chantiers de pédagogie mathématique

Bulletin bimestriel de la Régionale Parisienne – Juin 1975 – CAHIER **33**

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

Sommaire

2 : Vie de la Régionale : — Assemblée Générale,
— Comité du 21 mai 75,
— Une réunion d'enseignants 1er cycle-2e cycle.

6 : Réussite scolaire et appartenance sociale, Viviane ISAMBERT-JAMATI.

11 : Débat « Réforme de l'enseignement des mathématiques et les ensembles ».

Éditorial

Le Bureau de la Régionale Parisienne de l'A.P.M.E.P. a examiné le projet de réforme du système éducatif présenté par M. HABY, ainsi que les diverses déclarations du Ministre de l'Éducation.

Il rappelle que les options éducatives fondamentales de notre association ont été précisées dans la Charte de Caen, adoptée à une très large majorité de ses adhérents.

Il apparaît à l'évidence que les réformes projetées par M. HABY ne vont pas dans le sens de la Charte de Caen, ou même iront à l'encontre et cela sur des points capitaux comme la séparation des ordres d'enseignement et la formation des maîtres.

De plus dans ses déclarations à propos de l'enseignement des mathématiques M. HABY a repris à son compte la distinction entre mathématiques abstraites réservées à l'élite et mathématiques concrètes destinées au vulgaire. Ignorant ainsi les travaux les plus éprouvés de plus d'un demi-siècle de recherches psychopédagogiques, M. HABY compromet les chances de la nécessaire et difficile réforme de l'enseignement des mathématiques telle que l'a souhaitée l'A.P.M.E.P., c'est-à-dire d'une réforme permettant à tous d'accéder à la pensée mathématique.

C'est pourquoi le Bureau de la Régionale Parisienne de l'A.P.M.E.P. a jugé inacceptables les projets de refonte du système éducatif présenté par M. HABY.

Le Bureau de la Régionale.

Vie de la Régionale Parisienne de l'A.P.M.E.P.

A) L'Assemblée Générale du mercredi 14 mai 1975

Elle s'est tenue à l'Institut Henri-Poincaré à 14 h 30, en présence de 28 personnes.

■ **Activités de la Régionale** depuis l'Assemblée Générale du 24 avril 1974.

1° *Journées*

— A l'École Normale d'Auteuil le 8 mai 1974 sur le thème : « groupes homogènes ou hétérogènes de travail — Enseignement de soutien en mathématique ».

— A l'École Normale d'Auteuil les 22 et 23 octobre 1974 sur le thème : « Coordinations à tous les niveaux ».

Des comptes-rendus de ces journées sont parus dans le bulletin.

2° *Conférences et débats*

— Le 1er février 1975 : « Réussite scolaire et milieu social », débat animé par Mme ISAMBERT-JAMATI.

— Le 12 avril 1975 : « La réforme de l'enseignement des mathématiques et les ensembles ».

Les principaux acteurs du débat furent M. FREUDENTHAL et Mme KRYGOWSKA à l'occasion de leur passage à Paris. L'assistance fut nombreuse.

— Le 14 mai 1975 : « La controverse des logarithmes imaginaires », conférence de Jean-Luc VERLEY.

3° *Groupes de travail*

Étant donnée la faible participation aux groupes de travail des années passées le bureau a hésité à reconduire ce genre d'activités. Il a néanmoins mis sur pied pour le 3e trimestre 74-75 les 3 groupes suivants :

— étude critique de manuels,

— problèmes de hiérarchie, contrôle, inspection dans l'enseignement,

— relations A.P.M.-I.R.E.M.

4° A la fin des journées d'octobre 1974 il est apparu nécessaire de susciter de façon locale des réunions d'enseignants de 1er et 2e cycle et plus particulièrement d'enseignants de 4e, 3e, 2e. Le Bureau a eu connaissance de deux réunions de ce genre, une au lycée de Massy, l'autre à Saint-Maur. Dans chacun des cas les enseignants ont souhaité ne pas en rester là.

■ **Départementale de Seine-Saint-Denis**

Elle a ses activités propres que les circulaires régionales annoncent chaque fois que c'est possible :

— le 7 mai 1975 : conférence de Paul ROUGEE : « Pratique mathématique en Physique ».

Il paraît souhaitable, c'est un vœu émis chaque année, que se développent des activités locales en plus grand nombre.

■ **Bilan financier**

Période du 16 avril 1974 au 30 avril 1975

DÉPENSES :		
— Impression, expédition des cahiers 29 à 32 et de la circulaire nº 2	23 765,87	
— Expédition des ouvrages pour la Côte-d'Ivoire	3 493,24	
— Frais de secrétariat	1 800	
— Journées 74 de la Régionale	1 359	
TOTAL	30 418,11	
RECETTES :		
— Ventes diverses : chantiers, mots, etc.	1 806,40	
— Cotisations volontaires : 73-74 (126) et 74-75 (919)	10 450	
— Ristourne nationale	3 093	
— Journée 74 de la Régionale	103	
TOTAL	15 452,40	
DÉFICIT pour l'année 74-75 :		
30 418,11 — 15 452,40		15 065,71
— Solde au 15 avril 1974	67 337,65	
— Intérêt vente de bons du C.L.	21 937,50	
— Achat de 30 000 F de bons (6 mois) du Crédit Lyonnais pour 29 071,20 d'où l'intérêt	928.80	
	90 203,95	
DÉFICIT		15 065,71
— Solde au 30 avril 1975 :		
— C.C.P.	3 923,15	
— Crédit Lyonnais	41 215,09	
— Placement C. L.	30 000	
	75 138,24	

B) Réunion de Comité de la Régionale le 21 mai 1975

Présents: Josette ADDA, Agnès BEAULIEU, Nicole CHOUCHAN, Roger CUCULIERE, Gilbert GRIBONVAL, Claude HAMEAU, Gérard HOUSSIN, Gérard RAPEGNO, Jean VETTICOZ.

Excusés: Claude BLANZIN, Daniel LACOMBE, Maurice LOI.

1° RENOUVELLEMENT DU BUREAU :

— *Président:* Josette ADDA, 10, rue Vandrezanne, 75013 Paris.

— *Secrétaire:* Gérard RAPEGNO, 4, avenue de Verdun, 92170 Vanves.
Adjoint: Claude BLANZIN.

— *Trésorier:* Jean VETTICOZ,
Adjoint: Gérard HOUSSIN.
C.C.P. de la Régionale : 25-108-63, Paris, 13, rue du Jura, 75013 Paris.

— *Bulletin:* Gilbert GRIBONVAL.

— *Comité de rédaction:* Josette ADDA,
Roger CUCULIÈRE,
Gérard RAPEGNO.

2° PRÉPARATION DES JOURNÉES INTER-RÉGIONALES ET DÉPARTEMENTALES DU 1er JUIN AU MANS.

3° PRÉVISIONS D'ACTIVITÉS POUR 1975-76.

C) Une Réunion d'enseignants 1er cycle - 2e cycle

Une réunion a eu lieu au Lycée classique Fustel de Coulanges, à Massy, entre professeurs de mathéma tique de 2de et professeurs de mathématique de 3e des C.E.S. du district de Massy.

Un débat très ouvert a permis d'analyser les difficultés rencontrées dans le 1er et dans le 2e cycle. Il a fait sentir à chacun la nécessité de contacts plus fréquents entre enseignants. Il semble qu'une certaine coordination soit à la fois souhaitable et possible.

Les enseignants de 3e ont demandé à ceux de 2de d'ouvrir la discussion en exposant leurs problèmes, afin d'essayer d'en rechercher les causes et d'étudier les remèdes possibles dans l'enseignement du 1er cycle.

1re constatation: le calcul dans $\mathbb{R}$ n'est pas acquis :

— les élèves de 2de C buttent sur des exercices simples de calcul numérique (réductions de fractions au même dénominateur, simplifications...);

— l'ensemble des réels est mal connu : pour beaucoup, un réel, c'est un nombre décimal!!!

L'origine de ces difficultés semble se situer au niveau de la classe de 4e. D'après les instructions officielles « ... on ne proposera pas à des élèves de

4e des exercices de virtuosité sur les fractions. C'est en 3e seulement qu'on prendra des fractions et de leurs propriétés particulières (simplification, choix d'un dénominateur commun...) une habitude plus habile ».

Les enseignants du 1er cycle sont partagés :

— certains réservent effectivement les exercices de calcul dans $\mathbb{R}$ à la classe de 3e;

— d'autres préfèrent les aborder « sérieusement » dès la classe de 4e.

Une remarque : le programme de 3e ne serait pas lourd en lui-même, n'était l'obligation fréquente de terminer en 3e celui de 4e?...

2e constatation : les élèves de 2de ont de grosses difficultés de raisonnement et ne savent pas construire une démonstration correcte :

— ils distinguent mal le cas particulier du cas général, les hypothèses des conclusions. La notion de réciproque semble n'avoir jamais été vue, des collègues de 3e attirent l'attention sur le fait que la géométrie du 1er cycle est essentiellement analytique et qu'on rencontre assez peu d'exercices permettant véritablement un raisonnement. Il semble que l'enseignement du 1er cycle néglige le raisonnement au profit du calcul, du moins jusqu'à la classe de 4e (mais les élèves sont-ils capables de raisonner plus tôt?). L'utilisation des diagrammes sagittaux est critiquée, ainsi que le travail sur fiches : le raisonnement y est fait d'avance, l'élève reproduit le modèle donné sans vraiment comprendre.

Par contre les enseignants de 2de ne semblent pas rencontrer de difficultés en ce qui concerne la géométrie affine.

3e constatation : l'utilisation du vocabulaire de la logique se fait trop tôt et souvent mal :

Les élèves utilisent à tort et à travers implications et équivalences... Les professeurs de 2de souhaitent presque voir arriver des élèves ignorant ces symboles, et se réserver ainsi de les introduire.

Ces sujets délicats amènent les participants à souhaiter un travail en collaboration avec les collègues enseignants de français (utilisation de « si... alors », de la négation). En effet de nombreuses difficultés rencontrées se situent d'abord au niveau du langage.

Jusqu'en 3e notre enseignement s'adresse à des élèves de tous niveaux, dont une partie seulement accèdera à un enseignement long scientifique. Aussi, il semble qu'on se trouve, dans le 1er cycle, devoir faire un choix : doit-on donner priorité au calcul, au raisonnement? Le problème reste ouvert.

4e constatation : parmi les élèves envoyés en 2de C, certains connaissent des échecs monumentaux. Les raisons peuvent en être diverses; on peut cependant noter :

— des difficultés d'adaptation : on est bien plus exigeant avec eux au point de vue du raisonnement;

— des difficultés d'ordre psychologique : ils étaient bons élèves en 3e, ils se retrouvent médiocres ou faibles en début de 2de. Certains « s'accrochent », d'autres se découragent.

Comment savoir ce qu'on exigera d'eux? Vaut-il mieux redoubler une 3e ou une 2de?

Les enseignants de 3e demandent : envoyons-nous trop d'élèves en C? Les enseignants de 2de ne semblent pas souhaiter une plus grande sévérité dans l'orientation.

Beaucoup de questions restent donc posées et, en conclusion, tous les participants souhaitent des contacts plus fréquents entre enseignants de 3e et de 2de.

Que faire?

Les enseignants de 3e désireux de suivre leurs élèves envoyés en 2de pourraient entrer en relation avec le professeur de math de 2de; cela semblerait plus intéressant que la seule connaissance du bulletin du 1er trimestre.

Il reste à trouver le temps et la volonté de passer des projets aux actes.

M. BERNON,
Anette GRIBONVAL,
Hervé et Monique HAMON.

Réussite scolaire et appartenance sociale

Viviane ISAMBERT-JAMATI

Avant de traiter des conditions sociales de la *réussite scolaire*, il faut faire le point sur quelques données concernant les inégalités actuelles de *fréquentation* en France; les deux phénomènes sont liés, mais il reste des cas où le problème de la réussite ou de l'échec n'a même pas à être posé. Même dans un pays à forte scolarité il y a une sous fréquentation de l'école par la classe ouvrière.

Sous fréquentation au niveau de la maternelle. Elle est uniformément fréquentée ou presque (comme le sont les premières années de l'école élémentaire) à 5 ans. Mais à 2, 3 et 4 ans elle l'est inégalement. Les enfants qui ont actuellement une douzaine d'années étaient à l'école maternelle dès 4 ans dans les proportions suivantes :

— enfants d'ouvriers agricoles : 57 %;
— enfants d'ouvriers : 80 %;
— enfants des professions libérales et cadres supérieurs : 95 %.

Or la Maternelle a, pour la réussite ultérieure, une efficacité. On sait par exemple que redoublent le C. P. :

— sur ceux qui ont fréquenté la Maternelle deux ans ou plus : 10 %;
— sur ceux qui ne l'ont pas fréquentée : 25 %.

Un tel constat fait penser qu'elle est plus nécessaire encore pour les enfants d'ouvriers (à qui elle était originairement destinée) qu'aux autres.

Un peu plus tard, dès qu'il y a différenciation de l'école, les écarts de fréquentation se traduisent en différence de « type » suivi, ce qui a pour l'avenir

les conséquences que l'on sait. D'après les chiffres les plus récents, l'ensemble des 6e de type I en France comptait 16 % d'enfants de cadres supérieurs et professions libérales (qui constituent à peine 8 % de la génération correspondante) et 34 % d'enfants d'ouvriers et ouvriers agricoles (qui constituent environ 45 % de la génération correspondante). Si on ajoutait à cela les enfants des cadres moyens on s'apercevrait que ce type est dans une certaine mesure accaparé par les enfants appartenant à la minorité privilégiée.

A l'autre bout les enfants de cadres supérieurs et professions libérales ne comptent que pour 0,5 % des effectifs de 6e type III, les enfants d'ouvriers et d'ouvriers agricoles y représentent 65 % de l'effectif. Ce type II est presque réservé aux enfants des milieux populaires.

Enfin à l'entrée dans l'enseignement supérieur (où nous disposons à nouveau de taux et non plus seulement de compositions sociales), les fils et filles d'ouvriers agricoles ont 6 % de chances d'entrer, les fils et filles d'ouvriers 8 %, les fils et filles de cadres supérieurs et professions libérales ont 55 % de chances d'entrer.

On voit à travers ces quelques chiffres-repères qu'il ne s'agit pas de simples inégalités, mais bien de situations radicalement différentes, qui préparent à des places opposées dans la division du travail social.

*
* *

Un deuxième préalable à l'exposé des écarts sociaux de réussite scolaire peut être celui des écarts sociaux de dépenses éducatives. Même les dépenses proprement liées aux travaux scolaires (fournitures, transports, éventuellement manuels) au cours des phases réputées gratuites de la scolarité ne sont pas uniformes, et on peut imaginer que les mieux équipés soient mieux placés pour réussir (1).

Profession des parents	Dépense annuelle moyenne par enfant (F 1972) relative à l'enseignement stricto sensu école élémentaire
Ouvriers	150
Agriculteurs.	210
Cadres moyens	235
C.S. et Prof. Lib.	255

(1) Enquête de l'I.R.E.D.U. de Dijon, publication A.T.P. du C.N.R.S., n° 2, 1975. Il s'agit d'une enquête limitée.

Quant aux dépenses « péri-scolaires » relatives à des activités culturelles ou sportives (achat de livres, disques, cinéma, voyages...) dont on peut imaginer l'effet à tous les niveaux de la scolarité sur la réussite scolaire, voici leur distribution.

Profession des parents	Dépense annuelle moyenne par enfant (F 1972) relative aux activités socio-culturelles		
	École élémentaire	1er cycle type I	2e cycle long. classique et moderne
Ouvriers	50	85	130
Agriculteurs	160	125	215
Cadres moyens	130	285	400
Cadres sup. et Prof. Lib. .	300	410	750

Sans doute dépense-t-on d'autant plus en cette matière, dans toutes les couches sociales, que les enfants sont dans des établissements plus avancés; mais l'écart, lui, est partout très important d'une couche à une autre, et il permet de préciser la notion de « conditions socio-économiques du travail scolaire ». Même si au-delà du primaire des parts de bourses aident les familles nombreuses qui n'ont qu'un faible revenu, les conditions sont loin d'être égalisées.

***

Traitons enfin de la réussite et de l'échec eux-mêmes. Pour comparer les études qui ont été faites à cet égard il faut avoir en tête la relativité de la notion; il ne s'agit ni des aptitudes supposées antérieurs à la scolarité, ni du niveau absolu de connaissances et de savoir faire, mais du degré auquel telles connaissances sont acquises, par rapport aux attentes de l'institution, elles-mêmes définies par des programmes. Quant aux critères utilisés dans les analyses, ils vont de la simple réussite aux examens formels jusqu'aux tests standardisés de connaissances, en passant par l'évaluation donnée par les maîtres, notée ou non.

Le redoublement est un des critères classiques, avec sa traduction ultérieure en retard. Ainsi l'âge moyen à la fin du C.M. 2 s'étale de 11 ans pour les enfants de cadres supérieurs à presque 13 ans pour les enfants d'ouvriers agricoles, alors que tous ou presque sont entrés au C.P. à 6 ans. Le seul redoublement du C.P. concerne 24 % des enfants d'ouvriers agricoles et 17 % des

enfants d'ouvriers, contre 2 % seulement des enfants de cadres supérieurs et à peine 5 % des enfants de cadres moyens (1).

Ces écarts sont bien connus. Lorsqu'on en a conscience, on n'ose généralement plus aujourd'hui les attribuer à une inégale répartition des « dons » dans la population, les plus riches étant aussi les mieux pourvus par la nature... Reste cependant à les interpréter.

On néglige trop souvent, parce que c'est trivial, d'attribuer une part des difficultés scolaires des enfants de la classe ouvrière à leurs conditions matérielles. Des éléments de cet ordre sont primordiaux, qu'on le veuille ou non : récupération au moment des vacances ou après maladie, installation pour effectuer le « travail à la maison », mais aussi pour se concentrer sur une quelconque activité intellectuelle (2). Quant aux données fournies plus haut sur les dépenses scolaires et périscolaires, elles sont éloquentes : certains écoliers sont privilégiés par des dépenses culturelles de toutes sortes, et cette familiarité culturelle va jouer sur leur appréhension des matières scolaires.

Il existe aussi, faut-il le rappeler, des médiations moins évidentes des échecs. Pourtant un facteur souvent invoqué comme le travail de la mère n'a aucun effet direct sur la réussite scolaire. On a en effet pu établir que les femmes qui travaillent ne s'occupent pas moins du travail scolaire de leurs enfants que celles (souvent plus chargées d'enfants, il faut le remarquer) qui restent au foyer. Mais parmi les facteurs familiaux, le niveau des études des parents joue un très grand rôle : dans une tranche de revenus moyenne, on a trouvé de 36 % à 65 % de « bons et excellents élèves » en passant des parents sans aucun diplôme aux parents ayant suivi des études supérieures.

Il y a d'ailleurs entre père et mère une certaine compensation, mais la combinatoire n'est pas aussi simple qu'on pourrait le penser (3). Le nombre d'enfants dans la famille ne joue pas uniformément sur la réussite dans toutes les couches sociales : il n'a pratiquement pas d'incidence dans les familles de cadres, alors que plus la famille est nombreuse, moins sont grandes les chances de réussite dans la classe ouvrière.

Quant au recours aux médiations normatives dans l'explication des échecs, il est de deux sortes : accent sur les motivations, accent sur l'imprégnation culturelle.

L'accent sur les motivations suppose que la volonté individuelle est la source de la réussite. Cette volonté serait forte ou faible selon les valeurs mises en relief dans les familles et les incitations fournies aux enfants. Ainsi, explicitement ou non, on se réfère au schéma page suivante.

Or si l'on observe les caractères attribués ainsi à la classe ouvrière, on s'aperçoit qu'ils sont tous négatifs : c'est une classe qui ne sait pas vivre... On mélange là le constat d'une condition (réactions devant le présent ou l'avenir, liées à la condition prolétarienne elle-même) et l'affirmation d'une morale de classe (concurrence comme base positive des relations).

---

(1) Ces derniers chiffres sont tirés d'*Études et Documents*, n° 28 (1974), publié par le Service d'informations économiques et statistiques du Ministère de l'Éducation.

(2) A cet égard les données relatives aux étudiants de l'enseignement supérieur sont très frappantes : plus de 40 % de fils d'ouvriers fréquentant le 1er cycle ont une activité professionnelle (ce qui est très rare chez les fils de cadres); or, l'exercice d'une activité professionnelle *double* les chances d'échec à l'examen...

(3) Toutes ces données sont extraites d'enquêtes de l'Institut National d'Études Démographiques. Les principaux résultats sont publiés dans *Population et Enseignement*, I.N.E.D. et P.U.F., 1970.

Tendances éducatives attribuées à la bourgeoisie	*Tendances éducatives attribuées à la classe ouvrière*
— fermeté, contrôle, maîtrise de soi, punch dans la compétition, acceptation des satisfactions différées, orientation vers l'avenir.	— laxisme, irrégularité d'humeur et d'exigence, indifférence à la compétition, intolérance aux satisfactions différées, souci du seul présent.

Au niveau de la réalité immédiate, tout n'est pas faux dans ce schéma, mais il devient mystificateur lorsqu'il sert pour deux usages pourtant différents :

— pour transférer sur les familles la responsabilité des échecs (« les familles ouvrières ne savent pas motiver pour l'école, on n'y peut rien »);

— ou pour appliquer une sorte de pédagogie de la motivation qui a pour résultat une intégration sociale bien plus qu'une égalisation des apprentissages. Certaines formes de pédagogie compensatoire, dont les initiateurs (souvent américains) sont pleins de bonne volonté, reposent ainsi sur une conception orthopédique : « ces gens-là doivent apprendre à vivre, faute de pouvoir les redresser eux-mêmes, on redressera leurs enfants » (1).

L'accent sur la transmission culturelle est plus fréquent en France. Selon cette problématique le milieu familial jouerait par les stimulations directes (dialogue plus ou moins précoce et intensif entre la mère et l'enfant, attention de l'enfant plus ou moins attiré sur les formes et sur les principes), par imprégnation (échanges entre adultes se déroulant devant l'enfant), par environnement (accès variable aux objets culturels). Sur un terrain inégalement préparé s'implantent inégalement les savoir-faire littéraires, les appréciations esthétiques, mais aussi les mécanismes opératoires complexes, comportant un certain niveau de généralité. La subtilité, la longueur même de l'imprégnation rendent alors la situation difficilement remédiable dans cette perspective. Même si les analyses ne comportent aucune opprobre pour ceux qui n'ont pas cet acquis, être nourri dans le sérail de l'arbitraire culturel *et* de l'abstraction scientifique est finalement irremplaçable.

De nouveau la véracité des remarques ci-dessus est largement indubitable. Mais leurs limites surgissent lorsqu'on ne distingue pas l'arbitraire d'un côté, l'heuristique et le méthodique de l'autre. L'imprégnation (y compris linguistique) ne joue pas au même degré pour l'un et l'autre, et l'école pourrait beaucoup, si elle le voulait, en matière d'approche méthodique.

C'est ici précisément que se révèle l'efficacité d'un certain système scolaire par rapport à une division de la société en classes. A aucun niveau, actuellement, l'école n'est faite pour briser cette division, de sorte qu'elle utilise fort bien les imprégnations différentes, et les motivations différentes pour situer les enfants dans des segments bien déterminés du système. Une problématique centrée sur les familles et leur appartenance sociale prend les échecs scolaires avec résignation. Une problématique centrée sur l'école, mais lui attribuant un fonctionnement automatique, bien huilé, dans l'intérêt de la classe domi-

---

(1) Cf. mon propre article dans *L'Orientation scolaire et professionnelle*, 1973, nº 4 : « Les handicaps socio-culturels et leurs remèdes pédagogiques ».

nante, ne serait pas non plus ouverte sur l'avenir. Ne vaut-il pas mieux, intégrant les apports des uns et des autres, tenter de situer, à tout moment, la marge de manœuvre dans l'école, en mettant le doigt sur les faiblesses du système. Prendre conscience par exemple de l'appartenance sociale contradictoire des enseignants eux-mêmes, et de l'orientation des actions qu'ils peuvent ainsi mener, est alors nécessaire.

Pour cela, il ne faudrait plus seulement des analyses de spécialistes, mais un constant débat entre les spécialistes et les praticiens de l'éducation. C'est ce débat qui est ouvert ici.

Viviane ISAMBERT-JAMATI.

La réforme de l'enseignement des mathématiques et les ensembles

Notre Régionale a eu la chance de profiter de la visite que les Prs Z. KRYGOWSKA (Directrice de l'Institut Mathématique de l'École Normale Supérieure de Cracovie, Pologne) et H. FREUDENTHAL (Directeur de l'I.O.W.O. — Institut pour le Développement de l'Enseignement des Mathématiques, Utrecht, Pays-Bas), ont rendu à l'Université Paris-VII à l'Invitation de l'U.E.R. de Mathématiques et de l'U.E.R. de Didactique des Disciplines.

Du 7 au 24 avril 1975, ils ont accepté l'un et l'autre, avec une constante bonne humeur, de faire un à deux exposés chaque jour et de répondre aux innombrables questions dont tous les ont harcelés sans pitié. Bien que nous ayons beaucoup abusé d'eux, nous pouvons être sûrs que l'enthousiasme qu'ils ont senti chez tous les auditeurs nous fera pardonner.

Étudiants et professeurs de la région parisienne (et même plusieurs collègues de province) sont très nombreux à avoir suivi certaines séances seulement en regrettant de ne pas pouvoir participer à toutes les activités. Nous avons donc tâché d'organiser des secrétariats de séances pour établir des comptes rendus (les conférences ont également été enregistrées mais nous ne disposions pas des moyens d'en faire la transcription complète). En accord avec l'U.E.R. de Didactique des Disciplines nous pensons pouvoir prochainement diffuser tous ces comptes rendus.

Dès le présent numéro, nous publions les notes prises par N. CHOUCHAN et G. RAPEGNO au grand débat que notre régionale avait organisé le samedi 12 avril 1975 entre Mme KRYGOWSKA et M. FREUDENTHAL, sur le sujet « la réforme de l'enseignement des mathématiques et les ensembles ».

Notre Comité avait, en effet, voulu saisir l'occasion de cette visite exceptionnelle pour mettre sur la sellette ce qui est le problème le plus brûlant parmi nous à l'heure actuelle : après avoir imposé une *réforme* (ce que nous voulions être un « mouvement de réforme »), nous avons vu qu'il ne s'agissait plus que d'un « programme » (un « nouveau » programme, mais un programme seulement) et nous assistons tous à la dégénérescence de ce programme.

L'A.P.M. se doit de maintenr son esprit de rénovation permanente, c'est pourquoi elle se devait d'organiser un débat sur « la réforme 6 ans après ».

Pour restreindre le sujet, nous avons pensé à nous limiter à la question des ensembles parce que c'est le point où, justement, on a constaté le plus de dégénérescence et aussi parce que nous savions que, sur ce sujet, nos deux invités avaient des opinions suffisamment différentes pour que nous assistions à un véritable dialogue et que nous puissions bien approfondir le problème en entendant des opinions contradictoires sur certains points. Ainsi nous avions une séance particulièrement enrichissante (et même, les applaudissements l'ont montré, enthousiasmante) mais qui, à aucun moment, n'a pu donner l'illusion que, pour des spécialistes, aussi éminents soient-ils (et nous avions probablement là les deux plus éminents à l'heure actuelle), le problème de l'enseignement des mathématiques est résolu.

Au nom de toute la Régionale, le Comité les remercie de l'élan qu'ils ont donné pour lancer dans une nouvelle étape de recherche en commun tous les membres de notre association.

Josette ADDA.

Compte rendu du débat du samedi 12 avril 1975 entre Mme KRYGOWSKA et M. FREUDENTHAL

N.D.L.R.: Malgré le style direct, ce qui suit n'est qu'un résumé et une transposition d'interventions orales. Le lecteur tiendra compte du fait que cette transposition a pu trahir (involontairement) la pensée des intervenants, d'autant que ceux-ci improvisaient, avec tous les à-peu-près que cela comporte.

Les interventions de Mme KRYGOWSKA et de M. FREUDENTHAL sont précédées respectivement de K et F.

F : Il y a deux points dans le thème de ce débat :

1° La réforme de l'enseignement des mathématiques;

2° Les ensembles.

La réforme, ça m'intéresse beaucoup, mais les ensembles ça m'ennuie (rires). Pas les ensembles (je suis mathématicien) mais les débats sur les ensembles, la lutte pour ou contre. Cela dure depuis trop longtemps. Je suis peut-être coupable! j'ai ouvert cette bataille il y a quelques années. En Allemagne, ça a commencé plus tôt, ça a duré plus longtemps mais je crois que ce sera bientôt fini.

Des deux points, je crois que l'un contredit l'autre : il n'y a pas de réforme de l'enseignement des mathématiques tant qu'il y a des luttes sur *rien* (ce n'est vraiment rien, comparé au reste des mathématiques). En ce moment, en Allemagne, toute l'attention s'épuise dans ces débats, et c'est certainement mauvais.

Pour moi, cela importe peu qu'on veuille faire des ensembles dans les premières classes, pourvu que cela ait quelque sens dans l'enseignement qu'on donne. Chez nous, nous avons préparé un curriculum pour l'école primaire, (qui commence à 6 ans), dans lequel il n'y a pas d'ensembles (il y a beaucoup d'autres choses!). Mais si l'on veut faire des ensembles, pourquoi pas? En

mathématique, on peut faire toute chose d'une manière raisonnable, rationnelle. Ça doit être possible.

Mais le problème n'est pas *ce* qu'on fait, mais *comment* on le fait!

Les livres et documents d'enseignement des mathématiques ont été très influencés par les idées de PIAGET et de BRUNER, par la notion psychologique d' « acquisition de concepts ». On transforme les mathématiques en un système de concepts; mais la mathématique ce n'est pas un système de concepts.

On sait que la mathématique est difficile à cause de l'abstraction. Alors des réformateurs en ont tiré la conclusion qu'il fallait introduire des notions plus abstraites, quitte, d'autre part, à concrétiser ces notions (mais en général ce sont de *fausses* concrétisations!).

Nous, nous avons choisi la voie de la concrétisation vraie.

Les fausses concrétisations, c'est ce qui arrive fréquement si on enseigne les ensembles, mais ce n'est pas typique de la théorie des ensembles, c'est une tendance très générale : une abstraction trop forte, et puis des concrétisations fausses.

C'est une question de politique d'éducation. On a pensé, en Allemagne, qu'on pouvait réformer en écrivant de nouveaux textes et en donnant ces textes aux instituteurs et aux professeurs en leur disant : « Enseignez cela »! Et c'est impossible! La réforme demande une grande préparation.

Chez nous, nous avons procédé autrement, nous comptons introduire ce curriculum en 1980 environ. Nous avons préparé notre réforme dans l'enseignement secondaire par une préparation des professeurs, et je pense que chez nous, dans le secondaire, cette réforme a été un grand succès : le nombre d'enfants qui suivent un enseignement de mathématiques après 14 ans va en croissant. (Avant 40 %, maintenant plus de 50 % et cela croît toujours.) La mathématique n'est plus sélective comme elle l'était avant la réforme et je crois que c'est aussi un succès.

Il faut voir toutes les choses combinées et pas seulement parler des ensembles. Il y a des problèmes plus importants.

Il y a les problèmes d'entendement des mathématiques, les problèmes d'enseignement des mathématiques, et les problèmes de préparation de ceux qui doivent enseigner les mathématiques.

K : Je ne suis pas opposée à ces propos. Je pense qu'il est vrai qu'on parle trop des ensembles. J'ai été même étonnée qu'on traite cela, en France, comme un problème de premier plan, car dans mon pays c'est différent, je vais expliquer pourquoi :

On peut enseigner bien *sans* les ensembles et on peut enseigner bien *avec* les ensembles.

Je pense que si on critique un programme en ne mettant l'accent que sur un seul aspect, c'est une fuite devant l'analyse plus profonde des raisons qui font que cet enseignement n'est pas bon. Et d'abord je suis contre les anecdotes qu'on raconte partout. Certaines sont réelles et rapportent des réponses stupides ou des fautes. Alors on généralise.

D'autres sont inventées : par exemple, en Pologne, celle-ci construite pour protester contre certaines démarches pédagogiques. « Le père : Combien c'est deux et cinq. L'enfant : Ça je ne sais pas, mais je sais que c'est commutatif et que « $2 + 5$ c'est $5 + 2$ ».

Mais ce n'est pas à partir de la seule observation des fautes et des difficultés

des élèves qu'on peut critiquer, parce que la mathématique, comme l'a dit M. FREUDENTHAL, est difficile; et apprendre les mathématiques, c'est toujours vaincre les difficultés. C'est essentiel.

Oui, l'élève a des difficultés, oui il fait des fautes, mais ces fautes sont heureuses. Il ne faut pas en rester là, mais c'est souvent le point de départ de quelque chose d'important et d'instructif.

Dans l'enseignement traditionnel, nous avions aussi des difficultés et des réponses ridicules. Je peux raconter une anecdote car elle s'est passée dans ma classe (je suivais ces élèves de 12, 13 ans depuis deux ans et je suis donc responsable de cette faute) : une fillette écrit « $x + yz = xyz$ ». Elle a « simplifié » parce qu'elle a été habituée à toujours chercher la forme la plus simple. On a travaillé sur cette faute, j'ai donné des contre-exemples, etc. et j'étais alors convaincue que le point était éclairci.

Quand l'une des fillettes me dit : « Mais, madame, l'année prochaine, ce sera possible d'écrire comme ça, parce que dans la classe précédente nous ne pouvions pas soustraire 10 de 6 et maintenant nous savons le faire, alors peut-être que l'an prochain il sera possible d'écrire : « $x + yz = xyz$ ». Que pouvais-je répondre à cela? (rires).

On peut donc aussi raconter des anecdotes sur l'enseignement traditionnel. Nos élèves avaient des difficultés, et nous, enseignants, en avions aussi.

Notre réforme, introduite en 1963, a enrichi le programme de l'école de base (qui regroupe sur 8 années obligatoires tous les enfants avec les mêmes programmes et les mêmes manuels). Mais la réforme n'a pas introduit les ensembles à l'école de base. Ils ont été introduits en première classe de ce que nous appelons l'École secondaire (*) (qui commence à 15 ans) sous forme de langage ensembliste.

En deuxième classe, il y a un peu de logique et on approfondit le langage ensembliste, mais je veux souligner qu'il ne s'agit pas du tout d'une vulgarisation de la théorie des ensembles.

Il s'agit seulement d'un langage qui est utilisé par la suite pour la mathématisation, celle, par exemple, de la géométrie. Nous pensons qu'il faut avoir un langage adéquat pour décrire les intuitions, pour les ordonner.

Ce qui s'est passé alors chez nous est différent de la France : les deux premières années, il y a eu des opposants, les parents protestaient parce qu'ils ne comprenaient pas ce dont il s'agissait et parce qu'ils ne pouvaient plus aider leurs enfants à la maison. Mais actuellement, après une dizaine d'années, le problème est tout à fait réglé; il n'y a plus de discussions sur les ensembles, parce que ces ensembles ne sont pas très importants dans notre conception : c'est un moyen d'expression, qui facilite vraiment le langage : au lieu de dire « le lieu géométrique des points ayant cette propriété », on dit : « l'ensemble des points ayant cette propriété ». Ce langage nous permet de formuler cer-

---

(*) On distingue, après l'école de base :
— Lycée d'enseignement général (4 ans),
— École technique (4, 5 ans),
— École professionnelle.

Les trois donnent le baccalauréat et le droit de se présenter à l'examen d'entrée à l'École Supérieure.

En mathématique, c'est le même programme et le même manuel pour Lycée et École technique et il y a un programme un peu allégé et un manuel plus facile pour l'École professionnelle.

tains théorèmes comme « L'intersection de deux convexes est un convexe ». Et c'est seulement dans ce sens qu'on l'a développé.

En dernière classe de Lycée, on introduit les probabilités. Alors on a besoin d'un peu d'algèbre des ensembles et il s'est avéré que, au contraire d'ici, nous avons donné trop peu de développement à ce langage. Certains pensent maintenant que nous tardons trop à l'introduire. Mais nous nous trouvons devant une nouvelle réforme; la structure scolaire est changée, nous aurons 10 ans d'école de base et seulement 2 ans de spécialisation. Et nous ne savons pas encore ce que seront les programmes qui sont en cours d'élaboration.

Pour en revenir à notre position actuelle, il me semble qu'elle se différencie aussi bien de la conception qui existe en France que de celle de M. FREUDENTHAL.

En effet nous distinguons deux choses :

— *Les notions mathématiqques* qui sont l'objet de la recherche des élèves Objet, comme « le parallélogramme », « la fonction linéaire », etc. dont on étudie les propriétés.

— *Les notions auxiliaires*, qui nous aident à simplifier le langage. Par exemple « les groupes » de transformation. Nous ne faisons aucune théorie du groupe abstrait. Nous parlons de groupes mais nous ne faisons rien sur le groupe. Ce n'est qu'un langage. Au lieu de dire « j'ai une loi dans un ensemble qui etc., etc. » on dit : « j'ai un groupe ».

C'est pourquoi il me semble que le problème n'est pas aussi aigu chez nous qu'ici. Mais il y a aussi chez nous une tendance à exagérer dans la 1re classe. Nous luttons contre, nous ne voulons pas avoir l'étude des ensembles. Nous voulons seulement donner aux enfants le pouvoir de s'exprimer, mais de façon que, dans la suite, ils n'aient pas besoin de changer de langage, comme c'était le cas avant, en passant de l'école de base au Lycée. Nous pensons que peu à peu on doit habituer les enfants à exprimer leurs intuitions, leurs observations dans ce langage parce que c'est déjà une mathématisation et parce qu'il est plus facile de correctement mathématiser dans un langage déjà adapté.

Ainsi pour les vecteurs de la géométrie, on dit que c'est un espace linéaire (*), on donne d'autres exemples d'espaces linéaires, mais l'espace linéaire n'est pas l'objet de l'étude. C'est un raccourci mais c'est instructif parce que les élèves retrouvent à d'autres moments de leurs études la même notion.

F : Nous nous distinguons par la façon dont nous explicitons ou non certains concepts mathématiques. Naturellement, il y a des ensembles, des intersections, des réunions dans notre enseignement, mais cela n'est pas explicite dans notre programme.

Autre exemple : nous avons des fonctions, beaucoup de fonctions, à partir de la deuxième classe de l'enseignement primaire, mais jamais le mot n'est prononcé. On se sert des notions de façon opérationnelle sans les faire expliciter. Naturellement il y a des notions que nous explicitons mais je crois que la différence dans nos points de vue réside dans la quantité de notions abstraites, de choses qu'on ne peut pas voir.

(*) [= vectoriel].

K : C'est intéressant de soulever ce problème parce qu'il y a une différence plus essentielle encore, en ce sens que nous, nous considérons qu'à un certain moment (a un *certain* moment et il faut discuter : *quel* est ce moment : c'est important) quand la notion est déjà implicitement saisie, il faut tout de même délimiter cet objet des autres objets, et nous donnons un nom, un terme.

Alors la discussion peut porter sur le problème : quand? Vous, vous dites que vous éloignez ce moment. Vous utilisez les fonctions, mais vous ne donnez pas le terme fonction. Nous, nous pensons que le terme peut être donné plus tôt et que ça facilite. Si la notion est déjà implicitement saisie, nous ne voyons pas pourquoi ne pas donner son nom.

I : Y a-t-il quelqu'un, dans la salle, qui s'imagine qu'on enseigne la théorie des ensembles dans l'enseignement primaire ou secondaire français.

I (WALUSINSKI) : Il y en a au moins un... (*mouvements divers*), ce n'est pas moi, et il n'est pas dans la salle. Mais un grand mathématicien, professeur au Collège de France m'a dit un jour au téléphone : « J'en ai marre qu'on enseigne la théorie des ensembles à l'école maternelle ». Je lui ai dit : « Première nouvelle, je connais un peu les écoles maternelles et je suis persuadé qu'on n'y enseigne pas la théorie des ensembles »...

K : Cela dépend de ce qu'on entend par « faire la théorie des ensembles à l'école ». Naturellement on ne la fait pas, mais si on consacre toute une étape de l'enseignement, sans interruption à étudier les ensembles, les relations, etc., c'est dans ce sens qu'on fait de la théorie des ensembles au niveau de l'école. Nous, nous ne le faisons pas.

F : Je suis d'accord. Si on parle seulement un langage ensembliste, si on utilise seulement les signes d'intersection, réunion, etc, ce n'est pas de la théorie des ensembles. Mais, du moment qu'on définit le nombre cardinal à partir de l'équipotence, du moment qu'on introduit la définition de la transsitivité et qu'on étudie les propriétés des relations à un niveau très élevé, on fait de la théorie des ensembles.

I (CASSÉ) : M. FREUDENTHAL a mis l'accent sur la concrétisation (la fausse et la vraie) et sur l'abstraction et M^me^ KRYGOWSKA a insisté sur le langage qui supporte l'abstraction et sur l'intérêt de ce langage qu'il n'y aura pas à changer, qui pourra se poursuivre et qui s'est bâti et construit plus lentement. Mais elle a aussi mis le doigt sur le vrai problème : A quel moment faut-il introduire ce langage? M. KRYGOWSKA a précisé ce qu'on faisait dans son pays. M. FREUDENTHAL l'a moins précisé. C'est à ce sujet qu'il serait intéressant de voir les divergences.

F : Chez nous, à l'école élémentaire, on prend les mots du langage quotidien. Par exemple, on parle de l'aire (*) d'une figure à partir de la deuxième classe. Les enfants savent ce que c'est, cela est sûr. Mais si on introduit la

(*) Le mot équivalent aux Pays-Bas fait partie du langage courant (voir plus loin).

définition : l'aire du rectangle c'est longueur multiplié par largeur, ils oublient la notion naturelle.

Le seul nouveau mot que nous introduisons est « graphique » parce qu'il est nécessaire pour décrire le caractère de cette figure.

Nous travaillons avec la droite numérique mais nous n'introduisons pas ce mot.

On utilise les coordonnées mais pas l'usage du mot. Les coordonnées sont introduites dans une ville de type américain (avec rues et avenues) et ce sont simplement des adresses, d'abord compliquées, puis réduites à deux nombres.

Le problème change dans l'enseignement secondaire. Cela fait six ans que nous avons réformé cet enseignement, nous devons refaire cette réforme. C'est un âge où l'on peut introduire des notions plus abstraites. L'expérience nous montre que jusqu'à 10-12 ans, l'enfant pense en termes géométriques, il voit les choses. Il voit des vérités dans les figures et dans la réalité. Je crois qu'on peut détruire cette vue immédiate si on introduit trop tôt des mots pour des notions abstraites. Voilà ma réponse.

Vous avez aussi parlé des concrétisations fausses. Une de ces concrétisations fausses, c'est l'ensemble visible, rendu visible par les « patates ». Ce n'est pas nécessaire. J'ai l'expérience de cela avec les enfants. Vous connaissez le problème des « tiroirs » « y a-t-il dans le monde deux personnes qui ont le même nombre de cheveux? » C'est trop compliqué pour les enfants. On commence par demander s'il y a deux enfants dans la classe qui ont même mois de naissance. Ici aussi il y a des ensembles. Mais on ne peut les dessiner. Il faut les trouver. Ce sont des ensembles d'un caractère tout différent et si on les visualise sur le papier, on trompe les enfants : voici pourquoi je suis contre ces concrétisations fausses.

K : La première question que je voudrais vous poser est celle-ci : pourquoi pensez-vous que le fait d'introduire un terme pour une notion abstraite a des conséquences mauvaises. Nous n'avons pas constaté cela. En deuxième année d'enseignement (enfants de 8 ans) les enfants ont des coordonnées; dans la classe, il y a les rangs et les colonnes. Chaque enfant a deux nombres, le premier c'est son « prénom arithmétique », le deuxième son « nom arithmétique », mais on dit aux enfants que ce sont des « coordonnées ». Je voudrais comprendre pourquoi c'est mauvais?

A propos des ensembles « concrets », on peut aussi discuter ce problème. Je pense que même avec des « patates » on peut bien enseigner (mais on peut aussi faire des choses horribles). Chez nous par exemple, au milieu de la leçon, on ouvre les fenêtres, les élèves doivent se lever et faire des exercices physiques. On dit par exemple : que se lèvent les enfants dont les coordonnées satisfont $x = y$. Ces enfants se lèvent, sautent, etc. Puis $x + y = 4$, ces enfants se lèvent, sautent, etc. Il s'agit d'ensembles *concrets* définis par une condition à deux variables. Est-ce mauvais? Et pourquoi? (*rires*).

F : Il y a des manières concrètes d'introduire des notions abstraites, mais souvent les instituteurs, les professeurs donnent la définition d'un ensemble, d'une relation, d'une fonction. Heureusement que les enfants savent au départ ce qu'est un nombre, sinon on commencerait l'enseignement en définissant ce qu'est le nombre.

I (LACOMBE) : En France, on ne peut pas dire qu'il n'y a pas de théorie des ensembles mais seulement un langage commode.

En France, il y a un « bloc ensembliste », important et coupé du reste. On a fait des études sur les manuels de 6e-5e. Le substantif le plus fréquent et de loin, ce n'est pas « ensemble », c'est « flèche ».

Ce bloc ensembliste a un énorme matériel de langage et de pseudo-langage, de représentations et de pseudo-représentations. Des anecdotes! il y en a un florilège concernant non les élèves (ce qui pourrait être légitime) mais les professeurs et surtout les manuels. Dans un même manuel on trouve le dessin : O–□ pour représenter un ensemble quelconque, et quelques pages plus loin pour représenter l'ensemble vide. Dans un même manuel on trouve :

On trouve ailleurs : $\{x|x$ est une voyelle$\}$ sans distinction entre les niveaux mathématiques et méta-mathématiques.

On trouve $\{x|x$ est une lettre du mot classe $\}$.

Un professeur fait copier dix fois : « Les éléments s'écrivent avec des minuscules et les ensembles avec des majuscules ». Dans un livre programmé : « Les éléments d'un ensemble doivent être différents ».

Tout ceci indique qu'il y a, sinon une théorie des ensembles », du moins un bloc ensembliste dont on peut penser qu'il est cancéreux. Cependant, je trouve l'introduction des ensembles dans l'enseignement intéressante parce qu'elle jette une lumière vive sur le fonctionnement scolaire et sur l'accélération de l'histoire. Puisqu'on oppose souvent « ensemble » et « géométrie euclidienne », on peut comparer ce qui s'est passé pour les deux :

On pouvait penser que la géométrie c'était naturel et commode, qu'elle faisait partie des mathématiques et que son étude pouvait avoir un intérêt historique à cause de la géométrie grecque. Au lieu de cela, aux XVIIIe et XIXe siècles, le système enseignant a réussi à développer, sous le nom de « géométrie plane », quelque chose qui n'avait aucun rapport ni avec la géométrie de l'époque, ni avec la géométrie grecque. Et ceci a pris un siècle.

Il s'est passé la même chose avec la théorie des ensembles. On est parti de constatations de bon sens : tous les mathématiciens utilisent le langage ensembliste, l'étude de ce langage a un intérêt historique (Cantor) et mathématique (Théorie des ensembles). Et en dix ans (accélération de l'histoire!), ces idées de bon sens ont donné lieu à une tumeur totalement étrangère à la mathématique réelle.

Devant un phénomène si net, l'explication par les « bavures » ou par l'insuffisance de formation des maîtres semble bien mince. Cette formation est nécessaire mais il ne faut pas tout rejeter sur les maîtres sans regarder comment fonctionne le système éducatif.

Si le bloc ensembliste est devenu ce qu'il est, c'est pour des raisons portant sur l'ensemble du système scolaire. Il faut d'abord se demander à quoi servent les mathématiques dans ce système : les ensembles, cet énorme

bloc purement verbal a, chez nous, un rôle évidemment sélectif. Et s'il n'en est pas ainsi dans d'autres pays, c'est que la sélection y joue par d'autres moyens (*rires*)!

I : Je propose une analogie utile pour expliquer la différence entre mathématiques modernes et traditionnelles. On peut parler une langue sans en avoir étudié la grammaire; il semble utile pour mieux la maîtriser de faire aussi de la grammaire, mais de là à ne faire *que* de la grammaire! Vous voyez ce que j'entends par vocabulaire et grammaire.

F : Cette analogie couramment faite m'apparaît incorrecte. La grammaire, en logique, sert à fabriquer automatiquement des formules. Ce n'est pas la même chose pour le langage. S'il est naturel d'apprendre une langue avec de la grammaire, ce n'est pas nécessaire pour le langage ensembliste, dans lequel les notions sont évidentes. Utiliser la commutativité de l'intersection, ce n'est pas faire de la grammaire.

K : Le langage scolaire n'est pas le langage formalisé avec sa syntaxe. C'est un langage mixte qui utilise le langage quotidien, un peu de terminologie et quelques symboles. On m'a peut-être mal comprise parce que j'ai utilisé le terme trop ambitieux de « langage ensembliste », je voulais seulement dire que des termes ensemblistes sont introduits, sans faire de syntaxe, pour parler d'une certaine manière de faits mathématiques.

Personnellement, je suis contre l'algèbre des ensembles. L'élève ne l'utilise jamais; quand il raisonne, c'est globalement, et il y a des choses intuitives qu'on ne peut expulser.

Je dois faire une remarque pour être honnête. Mon intervention a pu laisser croire qu'il n'y a pas, chez nous, de fautes comme celles signalées [par un intervenant]. Nos premiers livres pour l'enseignement primaire contiennent des fautes analogues, bien que peu fréquentes. Il y a aussi des patates avec des dessins, mais ces livres ont été contrôlés par un comité de mathématiciens... On ne trouve d'ailleurs pas d'utilisation de symboles du type « x est une voyelle ». A propos du cardinal, il y a eu discussion sur la liaison à faire ou non entre ensembles équipotents et cardinal. Finalement cette notion a été mise en évidence dans la première classe. Et pourtant, quand les enfants voient deux ensembles équipotents, ils disent qu'ils ont le même nombre d'éléments parce qu'ils comptent : « cinq » et « cinq » et non parce qu'ils établissent une bijection. La notion est faussée, car, comme l'a dit M. FREUDENTHAL, les enfants savent ce qu'est un nombre avant de savoir ce qu'est une bijection. Mais si, à des enfants qui ne savent pas encore bien compter, on présente beaucoup de châtaignes et de boîtes d'allumettes en leur demandant s'il y en a « autant », afin de « mettre chaque châtaigne dans son lit », alors intervient la bijection. Les enfants disent « il y a le même nombre, bien qu'ils soient incapables de nommer ce nombre.

I (LOPATA) : Pensez-vous que le modèle des ensembles flous, avec une appartenance pondérée de 0 à 1, puisse avoir un intérêt pédagogique pour redresser certaines erreurs.

N.D.L.R.: Bruits divers et discussion confuse dans la salle. Après des explications de l'intervenant plusieurs auditeurs semblent n'avoir toujours qu'une vision « floue » de ces fameux ensembles alors que certains spécialistes ne semblent pas d'accord avec l'intervenant.

F : Je ne crois pas que ce soient des ensembles d'un point de vue mathématique.

I (LACOMBE) : La simple idée d'envisager l'introduction pédagogique des ensembles flous (et d'une logique floue) me paraît le type même de la façon dont fonctionne le système. C'est une fuite en avant pour culpabiliser les professeurs : « Si ça marche mal, c'est que vous n'en savez pas assez ». « Les ensembles ne passent pas, lisez donc BOURBAKI! De toute façon, les ensembles c'est dépassé, maintenant c'est les catégories ».

Les élèves ne comprennent pas les notions élémentaires de logique classique? « Recourrons à une autre logique, avec valeurs dans une algèbre de Boole », ou bien « Recourons à la logique modale », etc. etc.

On réussira toujours à trouver quelque chose que les professeurs ne savent pas (ni même d'éminents collègues du Supérieur).

Le problème, c'est de faire comprendre aux enfants un minimum de choses élémentaires, dont la logique classique. S'ils ne la comprennent pas, s'ils ne savent pas distinguer le vrai du faux, c'est parce qu'on les habitue à distinguer le correct de l'incorrect, le bien du mal, l'autorisé de l'interdit (qui peut d'ailleurs changer d'une classe à l'autre). Il y a ce qu'*on a le droit* d'écrire et ce qu'on n'a pas le droit d'écrire.

Ainsi les mathématiques sont une émanation du système social. Il y a ce qu'on a le droit de faire en vertu de ce qui est imposé par le maître qui agit suivant les directives de l'inspecteur qui agit suivant les directives du ministre. Il y a la théorie des ensembles de FONTANET; il y aura la théorie des catégories de HABY! (rires).

I : Je voudrais qu'on revienne sur la question de la finalité.

F : Je ne peux répondre : je n'ai pas défendu les ensembles.

K : J'ai déjà répondu.

F : Pourquoi fait-on des ensembles en mathématique? A un certain niveau, ils sont utiles, mais si je ne vois pas ce niveau à l'école élémentaire, alors je ne les utiliserai pas, et je pense que Cantor lui-même ne les aurait pas utilisés pour résoudre les problèmes qui se posent à l'école élémentaire.

I (WALUSINSKI) : Ça ne me paraît pas un bon argument. Cantor n'enseignait pas à l'école élémentaire.

F : On a voulu utiliser les mêmes notions que Cantor. Mais tant qu'il ne s'agit que d'ensembles finis, je n'en vois pas la nécessité. Avec un autre système d'enseignement peut-être, mais pas dans l'enseignement tel qu'il existe.

K : J'ai déjà dit qu'on peut enseigner de la bonne mathématique sans les ensembles, mais j'ai aussi défini leur finalité : ils simplifient le langage et ils orientent la mathématisation vers l'utilisation de certains concepts de façon à ce qu'il ne soit plus nécessaire de dire aux enfants : « Oubliez ce que vous avez appris précédemment ».

En ce qui concerne la simplification du langage, je voudrais donner un exemple : dans la géométrie euclidienne et chez Hilbert encore, la droite n'est pas l'ensemble de ses points. Euclide n'admet que le nombre de points qui lui est utile et chez Hilbert la droite est un objet défini axiomatiquement et ce n'est que la demi-droite qui apparaît comme ensemble de points. Dans un livre de géométrie classique paru à Varsovie, la première édition suit l'axiomatique de Hilbert. Tout est doublé :

la droite — l'ensemble des points incidents,

le plan — l'ensemble des points incidents.

Dans la nouvelle édition, cela n'existe plus; il y a seulement la description ensembliste de la géométrie, ce qui en simplifie énormément la présentation.

En ce qui concerne l'orientation des mathématiques dans une direction qui nous paraît profitable : avant, les enfants employaient des termes métaphysiques, « la droite s'éloigne, à l'infini, dans les deux directions; on peut la prolonger indéfiniment ». Maintenant les enfants disent : « Aucune droite ne peut être contenue dans un disque ». On définit de cette façon une figure illimitée et cette définition est utilisable dans des raisonnements.

I : Au delà du langage, il y a progrès de la pensée. C'est un progrès de dire d'une figure limitée qu'elle est contenue dans un disque au lieu de dire qu'elle n'est pas illimitée. Vous avez dit que vous utilisiez le mot « groupe » à propos d'une loi qui est ceci et cela. Le fait d'avoir assemblé « ceci » et « cela » constitue un progrès. Auparavant les objets mathématiques, c'étaient les nombres et les figures, maintenant on mathématise beaucoup plus de situations qu'avant. C'est un progrès essentiel.

I (LACOMBE) : Oui, virtuellement! Avec un bon langage, on pourrait mathématiser de nombreuses choses, on pourrait distinguer limité et illimité, convexe ou non, et pourquoi pas (ce serait utile!), fini et infini. Mais le malheur, c'est qu'à force d'enseigner ce qui n'est même pas un langage; un vocabulaire et des notations, on n'a plus le temps ni d'étudier la grammaire de ce langage, ni même de faire des exercices intéressants.

I : On a parlé tout à l'heure d'introduire les catégories ou même les ensembles flous dans l'enseignement. J'ai peur qu'on en arrive à une manipulation purement abstraite d'objets abstraits, aux dépens de l'intuition. On constate maintenant que des élèves de 4e ont du mal pour tracer une figure.

K : Si j'ai bien compris, vous dites qu'on progresse dans le formalisme. Je suis bien d'accord qu'il ne faut pas le faire (*rires*).

Pourquoi la logique que nous enseignons n'a-t-elle pas eu assez d'effets pratiques : parce qu'elle est trop formelle. Il faut enseigner une logique réellement utilisable, en se fondant sur le sens et non sur la syntaxe.

I : Cela fait une dizaine d'années, nous luttions pour la réforme. Maintenant nous sentons le vent de la contre-réforme, et les critiques faites ici renforcent ce vent. N'y a-t-il pas un danger de revenir à ce qui se faisait avant et qui était aussi critiquable.

I : Quelqu'un a critiqué les manuels actuels, mais que dire de ceux d'il y a 20 ans! Cela n'a rien à voir avec la réforme. Les mathématiques étaient aussi sélectives avant que maintenant. On a l'impression que vous voulez démolir cette réforme.

Il faut sans doute être raisonnable dans les réformes, mais il faut tout de même évoluer. On ne peut enseigner aujourd'hui comme il y a 20 ans!

F : Les erreurs modernes sont plus prétentieuses et plus dangereuses!

I (WALUSINSKI) : Je ne suis pas d'accord! Les erreurs sont toujours mauvaises, mais, en même temps, indispensables pour être dépassées. M. FREUDENTHAL a dit que dans son pays la réforme avait été bien faite...

F : Pas exactement!

I (WALUSINSKI) : ... ou, du moins, qu'il y avait plus d'élèves dans le secondaire qui faisaient des mathématiques. Chez nous, la réforme n'a pas été bien faite. C'est normal! Sinon ce serait inquiétant, cela voudrait dire que l'enseignement devrait rester « ad vitam eternam » ce qu'il est actuellement, ce qu'un ministre a décidé qu'il soit. Les ministres changeraient et pas les mathématiques! (*rires*).

A propos des anciens manuels, je me souviens d'une conférence de Laurent Schwarz montrant qu'une démonstration du livre de Hadamard était fausse. D'ici quelques années, un autre mathématicien fera probablement de même pour les démonstrations de Schwarz.

Ce qui compte ce n'est pas la réforme qui a été faite, mais celle qui reste à faire : l'enseignement ne sera jamais bien fait. Il faudrait des enseignants très bien formés et des élèves parfaitement adaptés à cette formation. Fort heureusement, les élèves sont imprévisibles. Ce qui est pernicieux c'est que certains, y compris dans l'administration, ont pensé après la parution des programmes de la commission Lichnérowicz : « Ça y est, la réforme est finie .»

Alors que c'est à partir de cette commission, qu'on a institué, du moins le croyait-on, la réforme permanente de l'enseignement des mathématiques. Il faudra toujours améliorer les choses, il y aura toujours des différents comme celui qui existe entre M. FREUDENTHAL et M^me^ KRYGKOWSKA. M. FREUDENTHAL nous dit : je veux bien que les élèves manipulent des fonctions, mais je ne veux pas qu'ils prononcent ce gros mot! (*rires*).

Peut-être est-il difficile à prononcer en néerlandais! Je ne dis pas que les élèves de l'école élémentaire doivent nécessairement apprendre le mot « fonctions », mais à force de manipuler des « trucs », des « machines » (et dans chaque classe c'est différent), pourquoi un professeur ne dirait-il pas : Ce sont des fonctions. Est-ce plus difficile de dire « fonction » que « bidule ». On m'a appris qu'il est préférable en s'adressant aux très jeunes enfants, d'appeler cet animal à quatre pattes un « cheval » plutôt qu'un « dada ».

K : Je suis d'accord. Et je pense que, malgré toutes les erreurs dont nous parlions, c'est une bonne chose d'avoir fait cette modernisation. L'enseignement de la physique, de la biologie (programmes, travaux pratiques) ont changé, sous la pression de l'extérieur. On ne peut plus enseigner la physique comme au temps de Newton. Nous vivons dans un autre monde. En mathématiques, cela aurait pu continuer très longtemps, il n'y avait pas cette pression de l'extérieur. Cette révolution, où nous avons peut-être ici ou là commis des fautes, a quand même apporté quelque chose.

Il faut souligner que nous avons fait cette réforme à un moment difficile, du point de vue sociologique. Nous avons maintenant des masses d'élèves et non plus une élite, nous avons besoin d'une masse de professeurs et on ne peut s'attendre à ce qu'ils soient tous des génies. Il faut prendre en considération cette situation.

Chez nous aussi, notre réforme est critiquée. Parce que le programme est évidemment trop chargé, parce que la géométrie y occupe trop de place. Mais les professeurs de l'enseignement supérieur constatent que les élèves leur arrivent avec l'esprit plus ouvert et qu'ils raisonnent mieux. C'est déjà un résultat.

Une dernière remarque à propos de savoir s'il faut ou non employer tel terme : Un jour, dans une rue de Cracovie, je remarque deux élèves d'école maternelle en grande discussion. J'écoute :

« — Je te dis que l'Amérique du Sud est un continent.

— Mais non, ce n'est pas un continent, c'est seulement avec l'Amérique du Nord qu'elle forme un continent.

— Non, parce qu'il y a un canal entre les deux »!

Cela a été pour moi une leçon. C'était une discussion sur la notion abstraite de continent. Nos enfants ont la télévision. Ils comprennent beaucoup de chose. Ils sont différents de nous, quand nous étions enfants. Aussi je pense qu'on peut introduire certains termes assez tôt.

I : On a fait allusion, tout à l'heure, à la réforme permanente. On croyait en effet pouvoir réviser les choses tous les 4 ans, et c'était un espoir. Mais, dans ce cas, il ne s'est pas produit d'accélération de l'histoire; au contraire, on a l'impression que cette possibilité d'évolution est complètement tombée à l'eau. C'est dommage, car si on peut faire des choses intéressantes avec les programmes de 6^e-5^e, en 4^e-3^e on a plus de difficultés.

F : Quelqu'un a parlé des erreurs. On peut le faire dans diverses perspectives. Il y a les petites erreurs des manuels, mais on peut aussi faire une réforme qui soit globalement une erreur. Et il ne faut pas objecter la réforme continue, parce qu'on peut continuer les erreurs! (*rires*).

Faire une réforme est une grande responsabilité, il faut la préparer sérieusement. On a parlé de points de vue différents, mais il y a aussi des points de vue faux, comme celui, en pédagogie, de partir de l'abstraction pour aller aux fausses concrétisations.

C'est aussi une erreur de penser qu'on peut faire une réforme sans préparer les maîtres. Cette erreur a été faite en France, et en Allemagne. Il faut une stratégie pour préparer les gens, maîtres et parents. Il faut employer des moyens modernes, comme la télévision.

I (JULLIEN) : Quelle part fait-on, dans vos pays, à l'informatique?

K : On commence actuellement.

I (JULLIEN) : A quel niveau? Quel volume?

K : Je ne suis pas très au courant. Il en est question pour les nouveaux programmes à l'étude pour l'école en dix ans.

C'est l'occasion pour moi de signaler une grande faute pédagogique que nous avons faite. Nous avons introduit les probabilités en dernière classe des lycées, sans préparation intuitive antérieure. Ça a été un échec. Les élèves ne comprennent pas et ne savent pas les appliquer. Il est donc question maintenant d'introduire plus tôt les probabilités. Peut-être ne commettrons-nous pas la même erreur pour l'informatique. D'ailleurs nous avons déjà introduit les organigrammes à l'école élémentaire. Ils sont trouvés par les élèves eux-mêmes à propos d'algorithmes de calcul. C'est peut-être une préparation à l'informatique.

F : Nous avons développé un cours facultatif d'informatique auquel une centaine d'écoles participent. Les enfants de 14-15 ans y consacrent 1 heure par semaine. C'est un succès.

I : Quel est le matériel utilisé?

F : C'est vraiment de l'informatique. Il y a un ordinateur central et les élèves fabriquent leurs cartes.

I : Vous avez parlé tout à l'heure de l'augmentation du nombre d'élèves qui suivent des cours de mathématiques. Est-ce que, dans votre pays, tous les élèves qui désirent suivre ces cours le peuvent? En France, il y a plus de candidats que de places dans les sections scientifiques.

F : Sur les enfants de 14 à 16 ans qui suivent ces cours, 15 % environ poursuivent à l'Université.

I : Chez nous, on voit des enfants qui n'aiment pas les mathématiques, qui s'y ennuient et qui, pourtant, demandent à suivre une section C (*bruits divers*).

I (LOPATA) : Quel est le langage employé dans l'enseignement de l'informatique. En France, nous avons un langage d'enseignement.

F : Chez nous, on utilise le langage ECOL.

K : Chez nous, c'est un langage appelé BASIC.

I : Y a-t-il un terminal dans chaque établissement qui participe à l'enseignement d'informatique?

F : Non, les élèves font des cartes et les envoient.

I : Il est pourtant intéressant pour des élèves de travailler sur des terminaux.

I (LACOMBE) : Si on pose le problème général de la réforme des programmes, il y a un certain nombre d'illusions que nous pouvons maintenant reconnaître comme telles : c'est de croire à l'utilité des expériences, à l'influence du milieu extérieur scientifique et à l'utilité pratique.

Des expériences, il y en avait d'intéressantes avant la réforme actuelle. On a vu ce qui est advenu. Quant à la pression du milieu extérieur scientifique, voyons l'histoire : à l'âge d'or des « mathématiques utiles », les mathématiques n'étaient utiles à rien et ne cherchaient pas à l'être. Les manuels de terminale et de Taupe n'avaient rien à voir avec de quelconques applications. Officiellement, l'avantage des mathématiques était de favoriser une certaine forme d'esprit. L'important pour le Polytechnicien, ce n'était pas de connaître telle ou telle branche des mathématiques, c'était d'avoir reçu la formation spécifique de Polytechnique, ce qui l'autorisait pour le restant de ses jours à être chef du service des ventes et à ne plus faire de mathématiques.

Dans un contexte social qui n'est plus le contexte actuel et où, seuls, les fils de la bourgeoisie fréquentaient les lycées, les mathématiques servaient à persuader 9/10e des fils de bourgeois qu'ils ne pouvaient être chef du service des ventes (mais ils pouvaient devenir médecin, avocat ou administrateur). Actuellement, la sélection consiste essentiellement à persuader les 9/10e des enfants que s'ils deviennent O.S. ou chômeurs c'est parce qu'ils sont bêtes. Et l'étude des coniques et quadriques en Taupe, ce n'est plus adapté à cet objectif, par contre une certaine théorie des ensembles enseignée depuis la maternelle c'est ce qu'il y a de mieux.

C'est pour cela que je n'ai pas d'illusion; si on remplace le programme actuel par un autre programme, ce sera la même chose.

Il y a dix ans, on aurait pu se dire que si on voulait faire quelque chose d'utile, il fallait que les enfants comprennent, au plus vite, du calcul numérique, des probabilités, des statistiques, de l'informatique. Or cela n'existe pas ou mal dans les programmes actuels. Et même si on les met dans un programme futur, on voit bien comment cela évoluera.

I : Mme KRYKOWSKA a dit tout à l'heure qu'une garantie pour les manuels, c'est le contrôle d'une commission de mathématiciens. Mais je connais, en France, des collections dirigées par des professeurs d'Université et quand je lis ces manuels, de 6e-5e, je ne les comprends pas. On y distingue, par exemple, « fonction » et « application ». Je ne crois pas que c'est la réforme elle-même et les ensembles en particulier qui amènent une dégradation du niveau mathématique des élèves. Je pense même, qu'avec un bon enseignement, les élèves pourraient beaucoup mieux réfléchir grâce à ces mathématiques.

I : On a parlé d'aire, tout à l'heure, comme d'un mot naturel. Je pense, au contraire, que dans ce sens, c'est un mot scolaire.

F : Aux Pays-Bas, c'est un mot très ordinaire. Mais le mot n'est même pas nécessaire. On peut dire « Colore la moitié de cette figure en rouge ».

I : Je voudrais rappeler cette phrase de H. Poincaré dans « La Science et l'Hypothèse » : « La théorie des ensembles est une maladie de jeunesse dont les mathématiques guériront vite » (*bruits divers*).

K : Mais, à la même époque, Lebesgues, dans un congrès sur les fondements des mathématiques, disait : « Du paradis des ensembles, jamais nous ne serons expulsés ».

(Applaudissements saluant M. FREUDENTHAL qui doit partir, ayant un train à prendre. Le débat continue avec Mme KRYGOWSKA seule.)

I : Une des difficultés de la réforme, c'est que les parents ont très peur car ils ne peuvent aider leurs enfants. Je sais que ce n'est pas une bonne objection, mais comment y apporter la réponse?

K : Les parents ne doivent pas aider les enfants.

I : C'est aux enfants à apprendre aux parents.

I : On peut organiser des réunions de parents.

I : Il y a le problème des heures de soutien. Il semble qu'en 6e, on veuille réduire l'horaire et passer de 4 heures à 3 heures. Ce serait un retour en arrière. En ce qui concerne les parents, il est normal qu'ils ne puissent suivre leurs enfants qui font, en général, plus d'études qu'eux. D'où l'utilité d'heures de soutien.

I : Il serait illusoire de croire qu'une heure de plus ou un meilleur programme pourrait améliorer les choses. On a parlé tout à l'heure, et c'est caractéristique, d'enfants qui s'ennuyaient en mathématiques, mais qui demandaient quand même à faire la section C. Les réformes ne servent pas à rendre les mathématiques plus amusantes ou plus utiles mais à culpabiliser les enfants et leurs parents.

I (LOPATA) : Est-ce qu'en Pologne, les Sciences Humaines, comme la Linguistique, la Sociologie, ... sont des sources d'inspiration?

K : Nous sommes en pleine recherche à propos des applications des mathématiques. Nos mathématiques comme les vôtres sont trop éloignées de la réalité. Il faudrait trouver de vrais problèmes et non des problèmes construits artificiellement. Nous n'y sommes pas encore arrivés.

En ce qui concerne les parents : chez nous, les jeunes enfants, jusqu'à la 4e année, ne doivent pas travailler à la maison. Il faut informer les parents. Chaque génération sait des choses que les générations précédentes ne connaissent pas. Un élève de 14 ans, par exemple, a des connaissances en Biologie que je n'ai pas.

I : A entendre les diverses interventions, je me demande s'il existe encore des professeurs et des élèves heureux (*bruits divers*). On peut encore être heureux avec les enfants et si on ne l'est pas c'est peut-être qu'on aime les mathématiques plus que les enfants.

K : Il y a un problème de la formation des enseignants à l'Université. La plupart des professeurs n'ont pas reçu de formation pédagogique durant leurs études. On part du principe faux que celui qui connaît bien les mathématiques est un bon enseignant.

I (LOPATA) : N'a-t-on pas parlé d'une situation difficile d'un point de vue sociologique, qui gagnerait à être mathématisée.

I (LACOMBE) : On a des statistiques, mais c'est grossier. Il est difficile de distinguer dans l'échec scolaire la part spécifique d'échec en mathématiques, et encore plus difficile de détecter les causes de cet échec. Il faudrait faire des observations, des enquêtes. Mais le fait brut est déjà instructif : l'aide reçue par l'enfant du milieu familial ne se réduit pas à l'aide pour les problèmes, le soir. (Avec les nouveaux programmes cette aide devrait moins jouer.) Par contre doivent intervenir les conversations à table, etc. Cela montre l'importance du rôle joué par le langage en mathématique, indépendamment du contenu du programme.

On cherche à culpabiliser l'élève : « pas intelligent », à culpabiliser les parents : « n'aident pas assez », à culpabiliser les professeurs : « pas assez matheux » ou « n'aiment pas les élèves »; alors que c'est le système qu'il faudrait étudier. On parlait de groupes du soir pour les parents, mais combien y aurait-il de femmes de ménage ou d'ouvriers dans ces groupes?

I : Les parents qui nous posent ce genre de question sont d'anciens privilégiés de l'enseignement. Il n'y a aucune raison d'aider les parents à aider leurs enfants. L'aide doit être apportée par l'école dans des groupes de soutiens, à condition que ce ne soit pas dans des classes différentes.

I : Je connais peu d'élèves qui soient heureux en mathématiques, même si certains pensent que « ça leur fait du bien » (*bruits divers*).

I : Un problème m'inquiète. Toutes disciplines confondues, on trouve un rapport « nombre d'enseignants sur nombre d'enseignés » de 1/15.

Qu'en est-il en mathématiques?

(*Discussion confuse et sans aboutissement.*)

I (LOPATA) : Y a-t-il un livre polonais de pédagogie élémentaire traduit en français?

K : On me propose de traduire mon livre « Esquisse d'une didactique en Mathématiques » mais je ne suis pas encore décidée. D'ailleurs vous trouveriez peut-être ce livre choquant et trop traditionnel! (*applaudissements finaux*).

Aux abonnés

Le prochain n° des " Chantiers de Pédagogie mathématique" contiendra un bulletin de réabonnement permettant l'expédition des numéros de l'année scolaire 75-76 et du premier numéro de l'année scolaire 76-77 (≃ 4 numéros).
N'oubliez pas de le remplir et de le retourner dès sa réception.

Aux personnes désirant s'abonner

Les personnes *non abonnées actuellement* et désireuses de recevoir régulièrement les " Chantiers de Pédagogie mathémathique " dès le numéro 34 doivent se faire connaître auprès de

Gilbert GRIBONVAL
129, avenue du Général-Leclerc
91120 Palaiseau

en joignant un chèque à l'ordre de

Régionale Parisienne de l'APMEP
(C.C.P. 25 108 63 Paris)

d'un montant de 15 F.

Supplément au Bulletin de l'A.P.M.E.P. n° de Juin 1975

Printed in France — *Le Directeur de la publication:* G. GRIBONVAL

FD Imp. Alençonnaise - B.P. 57 - 61002 Alençon
Dépôt légal 2e trimestre 1975 : 83.503 - C.P.P.P. 35.996