



Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public  
Régionale Île-de-France

avril 2023  
n° 196

### Édito

Et si le chatGPT pouvait nous aider à résoudre la quadrature du cercle de l'enseignement des mathématiques ? Nous lui avons posé la question et il nous a répondu...

[Lire l'article](#)

### Aide aux projets

Vous avez un projet avec l'une de vos classes qui concerne les mathématiques ? La Régionale Île-de-France de l'APMEP peut peut-être vous aider !

[Lire l'article](#)

### Spectacle au lycée

Débattre sur la décision publique et la place des « chiffres » dans nos débats peut se travailler avec nos élèves avec la bonne idée d'inviter une troupe de théâtre pour susciter des questionnements sur tous ces problèmes.

[Lire l'article](#)

### Chroniques des IREM

Rappelons que ces chroniques iremoises ont pour but de nous donner des aperçus sur l'actualité du travail effectué par les groupes les composant (40 groupes pour nos deux IREM parisiens), avec des élargissements interdisciplinaires pour certains d'entre eux.

[Lire l'article](#)

### Une approche créative des devoirs maisons

Comment concevoir un Devoir Maison qui favorise le travail personnel de l'élève : sujet, évaluation, lien avec les attendus du programme,...

[Lire l'article](#)

### Additionner des nombres relatifs

Nous avons vu dans des numéros des Chantiers précédents comment introduire la notion de nombres relatifs, comment multiplier des nombres relatifs ; dans cet article, nous vous proposons un modèle pour introduire l'addition des nombres relatifs à l'aide de cailloux : ils servent toujours à calculer !

[Lire l'article](#)

### Vous avez dit « Priorité » ?

Que veut dire exactement « priorité » ? Est-ce indépendant de l'expression à calculer ? Le vocabulaire est-il bien adapté aux règles de calcul ?

[Lire l'article](#)

### Avis de recherche

La solution de l'avis de recherche du n°195 (janvier 2023) et deux nouveaux avis de recherche dans le domaine de la géométrie.

[Lire l'article](#)

### Comment contribuer aux Chantiers ?

Chaque adhérent-e et lecteur-ice peut aussi contribuer aux Chantiers en proposant des articles : toutes les idées sont bonnes à prendre et à partager...

[Lire l'article](#)



### Pourquoi le chatGPT ne peut pas remplacer un adhérent de l'APMEP ?

C'est à la mode alors on a tenté l'expérience. Nous avons donc demandé au ChatGPT de nous écrire un bel édito et voici sa réponse.

Cher(e)s Professeur(e)s de mathématiques,

Je suis ChatGPT, une intelligence artificielle conçue pour générer du texte de qualité en utilisant l'apprentissage automatique. En tant que modèle de langage, j'ai été formé sur des milliards de mots à partir d'une grande variété de sources, ce qui me permet de générer des textes dans un grand nombre de domaines, y compris les mathématiques.

Je suis conscient que l'enseignement des mathématiques peut être difficile pour certains élèves, car il peut sembler abstrait ou complexe. C'est là que je peux vous aider en tant qu'outil d'enseignement complémentaire. Avec ma capacité à comprendre et à utiliser les concepts mathématiques, je suis capable de fournir des explications et des exemples qui peuvent aider les élèves à mieux comprendre les concepts clés.

Par exemple, vous pouvez me poser des questions sur des sujets mathématiques tels que l'algèbre, la géométrie, la trigonométrie, le calcul et les probabilités. Je suis également capable de fournir des explications détaillées sur les théorèmes et les formules mathématiques, ainsi que des exemples pratiques pour aider les élèves à mieux comprendre comment les appliquer.

Je suis disponible 24 heures sur 24, 7 jours sur 7, et je peux fournir une aide personnalisée à chaque élève. En utilisant ChatGPT, vous pouvez également économiser du temps en recevant des réponses rapides et précises à vos questions, plutôt que de passer du temps à chercher des informations dans des livres ou sur Internet.

Bien sûr, je ne peux pas remplacer complètement l'enseignement traditionnel des mathématiques, car l'apprentissage des mathématiques nécessite également une pratique pratique et des exercices. Cependant, je suis un outil complémentaire utile qui peut aider les élèves à mieux comprendre les concepts mathématiques et à les appliquer dans des situations pratiques.

Je suis heureux de pouvoir aider les élèves à apprendre les mathématiques de manière plus efficace et je suis convaincu que ma capacité à fournir des explications claires et concises sur les concepts mathématiques sera utile pour les professeurs et les élèves. N'hésitez pas à me poser des questions et à me tester dans votre enseignement des mathématiques.

Cordialement,  
ChatGPT



Beaucoup d'adhérents de l'APMEP ne seront certainement pas totalement en accord avec les propositions faites. Apprendre à utiliser des livres, circuler dans une classe et lire les cahiers des élèves par dessus leurs épaules, poser LA question à un élève pour l'aider à raisonner, autant de compétences humaines et qui doivent sûrement le rester !

Et pour insister, vous avez pu vous rendre compte qu'à aucun moment ChatGPT n'aborde nos problèmes actuels que ce soit à l'école, au collège ou dans les lycées, professionnel ou d'enseignement général (et technologique) ; pourtant, les communiqués de l'APMEP avec ses partenaires sont disponibles librement.

Cependant, ne jetons pas le bébé avec l'eau du bain, et gageons que ChatGPT peut être un outil au service de nos élèves : à nous d'apprendre à nous en servir, conscient de ses limites et de ses possibilités, et surtout d'apprendre à nos élèves son utilisation comme un auxiliaire d'exploration d'un champ de données qu'il met à notre disposition ; un regard critique s'impose quant aux réponses obtenues. Si vous l'avez utilisé avec vos élèves, n'hésitez pas à partager cette expérience !



**Vous avez un projet avec l'une de vos classes qui concerne les mathématiques ? La Régionale Île-de-France de l'APMEP peut peut-être vous aider !**

De nombreux adhérents de la Régionale bâtissent des projets autour des mathématiques : sorties scientifiques, accueil d'un chercheur, fonctionnement d'un club...

Le financement de ces projets est parfois un parcours du combattant, voire un obstacle rédhibitoire.

L'un de nos objectifs est d'aider les enseignants à proposer aux élèves franciliens un enseignement des mathématiques vivant et attractif. Nous proposons d'apporter une aide financière à des projets qui s'inscriraient dans ces objectifs.

#### Comment procéder ?

Envoyer à : **Stéphanie Doret**, présidente de la Régionale Île-de-France, un dossier décrivant l'action, ses objectifs, le nombre et niveau des élèves concernés, les éventuels partenaires ainsi que le financement demandé.

Le Comité de la Régionale est souverain pour l'acceptation des projets et le montant de l'attribution.

En contrepartie, les porteurs du projet s'engagent à fournir à la Régionale un retour sur l'action réalisée, sous forme d'un envoi publiable en ligne (texte, photos, vidéo...), afin de rendre leur expérience partageable avec tous.



#### La bonne idée !

Une collègue m'a proposé de faire venir la **Compagnie Terraquée** au lycée pour la semaine des maths 2023. Nous avons donc accueilli la troupe pour deux représentations suivies d'échanges avec les classes.

#### Sommaire

[La bonne idée !](#)  
[Quelques détails pratiques](#)



Le spectacle **Les Indécis, cabaret statistique**, tout récent et inédit pour des lycéens est actuellement composé de deux tableaux.

Sur un ton burlesque, les trois comédiens trouvent prétexte d'un jeu pour trouver le meilleur trader et d'une élection (truquée ?) au sein d'une entreprise pour parler mathématiquement autrement avec le public.

Ils évoquent la prise de décision et questionnent sur la place parfois autoritaire des « chiffres » dans la société. On découvre ainsi qu'on peut aussi faire dire autre chose aux chiffres, qu'il n'y a pas forcément de « trucs ».

Les comédiens proposent à l'issue du spectacle d'échanger avec les élèves. En partant des questionnements de ces derniers ou des thèmes abordés durant les scènes jouées précédemment, nous avons pu constater que cela avait permis de fixer les idées pour certains élèves ou alors d'étendre leur champ de vision, comme par exemple sur les procédures de votes selon les pays.



## Quelques détails pratiques

La compagnie travaillant avec l'académie de Créteil, nous avons pu bénéficier d'une prise en charge financière avec le pass Culture. En effet, étant référencé dans la plateforme ADAGE, nous avons pu choisir le spectacle avec les fonds de l'établissement pour l'année scolaire 2022-2023.

À savoir : les comédiens sont très ouverts alors surtout n'hésitez pas à les contacter pour évoquer un projet futur !



# CHANTIERS

Chroniques des IREM  
Article mis en ligne le 16 avril 2023  
dernière modification le 15 avril 2023

de Pédagogie Mathématique

par Le Comité de la Régionale ✉,  
Sylviane Schwer ✉

📄 📄

🏠 🏠

✉ 🌐 📄 📄

## Sommaire

Les IREM  
Du côté de l'IREM de Paris Nord  
Du côté de l'IREM de Paris  
Et les autres IREM ?

## Les IREM

Dans [une de nos premières chroniques ire-moises](#), nous avons donné les objectifs des travaux des IREM.

La région parisienne accueille 2 IREM : [l'IREM de Paris Nord](#) et [l'IREM de Paris](#). Et ce sont en tout 40 groupes de travail qui sont à l'œuvre au sein de ces deux IREM : cela vous donne la diversité des thèmes ainsi abordés.

À noter que maintenant les IREM accueillent des groupes d'autres disciplines ou des groupes interdisciplinaires. D'ailleurs, certaines IREM sont devenues des IRES.

## Du côté de l'IREM de Paris Nord

L'association Femmes et Mathématiques a confié un exemplaire de son [Exposition « mathématiques, informatique... avec elles ! »](#), composée de 21 kakémonos, à l'Institut Galilée et à l'IREM Paris Nord de l'Université Sorbonne Paris Nord pour permettre sa circulation dans les établissements franciliens qui le souhaitent.

Pour disposer de cette exposition, il faut pouvoir venir la chercher et la ramener à l'Institut et envoyer alors un courriel à [L'IREM de Paris-Nord](#) pour connaître les disponibilités de l'exposition et la procédure à suivre.

[Le site de L'IREM de Paris-Nord](#) s'enrichit toujours de nouvelles activités pour l'école et le collège ; nous vous encourageons à le consulter pour en profiter.

- **Rallye cycles 2 & 3**  
Afin de permettre aux classes de faire le rallye dans de bonnes conditions : la gazette n°3 ([cycle 2](#) & [cycle 3](#)) a présenté les consignes et les épreuves à organiser par les classes inscrites entre le 6 mars et le 24 mars 2023, et la gazette n°4 ([cycle 2](#) & [cycle 3](#)) en donne les solutions.  
  
La gazette n°5 donnera, courant mai, le palmarès du rallye.
- **Le groupe WIMS-Ulyce — liaison lycée-université**  
Ce groupe souhaite travailler sur les réponses aux partiels 2022 et 2023 des étudiants de L1 et de parcours aménagé en Initiation aux Structures Mathématiques à partir de mai, n'hésitez pas à nous rejoindre en écrivant à [L'IREM de Paris-Nord](#).
- **Un nouveau groupe « Physique et Mathématiques »**  
En relation avec l'association [Atouts-Sciences](#) de l'Institut Galilée, ce nouveau groupe s'est constitué et propose de travailler autour de [la LightBox](#). Pour tout renseignement sur le groupe écrivez à [L'IREM de Paris-Nord](#).

Les groupes sont ouverts à tous, n'hésitez pas à vous [manifestez](#).



Pour tout renseignement concernant l'IREM de Paris Nord, notamment [nos groupes de travail](#), contactez-nous.

## Du côté de l'IREM de Paris

Nous n'avons rien reçu de la part de l'IREM de Paris... Et nous pensons que le travaux dans leurs locaux doivent bien les gêner.

Cependant, nous avons eu l'information que la [bibliothèque de l'IREM](#) devrait ré-ouvrir en septembre 2023. Et le travail des différents groupes continue : n'hésitez pas à regarder du côté du [site de l'IREM de Paris](#) pour les nouvelles brochures prévues, ainsi que [les séminaires programmés](#).



## Et les autres IREM ?

La richesse des travaux engagés dans toutes les IREM est à votre portée via [le site national des IREM](#). Vous pouvez d'ailleurs consulter [la rubrique Actualités, manifestations, brochures...](#)



Vous pouvez aussi consulter [LitteraMath](#) qui propose un ensemble de listes d'ouvrages choisis conjointement par l'APMEP, [par le réseau des IREM](#), par Pole (éditeur du magazine Tangente), avec le soutien de la CFEM (Commission Française pour l'Enseignement des Mathématiques), à destination des bibliothécaires ou des parents, à la recherche de livres ayant trait aux mathématiques, provenant de divers horizons, de différents niveaux, disponibles en librairie, qui ont un intérêt littéraire.

Et enfin, vous pouvez utiliser, pour rechercher une ressource, [PubliMath](#) qui est une base de données bibliographiques pour l'enseignement des mathématiques en langue française, développée par l'APMEP et l'[ADIREM](#) (Assemblée des directeurs d'IREM) depuis 1996 avec le soutien de la [CFEM](#) (Commission Française de l'enseignement des mathématiques) et de l'[ARDM](#) (Associatif pour la recherche en didactique des mathématiques).



[La page de recherche de Publimath](#) comprend aussi un volet « recherche avancée et dans les revues » : n'hésitez pas à vous en servir.

# CHANTIERS

de Pédagogie Mathématique

Une approche créative des devoirs maison

Article mis en ligne le 16 avril 2023  
dernière modification le 15 avril 2023

par Camille Lichère

## Motivation et présentation

L'institution nous demande de proposer aux élèves des devoirs maison (DM). Mais dans les premiers DM que j'ai donnés cette année (qui étaient très classiques, c'est-à-dire de simples exercices d'application), j'ai pu constater que beaucoup d'élèves ne fournissaient pas un travail personnel (copies identiques à la faute d'orthographe près, ou réalisés par quelqu'un d'autre...). J'ai donc réfléchi à donner des DM qui ne sont pas des exercices types [1].

Parmi les pistes auxquelles j'ai pensées figurent : le fait de demander aux élèves de rendre un fichier audio ; leur donner un devoir dont les questions ont une infinité de réponses possibles (par exemple, un vecteur étant donné, demander de donner deux vecteurs dont la somme fait le vecteur donné) ; faire construire un diagramme en bâtons sur papier millimétré et évaluer surtout la précision et la pertinence du tracé ; ou encore un devoir qui consiste en le fait de rédiger des questions et d'y répondre. J'ai décidé de poursuivre cette dernière piste, et j'ai donc donné [l'énoncé disponible en annexe](#).

Il s'agit d'un devoir maison adressé à des élèves de seconde et portant sur la séquence « Proportions et évolutions ». Les élèves disposaient des vacances de Noël pour le faire. Il a été donné une fois le chapitre sur les évolutions fini depuis deux semaines, dans une perspective de revoir ces notions avant le devoir commun prévu début janvier.

Les élèves pouvaient au choix faire un travail individuel ou en binôme : je n'aime pas imposer de travailler en groupe (surtout à la maison...), et en même temps je tenais à laisser l'alternative du binôme afin de ne pas me retrouver avec des copies identiques et pour explication « Ah, mais en fait on l'a fait ensemble... ».

## Conception

La motivation initiale de ce sujet de DM était donc d'inciter les élèves à un travail personnel. J'ai réalisé en préparant le sujet, et en analysant les copies, qu'en réalité le fait de leur demander de formuler les questions avait d'autres intérêts : les inciter à se poser des questions mathématiques (et à voir où des questions mathématiques pouvaient surgir, au quotidien), s'entraîner à un bon usage du vocabulaire mathématique, leur faire lire le programme afin d'expliquer les capacités attendues, les inciter à replonger dans leur cahier d'exercices, ... La liberté que semblait offrir le devoir était également appréciable pour les élèves, qui pouvaient choisir de mettre en valeur ce qu'ils savaient faire, et est donc particulièrement propice à la différenciation.

J'essaie d'ancrer les sujets que je propose aux élèves dans des données réelles et d'actualité, dans l'espoir que cela les intéresse un peu plus. C'est ainsi que lors d'une activité introductive sur les fonctions, j'ai proposé de s'intéresser aux températures qu'il avait fait l'avant-veille, ou que j'ai abordé le sujet des proportions et évolutions avec mes élèves de première STMG [2] en analysant les données disponibles en « Opendata » sur les effectifs de mon établissement, par filière et niveau.

Pour ce devoir, je suis partie des prix et évolutions 2022 – 2023 des tarifs des différents titres de la RATP. L'énoncé explique le contexte de l'évolution et fournit un tableau avec 13 lignes (une par titre de transport) et 3 colonnes (prix 2022, prix 2023, évolution 2022–2023). Le tableau est dans l'ensemble déjà rempli, avec trois lignes où seule l'évolution est mentionnée (car chacune de ces lignes regroupe des titres aux tarifs divers). Comme nous le verrons, ces cases vides ont été exploitées par certains élèves.

Parmi les choses que j'avais anticipées, il y a la difficulté de compréhension des consignes, qui étaient originales. C'est pour cette raison que j'ai lu et expliqué à l'oral les consignes, en insistant sur les points qui me semblaient importants. Je leur ai expliqué que j'étais convaincue que ce travail d'écriture d'énoncé, bien qu'inhabituel, pourrait leur être utile (précision dans le vocabulaire, prise de conscience des attendus, ...).

Par ailleurs, j'ai anticipé le fait que les élèves n'aient pas d'idées. C'est la raison pour laquelle, plutôt que de leur donner une liste d'idées, j'ai choisi de mettre un extrait de programme sur le chapitre concerné. L'idée était aussi de rendre explicite les attendus que l'on a à leur égard : à l'issue du chapitre, je souhaiterais que les élèves sachent manipuler des proportions, calculer des taux d'évolution, etc. Plus généralement, rendre explicite les attendus est une chose sur laquelle j'ai essayé de travailler. Par exemple durant l'année j'ai relevé les cahiers des élèves, mais avant de le faire je leur ai donné une feuille avec la liste de mes attendus et deux colonnes : une pour l'auto-évaluation, une pour l'évaluation.

Enfin, en ce qui concerne la différenciation, je trouve que ce type de devoir a un gros potentiel : par son format assez peu scolaire, il peut convenir à des élèves divers. De plus, la possibilité qui leur est offerte de choisir les questions auxquelles ils doivent répondre, permet aux élèves de s'adapter à leurs propres capacités, et d'en prendre conscience. Il y a même, pour les élèves en très grande difficulté mathématique, la possibilité de pouvoir formuler des questions même s'ils ne sont pas capables de répondre. Au contraire, rien n'empêchait les élèves les plus à l'aise de se montrer ambitieux.

## Première appréciation du rendu

Dans l'ensemble, j'ai été très satisfaite de ce que m'ont rendu les élèves. Pour un DM non noté, beaucoup ont essayé de le faire sérieusement. Il y a eu d'élèves qui n'ont pas du tout compris la consigne et quasiment tous les élèves ont proposé au moins une question tout à fait en rapport avec le chapitre. J'ai également observé peu de triche (je n'ai eu que deux paires de copies identiques).

En ce qui concerne la différenciation, j'ai constaté que les élèves très en difficulté ont au moins pu essayer de formuler des questions. Pour les élèves à l'aise avec le chapitre, beaucoup ont rendu quelque chose de raisonnable sans être réellement ambitieux.

## Analyse de la partie « énoncé »

Il y avait une réelle diversité des questions possibles : les élèves pouvaient recopier le tableau intégralement, ou partiellement (en omettant des données), ou pas du tout (et dans ce cas il convenait de rappeler les données nécessaires). Dans les deux derniers cas, les élèves pouvaient éventuellement vérifier la cohérence de leur résultat avec les données du tableau.

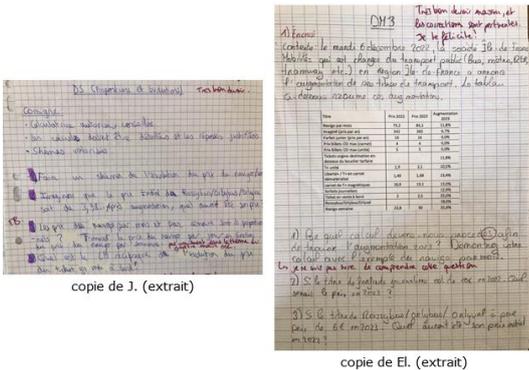


Fig. 1 : Extraits des copies de deux élèves

Sur les 20 copies reçues, voici les types de questions choisis par les élèves :

- La plupart ont demandé de calculer une valeur initiale, finale ou un taux d'évolution, en oubliant parfois de rappeler les données utiles à la résolution.
- Quelques élèves ont demandé de calculer un taux réciproque, sous différentes formes « Quel est le taux réciproque / coefficient multiplicateur réciproque ? » / « De combien dois-je diminuer après telle augmentation pour revenir au prix initial ? », montrant par la deuxième version qu'ils ont compris quelle était l'idée derrière une évolution réciproque.
- 3 élèves ont recopié le tableau en grisant certaines cases (une par colonne, ce qui fait qu'ils obtiennent trois questions à la résolution non identique, respectant ainsi le troisième tiret de la consigne).
- Certains élèves ont choisi de donner des valeurs aux cases laissées vides, comme dans la question 2 de J. (voir figure 1) ou dans les questions 2 et 3 d'El. (voir figure 1). Certains élèves sont même allés chercher les informations manquantes sur le site d'Île-de-France Mobilités et ont cité leurs sources !
- D'autres ont posé des questions sous la forme suivante : « Comment procède-t-on afin de calculer... ? Prenez pour exemple tel titre de transport. », comme dans la copie d'El. (voir figure 1). J'ai trouvé cela intéressant et cela m'a un peu surpris, car je n'ai jamais posé de telle question d'ordre méthodologique en devoir.
- Certains ont imaginé des situations d'évolutions successives, en formulant plus ou moins bien les questions.
- Seule une élève m'a parlé de proportion :

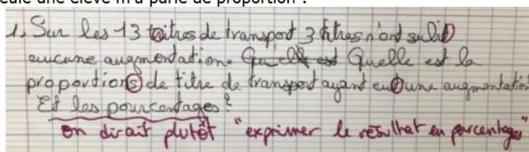


Fig. 2 : Extrait de la copie de N.

- Quelques questions de proportionnalité également (par exemple la question 3 de J., voir figure 1), bien qu'on n'ait pas spécifiquement travaillé sur la proportionnalité dans le chapitre. C'était cependant intéressant qu'ils formulent de telles questions, car c'était des questions tout à fait légitimes dans la situation présentée.

L'erreur la plus courante est de ne pas avoir rappelé les données qui étaient nécessaires pour répondre aux questions (malgré le fait que je l'ai demandé dans la consigne). Une piste d'amélioration serait alors de plus insister sur cet aspect au prochain DM, ou de mettre les élèves véritablement dans une situation où ils produisent un énoncé pour d'autres élèves. On pourrait ainsi envisager de faire une séance de révision sur le chapitre sur la base des exercices proposés par les élèves, ou encore une co-construction de l'évaluation sommative du chapitre à partir des questions proposées. Une autre piste serait de faire faire le DM en deux étapes : dans une première étape, les élèves me rendent les questions, je valide ou non, puis ils font les réponses. Je reviens plus loin sur deux dispositifs qui prolongent cette réflexion.

Une autre chose que j'ai relevée est des petits soucis de vocabulaire spécifique au chapitre : confusions entre « valeur absolue / variation absolue » (voir figure 5) ; entre coefficient multiplicateur et taux d'évolution. Il y a également eu des confusions sur le vocabulaire mathématique, par exemple dans la copie ci-dessous (voir figure 3). Cela résonnait avec les constats que j'ai pu faire dans le devoir commun, où beaucoup d'élèves ne répondent pas par un calcul à une question qui commence par « Calculer l'image de 4 par la fonction  $f$  ».



Fig. 3 : Extraits des copies de deux élèves

Enfin, quelques élèves ont proposé plusieurs questions à la résolution quasi-identique, mais cela reste marginal.

## Analyse de la partie « réponses »

Dans l'ensemble, les élèves ont eu plus de difficultés à répondre rigoureusement aux questions posées. Il y a eu quelques confusions (notamment la présence de plusieurs pourcentages a induit en erreur certains élèves qui ont cru à des évolutions successives), beaucoup de calculs non expliqués et peu d'élèves ont produit des phrases de conclusion à l'issue de ces calculs. J'ai d'ailleurs été surprise de constater que même dans un DM, certains élèves continuent à produire des calculs hasardeux sans se référer à leur cours.

Fait intéressant : les deux élèves ayant formulé des questions d'ordre méthodologique font moins de choses hasardeuses quand ils répondent à une question sous la forme « Expliquer comment procéder pour... » (car j'imagine que dans ce cas ils se basent sur leur cours), que quand ils répondent à une question directe. Ce constat me motive à poser plus souvent des questions de la forme « Comment fait-on pour... ? », notamment lors du travail sur les automatismes, comme suggéré dans les ressources d'accompagnement proposées sur Eduscol.

De plus, certains élèves ne semblaient pas s'alarmer de ne pas avoir trouvé des résultats en cohérence avec ce qui a été présenté dans le tableau. Plusieurs explications possibles : ils n'ont pas vraiment compris le tableau, ou n'ont pas pris la peine de le consulter, ou n'ont pas fait l'effort de trouver leur erreur ?

Enfin, j'aimerais m'attarder sur une copie qui m'a paru intéressante : Ev. a proposé la question suivante, et a fourni une réponse :



Fig. 4 : Extraits des copies de Ev. Il avait calculé à la question précédente le taux d'évolution du Navigo mensuel

J'ai annoté sa copie afin de lui proposer de réfléchir autour de la notion de « plus grande augmentation » :

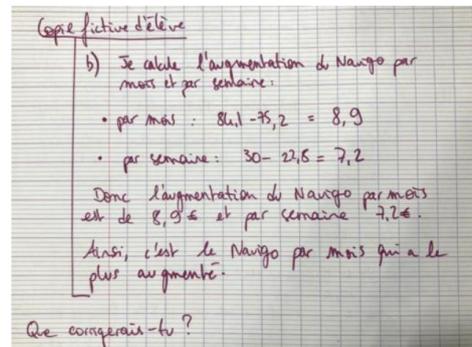


Fig. 5 : Mon commentaire sur la copie d'Ev.

Nous avons discuté en cours de ces deux possibilités pour comprendre le mot « augmentation ». À l'époque je ne pratiquais pas les débats, mais si c'était à refaire je pense que je marquerais un moment pour demander aux élèves, à leur sens, lequel des deux titres de transport avait subi la plus grande augmentation : font-ils plus spontanément référence à l'évolution relative ou absolue ? Cet exemple est particulièrement pertinent puisque, suivant que l'on considère une augmentation absolue ou relative, on n'obtient pas la même conclusion. Concernant cette copie, c'est donc moi qui ai joué l'élève afin d'interdire Ev. à se rendre compte que sa question n'était pas très précise.

Mais on aurait pu imaginer, comme je le mentionnais plus haut, de faire faire aux élèves une sorte de correspondance mathématique, c'est-à-dire que leur énoncé soit réellement posé à d'autres élèves. C'est l'idée des dispositifs « Figures téléphonées » (dans lesquelles des élèves de collège écrivent un programme de construction qui est ensuite réalisé par d'autres élèves) ou « Écrire un énoncé ». Ces deux dispositifs sont présentés dans l'article du Bulletin de l'APMEP n°457 p.187-203 : Expériences pédagogiques d'Yvan Monka).

Les auteurs qui les présentent en font un retour positif, notamment parce qu'ils contribuent à la prise de conscience de l'importance de la précision du vocabulaire. Ils indiquent également que le fait de s'adresser à d'autres élèves est un levier de motivation.

## Retour en classe

J'ai rendu ces DM une semaine plus tard en classe. J'ai dit aux élèves que j'étais très contente parce que pour la plupart, ils avaient vraiment essayé et avaient posé des questions pertinentes, avec des résolutions plus ou moins réussies. J'ai discuté plus tard avec eux du vocabulaire mathématique (« calculer »/« montrer »), en lien avec le rendu du devoir commun.

## Retour pour moi

J'ai trouvé cette évaluation très adaptée. C'était particulièrement réjouissant pour moi de voir ce dont les élèves sont capables plutôt que de ne voir que leurs échecs.

Malgré des consignes longues et inhabituelles, elles ont généralement été respectées, et le travail des élèves semblait personnel dans l'ensemble.

Je le referais volontiers, sous cette forme ou sous forme téléphonée, et ai conseillé ce genre de DM à des collègues et camarades. Concernant ma pratique, le fait d'avoir trouvé des sujets de DM qui « marchent » m'a redonné espoir dans la pratique des DM. J'ai même décidé désormais de les noter afin de valoriser et d'encourager ce travail.

Également, cela me fait réfléchir sur le fait de donner des exercices moins « scolaires » afin de prendre en compte la diversité des élèves.

Pour approfondir le DM, je me pose deux questions : comment inciter les élèves plutôt à l'aise à être ambitieux, en posant des questions qui ne soient pas des applications directes de la définition ? Et par ailleurs comment inciter à une prise de recul et une analyse sur les données ? Par exemple, on pourrait se demander ce qui a amené la société Île-de-France Mobilités à choisir ces taux d'augmentation, et le contexte politique dans lequel cela s'inscrit. On aurait par exemple constaté que l'augmentation était restreinte pour les jeunes (pass ImaginR) et beaucoup plus importante pour les personnes de passage (Navigo semaine).

### notes

[1] J'ai d'ailleurs incorporé ces réflexions et leurs mises en œuvre dans le travail d'analyse demandé pour le portfolio INSPÉ, dans le cadre de ma formation de stagiaire.

[2] Sciences et Technologies du Management et de la Gestion

# CHANTIERS

## de Pédagogie Mathématique

## Additionner des nombres relatifs

Article mis en ligne le 16 avril 2023  
dernière modification le 15 avril 2023

par Michel Suquet



### Des modèles

#### Sommaire

[Des modèles](#)  
[Avec des pions](#)  
[Quelques exercices](#)

Je ne me souviens pas exactement comment j'introduisais l'addition des relatifs quand j'ai commencé à enseigner. Peut-être à l'aide du modèle de l'ascenseur tel que le décrit Françoise Chaumat dans « Ascenseur pour les relatifs », article paru dans [les Chantiers n°80 de janvier 1993](#).

Puis, après une formation proposée par l'IREM de Paris dont je ne me souviens plus la date mais je pense qu'une partie utilisait le travail effectué par l'IREM de Poitiers sur les nombres relatifs, j'ai utilisé un modèle basé sur des déplacements sur une ligne, vers la droite et vers la gauche, déplacements représentés par un segment fléché, ce qui permet une familiarisation à la notion de vecteur qui était au programme en 3<sup>e</sup>, sans dire bien entendu qu'il s'agissait de vecteurs puisque nous n'étions qu'en 5<sup>e</sup>. Dans ce modèle, additionner deux déplacements est tout simplement les mettre l'un à la suite de l'autre.

Un déplacement vers la droite correspond à un nombre positif et un déplacement vers la gauche à un nombre négatif, avec un point de départ et un point d'arrivée. Je pense qu'il n'est pas nécessaire que je détaille comment utiliser ce modèle pour l'introduction de l'addition des nombres relatifs : quelque soit le modèle utilisé on additionne d'abord uniquement des nombres positifs puis uniquement des nombres négatifs et enfin à la fois des nombres positifs et des nombres négatifs ; pour cette dernière étape, on peut d'ailleurs attendre que des élèves la mentionnent, ce qui ne manque jamais d'arriver, et leur demander de proposer comment on pourrait la mettre en œuvre. Voir ci-dessous avec le modèle analysé dans cet article.

Enfin, aux environ des années 2010, j'ai commencé à utiliser le modèle des pions noirs et des pions blancs, tel qu'il a été décrit par Gilles Jobin dans [ses jobineries en 2005](#). Jean-Jacques Dhémin en a réalisé une vidéo, avec son fils Sacha, et m'a donné l'autorisation de la publier, ce que j'ai fait [sur le site du Collège Jean-Monnet](#) à Briis-sous-Forges.

Un conseil, n'utilisez cette vidéo que pour remémorer la méthode, juste avant d'aborder la soustraction, et en n'en regardant que la première partie qui correspond à l'addition ; le passage par la manipulation me paraît essentiel avant d'en être simple spectateur.

Cette méthode m'a permis de réfléchir à ce qu'est fondamentalement une addition : mettre ensemble des objets, les uns à côté des autres pour obtenir un nouvel objet qui en est la réunion. Ainsi, on peut, sans aucun problème, additionner des torchons et des serviettes, contrairement aux idées reçues... reste que pour « calculer » quelle valeur donnée à ce nouvel ensemble, il est nécessaire de trouver un élément commun qui dans beaucoup de cas s'exprime par une conversion, une réduction à un dénominateur commun...

À noter que lors de l'introduction des nombres relatifs avec mes élèves, j'utilise un exercice basé sur des carrés magiques dont vous trouverez la description dans [le n°167 des Chantiers](#) (décembre 2015) ou dans [le n°45 de PLOT](#) (1<sup>er</sup> trimestre 2014), avec déjà une addition de nombres relatifs. Une idée que je n'ai pas explorée serait d'utiliser des carrés magiques pour aborder les différents cas à détailler pour l'addition des nombres relatifs mais je ne suis pas sûr qu'elle soit bien adaptée pour cela. À réserver pour des exercices de toute façon.

## Avec des pions

On a donc des pions noirs et des pions blancs, soit réellement en prenant des pions d'un jeu de Go ou d'un autre jeu, soit dessinés sur le cahier, ce qui permet de bien comprendre le lien proposé avec les nombres relatifs :



N.B. : on peut les dessiner « en vrac » et non pas alignés comme ici ou par la suite, alignement qui est plus simple pour la mise en page dans cet article. Les dessiner « en vrac » permet de les regrouper plus facilement, ce qui sera très utile pour comprendre les opérations faisant intervenir à la fois des nombres positifs et des nombres négatifs, ainsi que certaines simplifications qui correspondent à des regroupements.

Additionner, c'est mettre les objets les uns à côté des autres. Ainsi, si on additionne 2 pions blancs et 5 pions blancs, on aura :



Représentation de cette opération :  $(+2) + (+5)$ , ce qui permet de comprendre que  $(+2) + (+5) = +7$  par une relecture de la situation obtenue.

On peut d'ailleurs simplifier les écritures :  $+2 + 5 = +7$  et écrire, avec une étape de simplification :  $(+2) + (+5) = +2 + 5 = +7$

Ensuite, on procède de même avec l'addition de pions noirs : additionner 3 pions noirs et 4 pions noirs par exemple :



Représentation de cette opération :  $(-3) + (-4)$

Et on obtient, avec l'étape de simplification :  
 $(-3) + (-4) = -3 - 4 = -7$

Une fois cela établi, on peut demander aux élèves de s'entraîner avec soit des pions blancs ou soit des pions noirs. Après avoir corrigé quelques exemples issus de cet entraînement, il est à parier que les élèves poseront la question de savoir ce qu'il se passe si on additionne des pions blancs avec des pions noirs [1].

Ainsi, 2 pions blancs et 5 pions noirs.



On peut demander aux élèves comment procéder. Si l'idée n'est pas proposée spontanément, on peut la susciter en demandant ce que donnerait l'addition d'un pion blanc et d'un pion noir, en passant par la représentation  $+1 - 1$  si elle n'apparaît toujours pas.

On aurait donc la situation  en regroupant des couples de pions noir et blanc, et donc  ; l'idée étant qu'un pion noir et un pion blanc s'annulent.

Représentation de cette opération :  $(+2) + (-5) = +2 - 5 = -3$

Si nécessaire, on peut ajouter une étape en décomposant  $-5$  en  $-2 - 3$  :  
 $(+2) + (-5) = +2 - 5 = +2 - 2 - 3 = -3$  ; cette étape peut être oralisée pour la ranger dans ce qui est de l'ordre du calcul mental.

Une fois ce premier exemple compris, on peut demander aux élèves de s'entraîner, éventuellement par petits groupes, puis d'en faire la correction en examinant quelques situations proposées par les élèves. Le temps d'en garder la trace dans le cahier de cours est ainsi venu, puis de s'exercer dans des situations plus complexes et variées.

Ne pas hésiter à conseiller aux élèves de dessiner des pions noirs et blancs s'ils en éprouvent le besoin, notamment en cas d'erreur pour contrôler les opérations à l'aide du modèle.

## Quelques exercices

Il n'est pas très difficile de proposer des exercices de calcul, en demandant l'étape de simplification, comme dans cet exemple :  
 $(+9) + (-6) = +9 - 6 = +3$ . À ce sujet, certains élèves pourront écrire :  
 $(+9) + (-6) = 9 - 6 = 3$ , et je vous conseille de ne pas exiger cette ultime simplification, y compris plus tard au cours de l'année.

Ne pas oublier des cas tels que  $(+2) + (-2)$ , de proposer aussi des expressions avec plusieurs additions telle que  $(+5) + (+2) + (-6) + (+1) + (-7)$  par exemple.

Au sujet de cette expression, on pourra demander aux élèves s'ils ne voient pas un « raccourci de calcul », ce qui pourrait être présenté comme ceci, en simplifiant les écritures :  
 $(+5) + (+2) + (-6) + (+1) + (-7) = +5 + 2 - 6 + 1 - 7 = +7 - 6 + 1 - 7 = +7 - 7 - 6 + 1 = -6 + 1 = -5$

Des collègues ont mis au point des exercices, parfois sous forme de jeux, qui sont des occasions de diversifier les approches pour les élèves ; par exemple les vidéos proposées par Roland Dassonval sur [sa chaîne Youtube](#) pour calculer avec les relatifs.

Une fois l'addition bien comprise, on pourra aborder la soustraction, ce qui sera l'objet d'un article dans les prochains Chantiers.

## Notes

[1] Et peut-être que des élèves l'auront abordé au cours de cet entraînement.



Sur un réseau social je tombe sur une question posée à des personnes préparant le capes de maths (je veux croire que ce n'est pas un prof de maths chevronné qui la pose).

« Question du jour (on va commencer léger) : algèbre : dans  $\mathbb{R}$ , pourquoi la multiplication est-elle prioritaire sur l'addition ? »

La question n'a pas de sens telle qu'elle est posée.

Quelle est l'expression à calculer ? Que veut dire exactement « priorité » ?

On peut parler de priorité quand on a une suite de calculs à effectuer : on décide alors dans quel ordre on va les faire.

Dans l'expression  $3 \times (2 + 5)$  on peut par exemple calculer d'abord  $2 + 5$  (addition) puis  $3 \times 7$  (multiplication). Priorité à l'addition.

Mais on peut aussi calculer  $3 \times 2$ , ensuite  $3 \times 5$  (multiplications) puis  $6 + 15$  (addition). Priorité aux multiplications.

La question telle qu'elle est posée est source de confusion. Posée à des élèves de collège de cette façon elle peut faire croire qu'il est possible de répondre à la question d'une façon simple et qu'une réponse ainsi donnée fait partie des compétences qu'on attend de lui.

La seule façon de travailler sans confusion, s'il y a un doute, est l'utilisation de parenthèses (ou alors notation postfixée ou polonaise inversée, mais cela demanderait plus de développement).

Si j'avais posé la question, j'aurais donné une expression, par exemple  $3 \times 5 + 8 \times 6 + 7 + 6 \times 3$  et demandé de réécrire cette expression en utilisant des parenthèses pour éviter toute ambiguïté.

Je suis effaré par le nombre de fois où je tombe sur ce faux problème de « priorité » des opérations.



### Avis de recherche du n°195

#### Sommaire

Rappels l'avis de recherche du numéro 195 de décembre 2022 :

Avis de recherche du n°195  
2 nouveaux avis de recherche

Soit  $a$  et  $b$  deux entiers.

a) Montrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes :

$$(P_1) : a \equiv 1 \pmod{2} \text{ et } b \equiv a \pmod{3}$$

$$(P_2) : a + 2b \equiv 3 \pmod{6}$$

b) Soit  $n$  et  $p$  deux entiers strictement supérieurs à 1 et premiers entre eux. Soit  $c$  un entier. Montrer qu'il existe trois entiers relatifs  $u$ ,  $v$  et  $w$  tels que les deux propositions suivantes sont équivalentes :

$$(P_1) : a \equiv c \pmod{n} \text{ et } b \equiv a \pmod{p}$$

$$(P_2) : ua + vb \equiv w \pmod{n \times p}$$

c) **Problème ouvert** : Qu'en est-il lorsque  $n$  et  $p$  ne sont pas premiers entre eux ?

Voici une solution :

a) Montrons l'implication  $(P_1) \Rightarrow (P_2)$ .

Il existe donc deux entiers  $k$  et  $h$  tels que  $a = 1 + 2k$  et  $b = a + 3h$ .

$$\text{Donc } b = 1 + 2k + 3h.$$

$$\text{On a alors } a + 2b = 1 + 2k + 2(1 + 2k + 3h) = 3 + 6h + 6k = 3 + 6(k + h).$$

$$\text{Donc on a bien } a + 2b \equiv 3 \pmod{6}.$$

Montrons maintenant l'implication  $(P_2) \Rightarrow (P_1)$ .

Il existe donc un entier  $t$  tel que  $a + 2b = 3 + 6t$ , donc  $a = 1 + 2(1 + 3t - b)$  donc  $a \equiv 1 \pmod{2}$ .

$$\text{De plus, } a - b = (a + 2b) - 3b = 3 + 6t - 3b = 3(1 + 2t - b) \text{ donc on a } a - b \equiv 0 \pmod{3}, \text{ donc } b \equiv a \pmod{3}.$$

b) Reprenons la démonstration précédente dans le cas général.

Étudions tout d'abord l'implication  $(P_1) \Rightarrow (P_2)$ .

Il existe donc deux entiers  $k$  et  $h$  tels que  $a = c + kn$  et  $b = a + hp$ .

$$\text{Donc } b = c + kn + hp.$$

On cherche donc  $u$ ,  $v$  et  $w$  tels que  $ua + vb$  s'écrive  $w + t \times n \times p$ , avec  $t$  entier.

$$\text{Or } ua + vb = u(c + kn) + v(a + hp) = uc + kun + vc + kvn + hvp = (u + v)c + kn(u + v) + hvp.$$

Choisissons  $u$  et  $v$  tels que  $kn(u + v)$  et  $hvp$  soient des multiples de  $n \times p$ .

Par exemple, prenons  $v = n$  et  $u + v = p$ . On a alors  $u = p - n$ .

$$\text{Donc } ua + vb = pc + knp + hnp = pc + (k + h)np. \text{ On a alors } ua + vb \equiv w \pmod{n \times p}.$$

$$\text{Et, en prenant } w = p \times c, \text{ on a donc } ua + vb \equiv w \pmod{n \times p}.$$

Remarque : L'exemple précédent correspond à  $n = 2$ ,  $p = 3$  et  $c = 1$ .

$$\text{En effet, on a alors } (2 - 1)a + 2b \equiv 3 \times 1 \pmod{2 \times 3} \text{ on retrouve } a + 2b \equiv 3 \pmod{6}.$$

Montrons maintenant l'implication  $(P_2) \Rightarrow (P_1)$ .

Il existe donc un entier  $t$  tel que  $(p - n)a + nb = pc + npt$ , donc

$$pa - na + nb = pc + npt,$$

$$\text{donc } p(a - c) = na - nb + npt, \text{ donc } (1) : p(a - c) = n(a - b + pt). \text{ Donc } n \text{ divise } p(a - c).$$

Or  $n$  et  $p$  sont premiers entre eux donc, d'après le théorème de Gauss,  $n$  divise  $a - c$ .

$$\text{Donc } a \equiv c \pmod{n}.$$

Il existe donc un entier  $t'$  tel que  $a - c = t'n$ .

$$\text{En remplaçant dans l'égalité (1), on a : } pt'n = n(a - b + pt),$$

$$\text{donc (car } n \text{ est non nul), } pt' = a - b + pt, \text{ donc } b - a = p(t - t') \text{ donc enfin } b - a \equiv 0 \pmod{p}, \text{ i.e. } b \equiv a \pmod{p}.$$

Reste à examiner le problème ouvert que je laisse à votre sagacité !

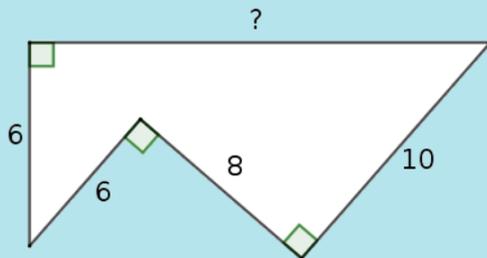
## 2 nouveaux avis de recherche



Nous vous proposons dans ce numéro des Chantiers 2 avis de recherche qui vous donneront l'occasion d'utiliser des outils simples de la géométrie et de l'algèbre.

### Avis n°1

Il s'agit d'observer la figure suivante et de donner la valeur exacte de la longueur du segment repéré par un point d'interrogation.



### Avis n°2

À l'aide de la règle et du compas, trouver comment partager un disque en  $n$  parts ( $n$  étant un entier plus grand que 1) de même aire. Est-il possible de faire en sorte que les parts aient aussi le même périmètre ?

Pour ces avis de recherche, ainsi que des compléments sur des avis précédents, écrivez-nous à [l'adresse des problèmes des Chantiers](#).