autre. Que faut-il faire? » On offre un petit couteau de bois à l'enfant pour qu'il puisse effectivement procéder au partage.

Une fois celui-ci accompli l'expérimentateur demande si les morceaux réunis équivalent à la totalité primitive. La plupart des enfants de 5-6 ans considèrent que la galette découpée en morceaux peut être reconstituée au moyen de ces derniers. Mais, en même temps, ils affirment que la somme des morceaux coupés (leur réunion) n'équivaut pas au tout primitif.

Pour ces enfants il n'y a donc pas *conservation* de la grandeur dans un processus de partage de ce type.

Avec les enfants plus âgés on obtient des réponses différentes. L'un d'eux, âgé de 6 ans 2 mois, indique : « c'est la même chose à manger, parce que c'est le même gâteau c'est la même grandeur. Là il y a trois morceaux et là il n'y a en qu'un. Seulement l'autre on l'a mis en morceaux et on a un peu écarté. Mais c'est le même gâteau. C'est la même chose si on le réunit ».

Cette fois il y a conservation de la grandeur malgré le partage.

c) Classements (inclusion).

Abandonnons les conduites intellectuelles liées à l'espace (distances et grandeurs) pour envisager des conduites de classement. Piaget et B. Inhelder ont également étudié ces conduites et en ont rendu compte dans leur ouvrage « genèse des structures logiques élémentaires » (Delachaux, 2° édition 1967).

Considérons par exemple une épreuve mettant en œuvre un jeu de 20 cartes dont 4 représentent des objets coloriés et 16 des fleurs, celles-ci comprenant 8 primevères (dont 4 jaunes et les autres de couleurs diverses).

Ce matériel était conçu pour étudier notamment les emboîtements inclusifs (p. 104 et suivantes), la série des emboîtements étant

A A'	primevères jaunes primevères non jaunes	□ B primevères (*)
B B'	primevères fleurs non primevères	C fleurs
C C'	fleurs objets non fleurs	CD fleurs, objets

^(*) Rappelons que le signe

se lit « est inclus dans ».

En présence de ce matériel les enfants participant à l'épreuve étaient conviés à opérer des classements et devaient répondre à des questions telles que : « Y a-t-il plus de primevères que de fleurs? », ou encore : « Si tu cueilles toutes les fleurs resterat-il des primevères? »

Dans ces expériences les réponses recueillies sont de types différents suivant l'âge des enfants mis à l'épreuve.

Ainsi, un enfant de 5 ans 8 mois estime qu'il y a plus de primevères jaunes que de primevères; un enfant de 6 ans 4 mois pense qu'il y a autant de primevères jaunes que de primevères.

Ces réponses tendent à montrer que les enfants interrogés n'arrivent pas à considérer que la partie (les primevères jaunes) est incluse dans le tout (l'ensemble des primevères) et le second des enfants mentionnés à l'instant compare les deux parties — primevères jaunes et primevères non jaunes — mais ne « voit » pas la catégorie emboîtante (les primevères)!

Les enfants plus âgés répondent par contre correctement, et pour eux cela paraît aller de soi. Voici, par exemple, le compte rendu d'un dialogue entre l'expérimentateur et un sujet de 8 ans 2 mois :

« Peut-on mettre une (A) dans les (C)? Bien sûr, c'est une fleur. — Et une (A') dans le (A)? Non, elle n'est pas jaune. — Et une (B') dans les (B)? — Non, ce n'est pas la même sorte de fleur. — Et une (B) dans les (C)? — Oui, la primevère est aussi une fleur! — Y a-t-il plus de primevères ou plus de fleurs? — Il y a plus de fleurs. — Plus de primevères ou plus de primevères » (p. 111).

B. — Analyse de ces conduites.

A partir des exemples donnés ci-dessus (qui ne constituent qu'un petit échantillon des expériences rapportées par Piaget dans ses ouvrages), on aperçoit nettement la différence entre les conduites des enfants du stade précédemment étudié (moins de 5-6 ans) et celle des enfants plus âgés.

Ainsi se trouve légitimée la coupure à 5-6 ans indiquée aussi bien par Wallon que par Piaget pour distinguer deux phases du développement de l'intelligence enfantine.

Ceci étant, il convient de préciser la nature des changements qui interviennent entre l'une et l'autre de ces périodes.

Dans l'exemple du problème des distances nous avons vu que les progrès accomplis résultaient de la possibilité nouvelle de décentration acquise par l'enfant, d'une plus grande mobilité des images mentales et de la possibilité d'une démarche intellectuelle empruntant le chemin *inverse* du chemin initial.

C'est également grâce à l'évocation d'un *retour* possible à la situation antérieure que l'enfant de 6 ans 2 mois cité précédemment peut déclarer que l'ensemble des parties du gâteau égale le tout. « C'est la même chose *si* on le remet » dit-il. Le « *si* » auquel il fait appel marque bien qu'il imagine « dans sa tête » un processus inverse du processus effectivement réalisé.

Cette réversibilité est capitale car elle conduit l'enfant à découvrir que quelque chose (la quantité) se conserve à travers des changements d'apparence, qu'il s'agisse d'un gâteau qu'on partage ou d'un ruban que l'on découpe en segments, par exemple.

Ce « retour à l'identique », que Piaget appelle identité opératoire, s'ajoute ainsi aux nouveaux outils intellectuels dont dispose désormais l'enfant pour ses raisonnements.

L'observation des exercices de classement nous met d'autre part sur la voie d'un autre type de conduite lui aussi nouveau.

Il s'agit de la mise en œuvre par l'enfant de plus de 6-7 ans de schémas anticipateurs intellectuels, de la même façon que les jeunes enfants d'âge pré-scolaire mettaient en œuvre des schèmes anticipateurs sensori-moteurs dans leurs conduites de détour et leurs conduites instrumentales.

Quand on observe des enfants de 7-8 ans en train de regrouper des objets variés suivant une consigne imposée de façon à les partager en un nombre prédéterminé de classes d'équivalence, on note le recours à un processus « de proche en proche » comportant des tâtonnements et des remaniements. Telle partition qui semblait pouvoir « coller » ne donnant pas le résultat escompté, l'enfant s'y prend d'une autre manière. Mais, après quelques tâtonnements, on le voit souvent s'emparer d'une sorte de fil conducteur — proprement intellectuel — qu'il suit sans s'en apercevoir. Aux rétroactions adaptatives du début a donc succédé quelque chose d'autre, à caractère anticipateur, qui permet de faire l'économie de beaucoup de tâtonnements.

Un processus analogue est en œuvre quand il s'agit d'aligner des réverbères miniatures entre un point A et un point B. L'enfant de 7-8 ans ou davantage, contrairement à l'enfant plus jeune, semble tracer « par la pensée » une ligne idéale entre A et B qui anticipe sur le résultat du placement et le long duquel il dispose successivement les réverbères mobiles. La vérification qu'il fait après coup lui permet éventuellement de parfaire la rectitude de sa ligne. Sa main n'en a pas moins été initialement guidée par un schéma anticipateur.

C. — « L'opération » suivant Piaget.

Ainsi réversibilité, identité opératoire et schème anticipateur apparaissent-ils comme les trois piliers servant à supporter la pensée au stade intellectuel actuellement sous revue. Ces nouveaux venus ne sont pas indépendants les uns des autres. Ils se conditionnent mutuellement et s'articulent les uns aux autres contribuant à constituer ce que Piaget appelle *l'opération*.

Cette terminologie étant propre à l'école de Genève et donnant parfois lieu à des malentendus il convient de bien la préciser.

Il suffit pour cela de noter qu'il s'agit d'opération intellectuelle et non d'opération au sens physique du terme, par exemple de manipulation ou de façonnage.

Considérons par exemple le partage des gâteaux dont il a été question plus haut. Parallèlement au partage qui, lui, est exécuté réellement grâce à une manipulation appropriée, s'établit une opération intellectuelle consistant à *imaginer le partage* du gâteau sans réellement l'effectuer.

Le propre de l'opération est d'être plus libre, en quelque sorte, que l'action réelle correspondante. Elle peut être faite par quelqu'un de très maladroit ou par quelqu'un qui ne dispose pas de couteau. Elle est réversible comme l'est un film qu'on peut repasser à l'envers, alors que l'action réelle ne l'est pas. Elle est synthétique, globale. La pensée en effet peut se permettre de découper les trois parts simultanément alors que le couteau le ferait successivement, l'enfant risquant alors d'oublier en chemin la consigne de départ. C'est en ce sens qu'il faut comprendre le terme de « schème » employé dans l'expression utilisée plus haut de « schème anticipateur ».

Le second caractère de l'opération est d'être issue de l'action, même si l'action en cause n'est pas effectivement présente.

Pour bien faire comprendre cet aspect de l'opération Piaget convie ses lecteurs (cf. J. Piaget, la psychologie de l'intelligence, A. Colin 67, p. 40) à méditer sur les opérations mathématiques en œuvre dans l'expression

$$x^2 + y = z - u$$

Chaque terme de cette expression, explique Piaget, désigne en définitive une action « le signe (=) exprime la possibilité d'une substitution, le signe (+) une réunion, le signe (—) une séparation, le carré (x^2) l'action de reproduire x fois x et chacune des valeurs u, x, y, z l'action de reproduire un certain nombre de fois l'unité. Chacun de ces symboles se réfère donc à une action qui pourrait être réelle, mais que le langage mathématique se borne à désigner abstraitement, sous la forme d'actions intériorisées, c'est-à-dire d'opérations de la pensée ».

Une troisième caractéristique des opérations apparaît quand on considère conjointement plusieurs d'entre-elles, comme c'est le cas dans l'exemple ci-dessus. On constate alors que les opérations se prêtent à des associations ou, mieux, à des compositions, ce qui permet d'en intégrer plusieurs pour former des systèmes plus ou moins complexes. Par exemple, dans certains cas, deux opérations successives peuvent être remplacées par une opération unique d'effet équivalent, ou bien on peut trouver une opération inverse qui, composée à l'opération directe correspondante, annule l'effet de celle-ci, etc... C'est ce qui permet à la pensée de procéder par « raccourcis », « retour en arrière », lui conférant une mobilité et une efficacité nouvelles.

Il y aurait beaucoup d'autres choses à dire concernant la notion piagetienne d'opération. Il nous faut cependant abréger et, pour l'instant, nous contenter de signaler que les opérations en œuvre aux âges du stade sous revue sont ce que Piaget appelle des *opérations concrètes*, voulant marquer par là qu'elles sont issues d'actions — réelles ou virtuelles — portant sur des objets.

Ces « opérations concrètes » se distinguent des opérations que l'on rencontrera au stade suivant qui, elles, ne seront plus forcément concrètes puisqu'elles pourront alors s'appliquer au matériel symbolique (abstrait) que fournissent, par exemple, les systèmes de signes conventionnels propres au langage et à la mathématique.

Cette remarque est capitale au point de vue pédagogique puisqu'elle indique la voie dans laquelle une pédagogie doit s'engager aux âges considérés et qui consiste à donner la parole aux faits, qui consiste à partir des actions, avant d'introduire les « concepts ».

Elle met notamment en garde contre l'introduction prématurée du symbolisme mathématique, du raisonnement hypothétique-déductif, de l'usage des x et des y pour désigner des variables pouvant prendre des valeurs quelconques.

(A suivre).

Le bloc-notes de la Régionale où nous réunissons des échos variés sur l'actualité pédagogique et sur les activités propres de notre Régionale.

Les nécessités de la mise en page (et même de la mise en 32 pages) nous conduisent à remettre au Cahier 15 des textes concernant les programmes de Quatrième et, plus généralement, la réforme à ce niveau.

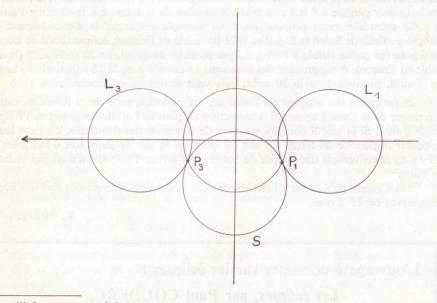
Ce 25 février 1971

De 1940 à 1975, 82 éclipses de Soleil ont eu ou auront lieu; quinze d'entre elles seulement ont été ou seront visibles de Paris, comme éclipses partielles. Ces occasions sont donc trop rares pour que nous n'en profitions pas. D'autant que les contempteurs des réformes que nous préconisons prétendent que nous négligeons l'observation du réel; rien n'est plus faux et tous les préliminaires à la mathématisation que nous développons dans nos classes en sont la preuve. Il n'est cependant pas inutile d'apporter d'autres preuves encore.

Il y a aussi l'intérêt lui-même de l'observation d'une éclipse. Ce que des équipes d'élèves ont pu faire le 30 juin 1954 (sur la terrasse de Meudon) ou le 15 février 1961 (sur la terrasse du Mont Valérien, favorisés par un très beau temps), d'autres élèves pourront le faire le 25 février 1971.

Se préparer à l'événement trois semaines à l'avance n'est pas superflu. Rappelons les principes. Il s'agit d'une éclipse partielle; le cône d'ombre de la Lune ne touche pas la surface de la Terre qui se trouve en partie coupée par le cône de pénombre. Pour l'observateur placé en Europe, le Soleil paraîtra partiellement caché par la Lune.

Voici le déroulement du phénomène pour un observateur parisien. Le 25 février, le Soleil se lève à 7 h 43 (temps légal). A 9 h 34 a lieu le premier contact; le disque de la Lune est tangent au disque solaire en P1; c'est le début (difficile à bien voir) de l'éclipse. Ensuite la Lune accompagne le Soleil et monte doucement dans le ciel en semblant progresser moins vite (1) que le Soleil : le disque lunaire oblitère une portion de plus en plus grande du Soleil. Le maximum de l'éclipse a lieu à 10 h 38, la grandeur de l'éclipse étant alors de 0,626 (les 626 millièmes du diamètre du Soleil



⁽¹⁾ Le mouvement de la Lune autour de la Terre est de sens direct comme celui du mouvement apparent du Soleil sur la sphère des fixes. Par rapport aux étoiles fixes, le Soleil et la Lune progressent dans le même sens, le Soleil de 1° par jour environ, la Lune de 13° environ; c'est pourquoi, au cours de l'éclipse, la Lune paraît s'élever moins vite que le Soleil.

sont éclipsés, position L2); un problème difficile (pour les bacheliers) est de calculer quelle est alors la portion de surface du Soleil encore non cachée, ce qui donne une idée de l'affaiblissement de lumière maximum. L'éclipse diminue ensuite; sa fin est marquée par le dernier contact en P3 à 11 h 44 (toutes ces heures données ici en temps légal).

Pour observer le phénomène, il faut donc se placer en un lieu bien dégagé vers le Sud-Est : ce 25 février, à Paris, le Soleil ne s'élèvera qu'à 32º au dessus de l'horizon à 13 heures. Vers 10 heures, il sera à 20º environ.

Si on ne dispose pas d'instruments, prévoir des filtres pour protéger les yeux. Attention : ne jamais laisser observer le Soleil sans protection. On peut utiliser des verres fumés ou fabriquer des filtres en plaçant sur des lunettes ordinaires deux épaisseurs de film photo noir. Autre procédé utilisable à la rigueur : observer le Soleil à travers une feuille de bristol fort percée d'un très petit trou d'épingle. L'observation à la jumelle améliore la vision en prenant des précautions encore plus sérieuses pour la protection des yeux.

C'est par projection, pour qui dispose d'une lunette astronomique ou d'un télescope, que l'observation est la plus intéressante. Par mesure, sur la projection, de la corde commune aux deux cercles (Lune et Soleil) on peut noter le maximum et par extrapolation avoir une bonne mesure de l'heure du premier ou du dernier contact.

Remarques:

1º On sait que toute éclipse de Soleil est précédée ou suivie à 14 ou 15 jours d'intervalle d'une éclipse de Lune. On le vérifie ici : le 10 février 1971, éclipse totale de Lune; entrée de la Lune dans l'ombre de la Terre à 6 h 52 (temps légal); la totalité de la Lune y pénètre à 8 h 3 peu avant le coucher de la Lune, à 8 h 13 pour Paris.

Le calendrier nous propose un autre exemple remarquable d'encadrement : éclipse partielle de Soleil le 22 juillet 1971 (invisible en France), éclipse totale de Lune le 6 août (en partie visible à Paris), éclipse partielle de Soleil, les 20 et 21 août (invisible en France). A rapprocher des lunaisons : nouvelle lune le 22 juillet, pleine lune le 6 août, nouvelle lune le 20 août; cela vaut toutes les explications.

2º Le calcul des éclipses est fondé sur les périodes, celle de la lunaison, celle du retour de la Lune à un nœud (intersection du plan de l'orbite lunaire et de l'écliptique), etc... Si le calcul complet est hors de la portée des débutants, on peut leur rappeler la période du Saros (18 ans 10 jours ou 18 ans 11 jours soit 6 585 jours). Il y a eu effectivement une éclipse de Soleil le 14 février 1953; elle n'était pas visible à Paris.

Les Cahiers publieront volontiers des échos sur des observations réalisées avec des élèves ce 25 février.

K. MIZAR.

L'ouvrage à consulter sur les éclipses :

Les éclipses, par Paul COUDERC,

Collection « Que sais-je? », nº 940, P.U.F.

Parmi nos lettres

Après avoir souvent regretté que peu de Collègues nous écrivent leurs réflexions sur les cahiers des *Chantiers*, voici, cette fois, une moisson de témoignages intéressants en relation avec notre éditorial du *Cahier 13*. Nous avions adressé ce Cahier à M. GAUTHIER, Directeur général de la Pédagogie, des Enseignements scolaires et de l'Orientation au Ministère de l'Éducation Nationale accompagné de la lettre suivante :

Monsieur le Directeur général,

J'ai l'honneur de vous communiquer ci-joint le dernier numéro paru des Chantiers de Pédagogie mathématique, bulletin de la Régionale parisienne de l'A.P.M.E.P. qui vient de sortir des presses. Je me permets d'attirer votre attention sur l'éditorial qui concerne votre circulaire du 4 septembre 1970 au sujet de la réforme de l'enseignement mathématique au niveau élémentaire.

D'après le Monde daté du 21-11-1970, vous auriez fait des déclarations allant dans le même sens que la circulaire de septembre lors d'un récent débat organisé par « l'Université Moderne ».

Lorsque vous insistez sur le fait que l'Arrêté du 2 janvier 1970 n'entraîne aucune introduction nouvelle, vous fondez votre argumentation sur le seul texte des programmes allégés. Vous ne tenez pas compte des commentaires qui les accompagnent, qui marquent le caractère transitoire de ces allègements, qui suggèrent, dans plusieurs domaines, une évolution des méthodes et même du contenu; activités de classement et de rangement au Cours préparatoire, introduction systématique de la notion d'opérateur (et surtout de la notion de composition de plusieurs opérateurs) aux Cours élémentaires et moyens. Pour tous ceux qui ont suivi avec attention les travaux de la Commission Lichnerowicz, il est clair que cette première étape était aménagée pour que les maîtres se préparent à la seconde (ou plutôt à la deuxième car on ne saurait présumer de ce qui la suivra), cette deuxième étape devant être marquée par une évolution plus profonde des programmes, des méthodes, de la conception même de la formation mathématique au niveau le plus élémentaire.

Comment des centaines de milliers d'instituteurs et d'institutrices se préparerontils à cet enseignement nouveau? « Avec leurs connaissances actuelles et leur expérience pédagogique » en seront-ils capables? Pour certains, j'en suis persuadé, cela est possible puisqu'ils l'ont fait. Mais je nie que pour le plus grand nombre ce soit possible sans une aide substantielle de caractère matériel et pédagogique et scientifique. Or, votre circulaire du 4 septembre 1970 traduit une triste réalité; l'absence complète de prévision de la part du Ministère de l'Éducation Nationale en ce qui concerne la formation permanente des maîtres pour l'enseignement mathématique. On se doute bien que la création des seize ou vingt I.R.E.M. qui manquent encore dans la plupart des académies ne peut se réaliser en une année. Que doter les I.R.E.M. qui existent ou qui existeront du personnel et des moyens financiers suffisants pour qu'ils donnent aux instituteurs la formation mathématique permanente réclamée par les plus lucides d'entre eux, pour que ces I.R.E.M. jouent leur rôle dans la recherche pédagogique à tous les niveaux indispensable à l'évolution future de notre enseignement, on sait que cette expansion considérable des dépenses n'est pas possible d'un seul coup. Mais s'alarment avec moi tous ceux

qui constatent l'inexistence de tout commencement de réalisation. Quelles sont, par exemple, les suites données aux demandes de l'I.R.E.M. de Paris pour organiser une mise en route de la réforme dans quelques centaines de classes de la région parisienne?

Par votre circulaire de septembre, par vos récentes déclarations, vous donnez satisfaction à ceux qui ne veulent rien changer dans l'enseignement mathématique élémentaire, à ceux qui s'opposent à toute augmentation des dépenses de l'Éducation Nationale. Cependant, du même coup, vous découragez les maîtres qui avaient entrepris courageusement et à leurs frais — achat de livres et temps passé — de compléter leur formation mathématique. Ce qui est encore plus grave, vous compromettez la réalisation d'une réforme qui finira par se faire (elle est inéluctable et les nations non sous-développées l'ont déjà entreprise) mais moins bien et moins vite que si vous ne l'aviez pas freinée.

C'est pourquoi il m'a paru utile de dire que votre circulaire de septembre était mauvaise. Je souhaite donc que vous en conveniez et que vous la remplaciez par une invite aux maîtres et aux responsables financiers de l'Éducation Nationale d'organiser au plus vite la formation permanente des maîtres et de développer l'expérimentation pédagogique pour préparer sans tarder la deuxième étape.

Veuillez agréer, Monsieur le Directeur général, l'expression de mes sentiments dévoués.

G. W.

Cette lettre, envoyée le 29 novembre 1970, est restée sans réponse. Bien sûr, M. GAUTHIER n'était nullement obligé de répondre. Mais nous le connaissons comme un homme a priori favorable aux réformes, spécialement à celle qui nous concerne. Son action n'est pas facile face à d'autres administrateurs systématiquement opposés à tout changement et à vrai dire peu capables de comprendre les raisons de cette grande réforme que nous désirons (ou qui sont encore plus opposés à elle quand ils comprennent que la réalisation de la réforme les dessaisira des pouvoirs qui ont été jusqu'ici leurs privilèges). Nous pourrions donc avec vraisemblance interpréter l'absence de réponse à notre lettre comme une approbation de son contenu par le destinataire.

Mais ce petit jeu des interprétations ne présente à nos yeux aucun intérêt. Nous ne reprochons pas à notre administration, de ne pas faire la réforme : de toute façon, elle en est incapable, c'est dans la classe, la communauté des élèves et des maîtres qui, peu à peu, la réalisera. Nous regrettons amèrement qu'au lieu de favoriser cette réalisation, l'Éducation Nationale la contrarie.

Laissons donc les pédagogues-en-bureau de la rue de Grenelle à leurs petites affaires et réjouissons-nous de lire les témoignages de Collègues tels que celui de M^{me} Teulan, institutrice à Lézignan (Aude). Dès réception du Cahier 13, elle nous avait écrit : « Quel soulagement de lire la première page du nº 13. Je me demandais si je savais encore lire et raisonner. Au moins je ne me sentirai plus seule pour essayer de maintenir notre travail d'équipe dans l'école. Merci. » A la suite de notre réponse, M^{me} Teulan a bien voulu nous donner plus de détails sur sa propre expérience.

A Lézignan.

« A Lézignan, en octobre 1967, il a été créé une classe spéciale pour les enfants Gitans. Le problème de ces enfants qui vivent en marge de la société, souvent dans des taudis ou des cabanes, qui ne comprennent et ne parlent presque pas la langue, dépasse

nos moyens. J'ai pris pendant trois ans la responsabilité de cette classe. Pour l'apprentissage du calcul, je me suis trouvée devant une impossibilité; pas moyen de faire reconnaître les quantités au delà de trois, rien à faire. J'ai donc été amenée à chercher ce qu'on pouvait faire « avant ». Grâce aux émissions de télévision et aux quatre livrets de Mme PICARD, avec une boîte de « blocs logiques » et les dix Cahiers de l'A.P.M.E.P. (pour moi), j'ai pu démarrer et prouver que le chemin était bien là. Aussi ai-je proposé à mes collègues de les faire participer à mon petit savoir puisque les C.P. devaient démarrer dès la rentrée 70. Les maîtresses des C.P. et des C.E. et, cette année, une maîtresse de C.M.1 se réunissent donc une fois par semaine à l'école, après la classe. Le premier travail a consisté à nous débarrasser d'habitudes très ancrées par des années de pratique dans les classes primaires : par exemple ; on peut réunir des objets absolument différents et dire qu'ils sont 5. Nous avons si longtemps répété; les francs avec les francs, les mètres avec les mètres pour obtenir des résolutions de problèmes que nous ne nous rendions même plus compte que nous avions mis en place des mécanismes vides de sens. Nous étions tellement prises par l'obligation de faire compter nos élèves jusqu'à 100 et de les initier aux quatre opérations que nous croyions faire manipuler assez jetons, bûchettes, pièces de monnaie et demandions un appel à la mémoire pour ne pas nous sentir en faute auprès des collègues de la classe au-dessus.

Mes collègues reconnaissent que cette approche d'une nouvelle méthode leur a facilité la mise en route de leur travail dans les C.P. Cette année, avec des fiches, avec trois réunions au cours du trimestre sous la responsabilité de notre I.D.E.N., les deux collègues du C.P. se sentent conquises par une initiation qui enthousiasme leurs petits élèves. La grande expérience de l'une d'elles, ancienne maîtresse d'École Maternelle, l'aide beaucoup dans ce travail. Elle nous expose chaque semaine ses résultats et nous y puisons toutes un enseignement. Reste qu'il faudra bien continuer au C.E. l'an prochain et qu'il faudrait pour chacune de nous parfaire notre formation bien mince. Le maître de l'enseignement primaire a, je crois, le besoin d'être au milieu de ses élèves pour prendre toute conscience de ce qu'il enseigne et trouver des moyens bien adaptés, mais il faut qu'il se cultive quand sa classe et sa famille lui en laissent le temps. Il y a toujours les vacances, bien sûr...

Les maîtresses des C.E. avaient elles aussi essayé quelques recherches au niveau de leur classe. Elles se sont arrêtées quand elles ont lu les mises en garde de la circulaire de M. GAUTHIER ou des journaux syndicaux obéissant aux consignes qui précisent que la réforme démarre en C.P. seulement (1). Conclusion: nous verrons bien l'an prochain si l'on continue en C.E.1, l'année suivante en C.E.2 et dans les C.M.: on a le temps de voir venir. On dit que « cela » ne se fera peut-être pas, qu'en URSS ces recherches sont abandonnées (2).

Pour ma part, j'ai bien réfléchi, je ne peux pas « faire » des maths d'une façon moderne l'après-midi sous couvert de discipline d'éveil et continuer à enseigner l'ancien programme le matin. Je ne peux pas écarter délibérément ce que je place avant le calcul et qui me semble essentiel. Je suis forte de mon expérience dans la classe des Gitans et enfin de votre article du nº 13 que j'ai fait circuler dans l'école. Mais je suis

⁽¹⁾ N.D.L.R.: ce n'est pas la première fois que nous entendons parler de telles « consignes » ou « instructions »; leur origine est incontrôlable; aucun texte officiel, à notre connaissance n'a apparé de telles « instructions » contraires au texte de l'arrêté du 2 janvier 1970.

énoncé de telles « instructions » contraires au texte de l'arrêté du 2 janvier 1970.

(2) N.D.L.R.: ici aussi, l'origine de ces informations est incontrôlable; on cite l'U.R.S.S., pays toujours très discret sur ses expériences; on ne dit rien des pays comme la Belgique ou la Grande-Bretagne qui sont, heureusement pour eux, en sérieuse avance sur nous dans ces domaines de l'enseignement élémentaire (pour ne rien dire des autres).

seule, mes Collègues se demandent si mes élèves suivront l'an prochain danx un C.M.1 traditionnel. Et je dois dire que savoir pour soi est bien différent de faire passer dans le savoir de petits élèves. Je travaille au niveau de mes élèves et je suis quelquefois inquiète. Je reprends alors les livres de M^{me} PICARD et j'aspire aux vacances pour reprendre ma formation personnelle, pour revenir sur ce que je n'ai pas absolument assimilé.

En cette fin de trimestre, beaucoup de choses s'éclairent : la compréhension du travail en diverses bases pour un nombre chaque jour plus grand d'élèves me prouve que j'ai eu raison. Ils aiment tellement prendre le cahier de calcul qu'ils l'emportent entre midi et 2 heures et me donnent à corriger nombre d'exercices personnels.

Une progression a été établie pour les C.P. par un professeur de l'École Normale; elle a été communiquée à tous les maîtres des C.P. Un jeune collègue m'a communiqué la progression établie pour les C.E. Un cours de mathématique théorique fonctionne, je crois à Narbonne, le jeudi matin. Mais j'ai bien besoin de mon jeudi. Une suppléante dont le bac math est tout frais et qui a dû enseigner quelque temps dans un C.E.S., nous apporte toute son aide. Voilà notre pauvreté!

Vous dîtes « voilà notre pauvreté » et il est bien vrai que votre tâche, dans les conditions que vous décrivez, est difficile. Mais je dis aussi, voilà notre richesse : votre lettre, votre exemple valent mieux que toutes les circulaires du monde.

A la Seyne-sur-Mer.

M^{me} Papazian, à La Seyne-sur-Mer (Var) a diffusé le Cahier 13 parmi les maîtres de sa région : « Une des institutrices particulièrement convaincue proposait même de polycopier « triste centenaire » de façon à diffuser votre texte dans toutes les écoles de la région...

Un des aspects réconfortants de cette rentrée 70, décevante par ailleurs à bien des égards, est l'enthousiasme des maîtres qui ont entrepris de « rénover » dans tous les sens du terme l'enseignement des mathématiques dans leurs classes. Dans la circonscription de La Seyne, tous les maîtres de C.P. sont dans ce cas. Et qu'y a-t-il de plus communicatif que l'enthousiasme? »

Dans une lettre antérieure, M^{me} Papazian nous avait écrit : « Par suite de circonstances diverses, nous avons été amenés, à Toulon et à La Seyne, à introduire dans un assez grand nombre de C.P. le programme du Centre Belge de Pédagogie de la Mathématique (Toulon en est d'ailleurs cette année au C.E.2). Les résultats ont été étonnants. Je crois que nous méconnaissons souvent le pouvoir d'abstraction des jeunes enfants; je puis assurer, car je l'ai vu, et dans des classes « normales », que des dessins très figuratifs ne sont pas nécessaires pour intéresser des enfants, ni même pour les aider à comprendre les mathématiques. L'utilisation des « graphes » en couleurs (les Belges ont assez de problèmes d'ordre linguistique... n'ouvrons pas les hostilités pour une question de vocabulaire que l'on ne donne d'ailleurs pas aux enfants) qui permettent l'introduction aisée de relations, relations réciproques, relations composées, sont d'une aide très efficace dans l'enseignement primaire. En particulier je trouve que la notion de fonction numérique (fonction +5, fonction -2, fonction 2 (2 fois)) est plus efficace que celle « d'opérateur » ou de « petite machine ». Malgré ma grande admiration pour Dienes, l'expérience m'oblige, sur ce point, à préférer Frédérique Papy. Si l'on

a auparavant, et c'est facile, bien introduit la notion de fonction réciproque, le problème de la soustraction et celui de la division se traitent facilement. J'ai vu des enfants écrire très facilement dès le C.P.



FIG. 1.

La composition de relations (relations familiales d'abord) amène alors assez naturellement celle des fonctions numériques. Les enfants écrivent sans peine;



FIG. 2.

Il y a, évidemment, le problème du Minicomputer et celui de l'introduction du groupe $(\mathbb{Z},+)$ au C. P. Je sais que le matériel Papy est généralement fort décrié en France (alors qu'il est en voie d'être adopté aux États-Unis et sans doute en Italie). Pourtant le Minicomputer n'est pas une simple machine à effectuer sans peine les calculs (ou à les « exécuter » domme dirait Revuz). Il demande, au contraire, une très grande concentration aux enfants. En combinant les avantages du binaire avec ceux de la numération de position en base dix (au C.P.) il permet aux enfants de comprendre parfaitement le déroulement d'une opération. Les résultats en calcul mental sont étonnants (l'addition et la soustraction ne sont « posées » qu'au C.E.1).

L'introduction des négatifs ne gêne pas les enfants et permet au C.E.1 l'introduction de la fameuse soustraction avec retenue d'une façon intelligente et... indolore (j'ai personnellement assisté à cette leçon dans une classe de C.E.1 à Toulon, c'était splendide). L'introduction du binaire pur (au C.E.1) ne pose aucun problème.

Je sais qu'en France nous proposons une démarche différente avec l'introduction de bases autres que dix d'abord. C'est certainement un sujet de discussion important. Mais puisque nous en sommes encore au stade de l'expérimentation, je pense qu'il n'est pas souhaitable que seule l'expérience de DIENES soit étudiée en France. Frédérique PAPY a réalisé un travail original et intéressant, peut-être mieux adapté aux possibilités et aux habitudes de travail actuelles des maîtres du premier degré ».

Peut-on dire que le matériel PAPY soit décrié en France, que l'orientation DIENES soit la seule expérimentée? Nous ne le pensons pas mais nous convenons volontiers que nous n'avons pas encore assez donné d'informations sur les travaux du Centre Belge. Nous nous efforcerons de combler cette lacune.

Totor a-t-il raison?

Extrait d'une lettre de Paul Le Goupil, Directeur d'École à Valcanville (Manche) : « J'attends toujours avec impatience chaque numéro nouveau des Cahiers. J'y trouve toujours matière à réflexion et à recherche. Votre chronique « la réforme

en actes » me paraît une bonne initiative et je crois que cette rubrique est vouée au succeès.

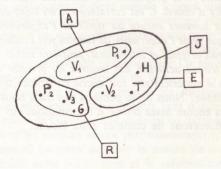
A ce propos, nous nous réunissons quelquefois, entre collègues du canton, pour discuter de l'orientation nouvelle des mathématiques, des expériences de chacun et du matériel actuellement proposé. Depuis la fameuse circulaire du 4 septembre (nous sommes d'accord avec le contenu de votre article), une partie des collègues nous ont lâchés pensant qu'après tout, on en reviendrait bientôt aux bonnes vieilles méthodes et aux bons vieux problèmes. Au cours de notre dernière réunion, nous avons discuté d'un problème que je veux vous soumettre.

Un collègue avait proposé la situation suivante donnée par les élèves : pour Noël. André a reçu un vélo et des patins, Jean a reçu un vélo, un hélicoptère et un bateau, René, un vélo, des patins et un guignol.

Un premier collègue y voyait une relation de l'ensemble $E = \{A, J, R\}$ des enfants vers l'ensemble $J = \{V, P, H, B, G\}$ des jouets. Diagrammes sagittal et cartésien de la relation et définition dans E des sous-ensembles tels que V*, celui des enfants ayant reçu un vélo, P*, H*, B*, G* avec un changement de notation évitant toute confusion (entre V, la classe des vélos et V* le sous-ensemble des enfants ayant reçu un vélo). Ces sous-ensembles sont intéressants à considérer : $B^* = H^*$, $G^* \subset P^* \subset V^*$,... En construisant l'arbre des choix dans J, on obtient un arbre à 32 branches à la manière dont pratiquait Mountebank et chacun des trois enfants trouve son lot en l'une des 32 branches. Ce lot peut être codé en binaire (à condition de choisir l'ordre d'écriture de J) soit pour A 11000, pour B 10110, pour C 11001 ce qui attribue à chaque enfant un lot numéroté par traduction en décimal 24, 22, 25 ou bien une carte perforée avec encoches aux emplacements correspondant aux 1 de la numération binaire.

Un second collègue préférait considérer la relation réciproque de J vers E : les jouets sont distribués aux enfants; dans J, on définit les sous-ensembles A°, J°, R° des jouets distribués à André, Jean, René. Même remarque : on distingue évidemment A qui désigne le jeune André et A° le sous-ensemble des jouets qui lui ont été distribués.

Voici maintenant ce qu'a dessiné Totor, élève moyen de la classe. Il a dessiné le diagramme suivant qui est, de toute évidence celui d'une partition :



Quelle est la meilleure solution? Qui a raison? Je n'ai retrouvé la partition ni dans la première ni dans la deuxième solution. En voulant faire à tout prix de la mathématique nouvelle ne risque-t-on pas de fausser une certaine logique naturelle

de l'enfant? Ou, à l'inverse, la véritable logique de l'enfant a-t-elle été faussée au départ? »

N.D.L.R. Cet exemple est significatif: la situation la plus banale est riche d'enseignements pédagogiques. Ici, il y a, de toute évidence meilleure compréhension de la situation chez Totor que chez les maîtres (que ceux-ci ne se formalisent pas : si nous voulons être vraiment des pédagogues, soyons à l'écoute de nos élèves, recherchons les leçons qu'ils nous donnent).

En effet, J n'est pas un ensemble de jouets mais un ensemble de classes de jouets; V ne désigne pas un vélo mais la classe de tous les vélos. Pour Totor, la vision de la situation est plus simple ou plus directement inspirée par une réalité à laquelle il a peut-être beaucoup pensé : il y a un ensemble K de jouets, $K = \{V_1, V_2, V_3, P_1, P_2, H, B, G\}$ qui sont tous distribués aux trois enfants, chaque jouet étant attribué nommément à l'un des enfants. Autrement dit, cette distribution est une application de K dans E. La relation réciproque de E vers K permet de définir la partition mise en évidence par Totor. Une autre relation de K vers K permettrait de mettre en évidence une autre partition de K en classes de jouets, la classe des vélos, celle des patins, celle des hélicoptères, etc.

Il était normal que la partition définie par Totor ne se retrouve pas dans les relations considérées d'abord et qui ne concernaient pas le même ensemble K de jouets.

Leçon pour le maître : les ensembles finis considérés dans cet exemple et dans tous les exemples semblables que les élèves imaginent, servent de support à ce que vous appelez la logique naturelle de l'enfant. Rien ne peut mieux l'aider à développer ce sens logique qui est un des objectifs de notre enseignement parce que les vérifications par la manipulation d'objets réels soutiennent la pensée. Ces manipulations précoces semblent sans prétention parce qu'elles sont à la portée de l'enfant; elles le guident et il ira loin de cette façon. Suivons attentivement sa démarche.

Autre remarque : y a-t-il, dans un tel exercice, volonté de faire à tout prix de la mathématique nouvelle? A mon avis, non; ce que nous venons de faire à propos de cette distribution de jouets, nous le ferons aussi bien à propos de toutes les situations imaginées dans les problèmes classiques. Ici, il y a seulement l'avantage que la situation est typiquement à la portée des enfants, que les nombres n'y apparaissent que si nous le voulons, que les notions mises en jeu sont des notions fondamentales.

Autre remarque : les avantages à considérer une application plutôt qu'une relation non fonctionnelle; Mountebank l'avait rappelé dans son feuilleton, soulignant que chaque application engendre une partition dans l'ensemble de départ. L'application définie par Totor étant surjective, il y a bijection de la partition de K sur l'ensemble E des enfants : chaque enfant, heureusement, a reçu des jouets.

Enfants et adultes, nous avons tous à gagner aux distributions de jouets...

Une dernière remarque sur les lettres publiées ici. Il est vrai qu'elles expriment toutes leur accord avec la position prise par nous dans le Cahier 13; mais nous n'avons reçu aucun avis contraire. Nous nous engageons à les publier aussitôt, s'il en advient.

Adressez notes, critiques, suggestions à G. Walusinski, 26 Bérengère, 92 Saint-Cloud

Est-il vrai que...?

...les questions posées dans le Cahier 13 ne méritaient aucune réponse? Nous serions amenés à le penser, car nous n'avons rien reçu.

Est-il vrai que dans le 12e arrondissement, des Collègues qui se réunissaient dans une école pour discuter de la « première étape » ont été priés de sortir par un IDEN lecteur trop attentif de la circulaire du 4 septembre?

Est-il vrai qu'au 1er janvier 1971, le Ministre n'a pas encore signé les programmes de Terminales qui ont été adoptés par le Conseil Supérieur en Juin? On peut craindre que les programmes n'ayant pas été préalablement surgelés, ils aient pu souffrir de ce séjour au frigidaire surtout s'ils ont été manipulés entre temps par n'importe qui.

Pour l'information des parents.

Notre collègue, Ph. Ackermann, 95, rue Taitbout, 75-Paris-9e, tél.: 744-37-65, nous fait savoir qu'il organise à l'intention des parents des cours de mathématiques modernes par méthode audio-visuelle.

- ①. Un certain nombre de parents déplorent en effet de ne plus pouvoir suivre ce que font leurs enfants, que ceux-ci soient dans l'enseignement primaire ou au lycée. Ces cours ont donc été conçus pour eux et les caractéristiques en sont les suivantes :
- sensibilisation, initiation aux mathématiques modernes. Cet enseignement s'adresse à des personnes qui n'ont jamais reçu une formation spéciale en ce domaine;
- enseignement vivant, basé autant que possible sur des exemples de la vie quotidienne;
- dans la mesure du possible également, essayer de définir les mathématiques modernes, en montrer leur intérêt pour tous, leur utilisation généralisée demain.
- 2. Le programme complet comporte 6 séances d'une heure et demie chacune, à raison d'une séance par semaine :
 - Séance nº 1: généralités sur les ensembles.
 - Séance nº 2: parties d'un ensemble.
 - Application: simplexes et programmes d'affectation.
 - Séance nº 3: opérations sur les ensembles.
 - Application: couverture d'une campagne publicitaire.
 - Séance nº 4: relations entre ensembles.
 - Séance nº 5: numération.
 - Application: système binaire et informatique.
 - Séance nº 6: les ensembles et la logique.
 - 3). Chaque séance est organisée comme suit) :
- 1^{re} partie: (environ 30 à 45 mn) projection de diapositives semi-programmées fournissant une information précixe sur des points précis,
 - 2º partie (de 45 mn à 1 h): exercices pratiques sur feuilles polycopiées.

Supplément au Bulletin de l'A.P.M.E.P. nº 277 - Janvier 1971