CHANTIERS de Pédagogie Mathématique

APMEP Bulletin de la Régionale d'Ile-de-France
Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public
Septembre 2000 n° 106

Se former : oui, mais quand ?

On se souvient que Claude Allègre avait inauguré ses fonctions en reprochant vivement aux enseignants d'être en stage pendant la période scolaire et suggérait que ce temps de formation pourrait se dérouler durant les vacances...

C'était oublier de mentionner que de nombreux collègues s'inscrivaient chaque année à des université d'été (UE) et se formaient donc pendant leurs vacances estivales. Pas de stage « poterie », mais des stages de didactique, des formations disciplinaires ou de culture générale comme l'astronomie, pour lesquels il y avait deux fois plus de candidats que de places. Tous les participants ont apprécié d'avoir au cours de ces UE, du temps pour réfléchir loin des copies et des élèves, la possibilité de rencontrer des collègues de toutes les académies, et, selon les UE, des collègues à la fois du primaire, du secondaire et du supérieur autour d'un même sujet. Un grand bol d'air frais permettait à chacun de reprendre le chemin de ses classes plein d'énergie et de nouveaux projets.

Il faut malheureusement parler au passé car (sous les directives de C. Allègre ? ces choses là se préparent un an à l'avance) le Bulletin Officiel spécial consacré aux UE s'est considérablement amaigri, celles consacrées aux mathématiques étant très rares. Cela empêche donc les professeurs qui en avait l'intention, de se former pendant les vacances. Pendant l'année, c'est mauvais pour l'assiduité, pendant l'été, cela coûte trop cher. Alors quand ? Qu'en pense Jack Lang ?

Une expérience de formation sous forme de journées capitalisables sur plusieurs années, a été entreprise dans l'académie de Toulouse, sur l'impulsion de la régionale de l'APMEP. Le soutien de l'institution, très présent au début, s'est affaibli ensuite, au point que la poursuite de cette expérience est en suspens. Il y a les intentions, et il y a la volonté politique.

En attendant que l'on reconnaisse et redéfinisse clairement notre droit à la formation continue, nous pourrons toujours aller nous ressourcer (à nos frais, ce qui ne doit pas déplaire à nos ministres) les 28, 29 et 30 octobre à Nice lors des journées de l'APMEP. Avant cela, nous vous proposons de venir écouter André Deledicq le mercredi 27 septembre nous parler de la jubilation en mathématiques (voir dernière page).

Bonne rentrée à tous et au plaisir de vous retrouver le 27 pour la rentrée de notre régionale.

Valérie LAROSE

SOMMAIRE

Brevet de collèges 2
Des maths pour tous au CDI 5
Expérimentation de problèmes ouverts 6
Bombelli et l'ennéagone 7
Pot de rentrée 8

A la régionale d'Ile de France la présidence tourne !

Le comité de la régionale a élu, lors de sa réunion du 7 juin dernier, le bureau suivant :

Présidente : Valérie LAROSE
Vice-président : Rémy COSTE
Trésorière : Françoise MAGNA
Secrétaire : Christine ZELTY

Prix du numéro : 10 F. Abonnement : 30 F (1 an, 4 numéros par an)
Directeur de la publication : Rémy COSTE – Rédaction : Hervé HAMON et Francis SLAWNY
A.P.M.E.P. 26, rue Duméril, 75013 PARIS
☎ 01 42 17 08 53 – 🖷 01 42 17 08 77 – e-mail apmep_idf@post.club-internet.fr
Imprimé par Atelier Blanqui – 9, bd Auguste Blanqui, 75013 PARIS – ISSN 0395-7837

EXAMENS

Brevet des collèges dans les académies de Paris-Créteil-Versailles

Le brevet des collèges s'est déroulé les jeudi 29 et vendredi 30 juin dans les académies de Paris-Créteil-Versailles obligeant ainsi certains correcteurs de maths ou d'histoire/géographie à revenir lundi 3 juillet pour terminer leurs copies (dans l'académie d'Aix Marseille le brevet a débuté un jour plus tôt et les corrections se sont terminées le 30 juin).

C'était le premier sujet de brevet depuis la mise en place des nouveaux programmes en classe de troisième. Vous trouverez ci-dessous l'énoncé correspondant à la nouveauté enseignée depuis un an, à savoir le calcul du PGCD de deux nombres : cet exercice n'évaluait pas la technicité mais la résolution d'un problème numérique et ne valait que deux points (sur 12 pour la partie numérique).

Nous publions ensuite un texte émanant de la commission d'harmonisation du brevet 2000, suivi de commentaires de Marie-José Houssin.

ENONCÉ SUR LE PGCD

Un philatéliste possède 1631 timbres français et 932 timbres étrangers. Il souhaite vendre toute sa collection en réalisant des lots identiques, c'est à dire comportant le même nombre de timbres et la même répartition de timbres français et étrangers.

1. Calculer le nombre maximum de lots qu'il pourra réaliser.

2. Combien y aura-t-il, dans ce cas, de timbres français et étrangers par lot ?

TEXTE DE LA COMMISSION

La commission d'harmonisation du brevet 2000, réunie pour le Val de Marne, en ce qui concerne les mathématiques vendredi 30 juin (à 10 h au collège Barbusse, Alfortville), s'est interrogée sur le sujet proposé aux candidats de la série collège.

Cette épreuve suscite en effet de nombreuses réactions.

Tout d'abord elle semble avoir été préparée trop rapidement ou avec trop peu de soin.

- Certaines formulations sont incorrectes ou ambiguës ce qui n'est pas acceptable pour une épreuve destinée à des collégiens qui sont loin d'être tous à l'aise avec les énoncés mathématiques. Par ailleurs, cela va à l'encontre de ce que les professeurs essaient avec beaucoup de sérieux et de persévérance d'inculquer à leurs élèves. (erreur dans l'énoncé de ex 4 activités numériques, ce qui ne peut qu'encourager les élèves à « faire comme d'habitude » sans lire les consignes ! ; dans ex 1 activités géométriques « construire l'image du nombre 2000 », alors que l'image d'un nombre concerne plutôt les fonctions que les transformations géométriques ; trois formulations différentes des unités de longueur selon les exercices, alors que les élèves ont besoin de repères stables ; dans ex 3 « la portion OAE » : s'agit-il du triangle ou du secteur circulaire ? etc.)

- Les deux situations géométriques « faux concret », au lieu d'encourager les candidats, conduisent un grand nombre d'entre eux à tout abandonner à partir de la moitié de la deuxième page.

- On trouve très peu de questions de base facilement identifiables.

- Il existe un très grand déséquilibre entre « numérique » et « géométrique » (exercices à support géométrique dans les **trois** parties de l'épreuve).

L'épreuve ne couvre pas aussi bien qu'il est souhaitable les compétences exigibles du programme de troisème : rien sur les systèmes d'équations ni les résolutions de problèmes du premier degré ; rien sur la sphère ; rien sur le repérage dans le plan ; rien sur les vecteurs ; rien sur les polygones réguliers ni les angles inscrits ; rien sur les statistiques au moment même où on essaie de leur donner une importance accrue dans les nouveaux programmes de seconde en prolongement de l'effort fait en collège...

Par contre elle comporte des redites (deux fois le calcul de la longueur de l'hypoténuse dans un triangle rectangle) et un exercice qui semblerait plus adapté à une activité en classe qu'à une épreuve d'évaluation (ex 3 activités numériques)

Elle provoque la déstabilisation des candidats. Nous n'évoquerons ici que l'irréalisme de la situation proposée dans le problème (comment une pyramide évidée en pierre peut-elle tenir « sur la pointe » ? Comment peut-il s'agir d'une fontaine puisqu'il n'est question ni d'alimentation ni d'écoulement ? Si l'on considère la figure comme une représentation géométrique, comment peuvent coexister les segments « en pointillés », c'est-à-dire « ce que l'on ne voit pas » et les segments [AC] et [DB] « en traits pleins » qui n'ont pas d'existence dans l'objet décrit ?)

Les consignes ne sont pas claires (ex 2 1° activités numériques : attend-on une simple lecture ou le détail des calculs ce dernier étant explicitement demandé dans 2° ? Problème B-1° : que signifie « donner la valeur de AT » ? ex 3 activités géométriques : quelle forme de réponse attend-on pour AE ? etc.)

La commission souhaite que le sujet soit confectionné et vérifié avec plus de soin, qu'il encourage les candidats à montrer ce qu'ils savent faire au lieu de les mettre systématiquement en difficulté (« les mathématiques c'est dur, ça n'a rien à voir avec la réalité, c'est fait pour nous embêter... »), que les enseignants ne soient pas découragés par le fossé qui existe entre ce qui se pratique en classe (appel au bon sens, insistance sur l'importance du raisonnement et de la rédaction, application des consignes, mobilisation des connaissances...) et ce qu'ils sont contraints d'accepter en corrigeant le brevet. La

commission souhaite une vraie épreuve d'évaluation, permettant l'application d'un barème cohérent et juste pour l'ensemble des candidats. Elle rappelle sa demande des années précédentes : tenue de la commission d'harmonisation une demi-journée après l'épreuve, et non pendant l'épreuve, de façon à pouvoir étudier des copies d'élèves comme le préconise le B.O. n°31 du 9 septembre 1999 relatif à l'organisation du brevet, et comme cela se déroule dans de nombreux départements.

COMMENTAIRES DE MARIE-JOSÉ HOUSSIN

Les commentaires qui suivent ont été rédigés *a posteriori* à l'aide des notes prises durant la commission et les réactions « à chaud » de correcteurs.

Cette épreuve est destinée à faire le point sur les connaissances que les élèves ont acquises et savent mobiliser : *« les acquisitions à évaluer ont pour référence les programmes de troisième, (...) vis à vis de ces programmes, elles se situent exclusivement dans le cadre des compétences exigibles.(...) Le sujet doit avoir une longueur et une difficulté modérées ; en particulier, le nombre global d'items doit être tel que la plupart des élèves puissent achever l'épreuve dans le temps imparti »* (extraits du B.O. n°31 du 9 septembre 1999).

Et pourtant :

- **L'épreuve est très longue** (voir plus bas) ;

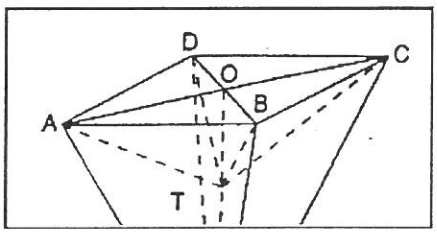
- Certaines questions qui auraient pu être traitées par un grand nombre de candidats **n'ont pas été placées suffisamment en évidence** dans l'énoncé pour que les candidats les plus en difficulté les repèrent facilement : par exemple la question figurant à la dernière ligne de la troisième page : *« Trouver la valeur exacte de* x *en résolvant l'équation 108 - 12x = 80. »* ou **ont été posées dans une situation qui les rendait moins accessibles**, par exemple pour faire calculer le volume d'une pyramide : *« 1) a) Calculer le volume du bassin TABCD. b) Donner sa capacité en litres. 2. Démontrer que le volume de pierre de la fontaine est 36 dm³. »* il était nécessaire de comprendre la figure proposée (nous y reviendrons plus bas) de l'interpréter, de faire appel à une formule du programme de 4ème pas systématiquement reprise dans toutes les classes de 3ème.

Autre exemple : *« KLM est un triangle rectangle en L. a) Calculer la longueur exacte de la longueur KM. b) Calculer l'aire du triangle KLM ».* Faire calculer l'aire du triangle rectangle dont on connaît les longueurs des deux côtés de l'angle droit après avoir fait calculer la longueur de l'hypoténuse ne peut qu'encourager à utiliser cette dernière, de façon erronée !

- **Les figures proposées dans l'énoncé sont loin d'aider les candidats.**

Dans l'exercice 3 des activités géométriques, le triangle concerné par la question 2 est vraiment très incrusté dans la figure, et de dimensions tellement réduites qu'il est difficile de placer le point I et le segment [OI].

Dans le problème, la figure est difficile à interpréter, l'emplacement du point T n'est guère simple à déterminer en raison du grand nombre de segments représentés en pointillés, sans parler du manque de réalisme de la situation proposée (voir plus bas).



- **Du point de vue de la conformité aux compétences exigibles** du programme, la plus grande part des questions se situe à la limite sans pouvoir toutefois être remise en cause. Par contre l'exercice 3 des activités numériques (voir énoncé plus haut) ne nous semble pas entrer dans ce cadre.

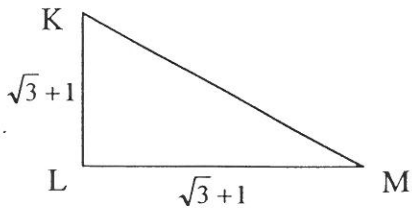
Dans les compétences exigibles, on peut lire : *« Diviseurs communs à deux entiers. Déterminer si deux entiers sont premiers entre eux. Fractions irréductibles. Savoir qu'une fraction est irréductible si son numérateur et son dénominateur sont premiers entre eux. Simplifier une fraction pour la rendre irréductible»*

Mais il n'est pas question de *« mobiliser le calcul du PGCD de deux entiers pour résoudre un problème »* ; la moindre des choses serait dans ce cas de commencer par faire calculer le PGCD de 1631 et 932 afin d'alerter les candidats sur la nécessité de l'utiliser pour résoudre le problème ! (rappelons l'importance donnée à la résolution de problèmes, mais aussi la nécessité d'aider les élèves à s'approprier cette priorité, au lieu de les piéger à chaque occasion).

Nous avons donc décidé de noter cet exercice hors barème de façon à pénaliser le moins possible à la fois les candidats qui n'ont pas traité la question, ne sachant pas quelles connaissances mobiliser, et ceux qui l'ont traitée au moins partiellement et y ont donc passé du temps.

- **Du point de vue de la cohérence des formulations**, indispensable dans un même énoncé, la diversité des présentations d'unité ne semble pas très judicieuse (bien entendu les élèves doivent savoir manier cette diversité, mais pas dans un même énoncé).

• dans les activités numériques pas d'unité (d'accord pour attacher de l'importance surtout au côté numérique dans cette partie, mais alors ne pénalisons pas dans le même temps les candidats qui oublient de mentionner le triangle rectangle, seul possible !)



• dans les activités géométriques, l'unité d'aire est peu lisible : *« OA = 8 m, OB = 90 m (...) l'aire de la portion OAE est égale à 16/3 π m² »*

• dans le problème, il n'y a pas cohérence entre la forme des données et la forme attendue pour la réponse : *« SABCD a pour base le*

carré ABCD de centre O, de côté AB = 6, et pour hauteur SO = 9. (Les longueurs sont données en dm.) », mais : « *le volume de pierre de la fontaine 36 dm³.* »

- **Du point de vue du sens** à donner aux exercices mathématiques, le problème nous semble être une caricature.

Le thème choisi relève du « faux concret ». La figure proposée ne permet pas de comprendre la situation. Il s'agit d'une fontaine en pierre et non d'une pyramide évidée abstraite, il était donc indispensable de présenter le problème en aidant les candidats d'une part à comprendre l'objet à l'aide d'une photo ou d'un schéma réaliste, et d'autre part à mathématiser la situation à l'aide d'une figure géométrique annoncée comme telle.

Qui aurait l'idée de faire varier la profondeur du bassin d'une fontaine en pierrre ? Peut-être le concepteur, sur plan, mais certainement pas le passant, même mathématicien ou candidat au brevet, observant l'objet terminé installé (comment ?) sur son socle !

Qu'apporte la partie B dans le contexte de ce problème ? S'il s'agit de tester la capacité à utiliser la réciproque du théorème de Pythagore, c'est raté puisque la question invite les candidats à commencer leur réponse par « *En utilisant la réciproque...* » ce que nous leur déconseillons fermement depuis la classe de 4ème, pour éviter des confusions entre réciproque et contraposée !

En résumé il ne s'agit pas d'un problème mais d'une suite artificielle de trois exercices sans lien réel ; c'est dommage !

- **Du point de vue de la rigueur mathématique**, plusieurs questions nous semblent mal formulées, par exemple :

• Problème C-3° : on demande aux candidats de représenter une fonction affine ; pratiquement tous savent au moins qu'il faut dessiner une droite. Mais ici un segment est visiblement attendu puisque le repère est déjà préparé sur la copie et ne comprend que le premier quadrant.

• ex 1 activités géométriques : pour un élève de 3ème l'image d'un nombre est un nombre par exemple par une application affine, mais certainement pas une figure... (par association d'idées, pensons à la difficulté de faire comprendre à nos élèves que la somme de deux vecteurs opposés est le vecteur nul et non le nombre zéro)

- **Du point de vue de la longueur de l'épreuve**, certains candidats il est vrai (en général les élèves qui avaient déjà obtenu, avant les épreuves écrites, à un ou deux points près, le total nécessaire à l'obtention du diplôme), ont traité presque entièrement tous les exercices dans le temps imparti, mais ce n'est pas le cas pour la majorité d'entre eux, en particulier ceux qui devaient faire leurs preuves à l'examen, et dans le collège où nous étions réunis, une bonne cinquantaine d'élèves avaient déjà abandonné au bout d'une heure sans avoir pu repérer dans l'énoncé des questions qu'ils auraient su traiter. Nous avons quelque peu modifié le barême proposé pour valoriser les candidats qui avaient su opérer ce repérage, mais cela nous semble du « replâtrage » et nous souhaiterions dans les prochaines années travailler le barême sur un sujet déjà acceptable !

Ce texte a été rédigé sur proposition des participants à la commission à leur demande, et après avoir pris aussi l'avis de correcteurs en particulier du centre de correction « Albert Cron » par Marie-José HOUSSIN, professeur en collège et formatrice, qui coordonnait la commission au nom de monsieur F. LABROUE, IPR-IA de mathématiques.

Rallyes mathématiques

A la suite de l'article dans le précédent numéro des *Chantiers*, qui rendait compte de l'atelier « Rallye mathématiques en CM2 et 6ème », les collègues qui souhaitent recevoir des annales de rallye, peuvent en faire la demande à :

Valérie LAROSE
32, Bd Nélaton
91460 MARCOUSSIS

en joignant une enveloppe A5 timbrée à 6,50 F.

Calculatrices aux examens : un jugement préoccupant

par Jean WINTHER

Le 23 juin 1999 un élève qui passait l'épreuve physique-chimie-biologie du baccalauréat STAE de l'enseignement agricole a été interpellé par le surveillant de salle qui lui a reproché de frauder en lisant sur l'écran de sa calculatrice des éléments de cours.

Le chef de centre a fait un rapport et le directeur régional de l'agriculture et de la forêt a annulé l'examen du baccalauréat pour ce candidat. (Alors que l'on aurait pu penser qu'il n'aurait pas suivi le chef de centre).

Celui-ci a fait appel devant le tribunal administratif de Rennes, et a été débouté par un jugement en date du 30 septembre 1999.

Cette affaire est extrêmement grave et préoccupante car je me suis renseigné auprès du ministère de l'agriculture, les textes qui régissent l'utilisation des calculatrices sont les mêmes qu'au MNE.

En l'occurrence le tribunal a statué non à partir des textes sur l'usage des calculatrices mais sur un texte plus général sur la fraude aux examens et à retenu que le candidat avait fraudé.

Trois affaires similaires sont en cours de jugement.

Si les jugements pour celles ci sont identiques à la première affaire ils vont faire jurisprudence et poser de graves problèmes d'interprétation : à partir de quel moment les informations contenues dans une calculatrice constituent-elles une fraude ?

S'ils donnent raison aux élèves il y aura une contradiction juridique qui ne simplifiera pas les choses.

Les Inspections générales du MNA et de MNE sont au courant de ces affaires et je pense que nous devons en suivre les déroulements avec attention car elles nous concernent tous et posent des problèmes déontologiques difficiles à résoudre.

COLLÈGE

Des maths pour tous au CDI

par Valérie LAROSE

Lorsque pour une raison ou une autre il n'est pas possible d'animer un club maths dans un établissement scolaire, il existe cependant un moyen de faire jouer beaucoup d'élèves de l'établissement sur des jeux à caractère mathématique par l'intermédiaire du CDI et du documentaliste. Une action de ce type a été mise en place au collège des Amonts (ZEP et zone sensible) dans l'académie de Versailles.

MODALITÉS

- Un jeu, une énigme est proposé(e) à toute une classe qui le(a) résout avec son enseignant.
- Ce jeu est ensuite mis en libre service au CDI.
- Tous les élèves du collège et de la Segpa y ont accès pendant leurs heures libres.

Première phase

Le jeu peut être totalement cherché en classe ou bien faire l'objet d'un devoir à la maison. Dans ce cas, on peut demander à l'élève de rendre une copie détaillant les étapes de leur recherche avec les échecs constatés (sous forme d'une narration de recherche par exemple).

En classe, les élèves qui ont résolu l'énigme exposent leur(s) solution(s), ceux qui ont échoué leur(s) blocage(s) ; les élèves travaillent alors la maîtrise de l'argumentation orale, apprennent à écouter et échanger des idées.

Deuxième phase

Un petit groupe d'élèves volontaires va diffuser ce jeu au CDI.

Pour cela ils doivent créer en plusieurs exemplaires une affiche publicitaire pour informer les autres collégiens, rédiger une règle du jeu de façon claire et fournir les pièces nécessaires au jeu. Ils doivent également expliquer au documentaliste le jeu avec sa règle, ses solutions, ses stratégies.

Troisième phase

Pendant une durée à déterminer en fonction du jeu (souvent un mois), le jeu est mis à disposition des élèves présents au CDI qui peuvent tenter de le résoudre. Le documentaliste valide la ou les réponses et récompense les élèves (friandises, ..).

QUELQUES CONSEILS SUR LES JEUX À PROPOSER

- On y joue seul (pour ne pas gêner le documentaliste).
- La règle du jeu doit être simple et rapide à comprendre (favorise l'autonomie).
- Les puzzles, les pavages, les découpages connaissent un grand succès (ils permettent une validation par l'élève lui même).

BILAN DE CETTE ACTION

Le bilan est positif, en voici quelques aspects :

- Fierté des élèves qui ont fourni le jeu au CDI.
- Remotivation d'élèves en difficulté.
- Respect du matériel mis à disposition au CDI.
- Tous les élèves de l'établissement sont concernés.
- Liberté de participer.
- Développement de l'autonomie des élèves.

UN EXEMPLE

Voici un exemple d'un jeu qui a très bien fonctionné cette année : il est tiré de l'excellente brochure « Jeux 5 » diffusé par l'APM et s'intitule : « Le défi du plus petit périmètre ».

Après avoir cherché et trouvé les onze patrons de cube, les élèves devaient en réaliser un puzzle sur un quadrillage, l'objectif étant que ce périmètre soit le plus petit possible.

Le défi s'est donc tout d'abord déroulé dans la classe puis au CDI ; chaque semaine une équipe de trois élèves de la classe organisatrice devaient vérifier les réponses fournies par les participants ; un gagnant de la semaine avait le droit à quelques friandises. Au bout de plusieurs semaines a été déclaré un vainqueur du défi (réponse p = 44 unités) et un livre lui a été offert. Beaucoup d'élèves de la 6ème à la 3ème ont participé, quelques surveillants s'y sont mis aussi !

EXAMENS

Expérimentation de problèmes ouverts
(novembre 1999)

L'académie de Versailles participe à la réflexion sur la confection et la correction d'épreuves d'examen en mathématiques menée par une commission présidée par le Doyen de l'Inspection générale Monsieur Attali. Cette commission a rendu des conclusions sur l'utilisation des calculatrices, puis orienté son travail vers la diversification des sujets (voir le site académique http://ac-versailles.fr/pedagogi/maths).

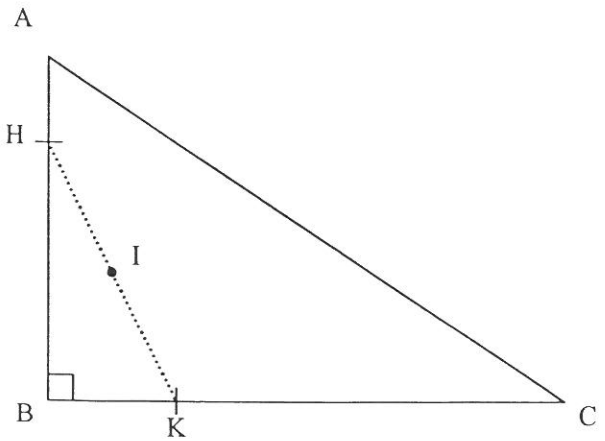
Dans 12 lycées de l'académie, des professeurs ont été invités à proposer à leurs élèves de première ES et de terminale S, dans le courant du mois de novembre 1999, un exercice dit « ouvert », c'est-à-dire dont la méthode de résolution n'est pas fournie dans le corps de l'énoncé, et à en corriger les copies.

Il est demandé aux élèves d'expliciter leurs méthodes d'approche du problème. La durée de l'épreuve est fixée à une heure.

Voici l'un des exercices proposés.

ÉNONCÉ

On considère un triangle ABC rectangle en B tel que 2BC = 3AB. Un point H et un point K sont mobiles respectivement sur le segment [AB] et sur le segment [BC] de telle façon que 2BK = 3AH. On note I le milieu (mobile) du segment [HK].



1° Quel est l'ensemble décrit par le point I quand le point H décrit le segment [AB] ? (justifier)

2° Le problème serait-il différent si le triangle ABC n'était pas rectangle ?

COMMENTAIRE DE MICHEL ROUX

Ce sujet de géométrie ne donne pas lieu à de grandes explications quant au choix des méthodes. Les élèves ont plutôt tendance à travailler à l'aide des concepts élémentaires connus dans le premier cycle : côtés isométriques issus de la figure, parallélisme conduisant éventuellement au théorème de Thalès. Globalement les techniques mises en œuvre ne sont pas du niveau lycée : on pense rarement à exploiter une transformation, ici une homothétie ; aucune méthode analytique n'est évoquée.

En fait, étant donnée la capacité des élèves, ce sujet paraît trop ambitieux. (Certains ont même des difficultés à comprendre la variation simultanée de H et K). En outre, pourquoi avoir donné un triangle rectangle qui peut suggérer qu'une méthode euclidienne aboutira plus simplement, alors que le problème est affine ?

Respectant les consignes, l'évaluation a tenu compte de la recherche entreprise. Une notation sur 5 a attribué : un point à celui qui avait l'idée de l'ensemble des points I (d'ailleurs ils sont plusieurs à penser que l'identification de quelques points I autorise à une généralisation) ; un point à celui qui propose une démarche pertinente qui aurait pu aboutir ; les trois points restants à celui qui réalise effectivement une démonstration. La question « et si ABC n'était pas rectangle » est évalué sous la forme d'un bonus.

Résultats sur 14 copies (les autres élèves de la classe ayant traité le sujet de trigonométrie, légèrement mieux réussi) : à 0,1 près, la moyenne est 1,2, l'écart-type 0,9, le mode 1.

HISTOIRE

Bombelli et l'ennéagone

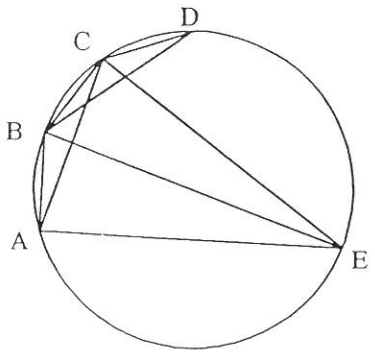
par Henry PLANE

Voici comment Bombelli (1530 ? – 1580 ?), dans son *Algebra* de 1572[1], procédait pour étudier l'inscription d'un polygone régulier de neuf côtés dans un cercle.

Nous userons de notre actuelle écriture mathématique fort différente, bien sûr, de celle du bolonais du XVIe siècle.

Le cercle est défini par le côté du triangle équilatéral inscrit fixé à 12, ce qui donne $r = 4\sqrt{3}$ pour le rayon. Très entraînés aux calculs, les auteurs de cette époque savait choisir des données qui allait simplifier les opérations.

Soient A, B, C, D quatre sommets consécutifs de l'ennéagone. Posons AB = BC = CD = $2x$ et AC = BD = $2y$. Si BE est un diamètre, on posera également CE = AE = $2z$.



Les données sont AD = 12 et BE = $8\sqrt{3}$. Alors, grâce à la relation que nous appelons de Ptolémée et qui, alors, était à la base de nombreux calculs, il vient :

- dans le quadrilatère ABCD :

$$AB.CD + AD.BC = AC.BD$$

ou $$4x^2 + 12x = 4y^2$$

- dans le quadrilatère ABCE :

$$AB.CE + BC.AE = BE.AC$$
$$4x^2 + 12x = 4y^2$$

- enfin, dans le triangle ABE :

$$AB^2 + AE^2 = BE^2$$
$$4x^2 + 4z^2 = \left(8\sqrt{3}\right)^2$$

Ce qui, après réductions, fournit un système de trois équations :

$$\begin{cases} x^2 + 6x = y^2 \\ xz = 2\sqrt{3}y \\ x^2 + z^2 = 48 \end{cases}$$

En éliminant y et z il vient :

$$x^2 + 6x = \frac{x^2y^2}{12} = \frac{x^2(48 - x^2)}{12}.$$

Soit : $x^4 - 36x^2 + 72x = 0$

Donc : $x^3 - 36x + 72 = 0$.

Bombelli, s'il sait résoudre en nombres cette équation, ne peut le faire en ligne (entendons : construire, à la règle et au compas, un segment de longueur x). Il écrit : *« Jusqu'à ce jour, il n'y a pas manière de résoudre car il n'y a pas proportion entre les parties. »*

Un calcul numérique donne des valeurs approchées des trois racines de cette équation : $x_1 = -6{,}822948$, $x_2 = 2{,}369585$, $x_3 = 4{,}453363$.

Avec un rayon $4\sqrt{3}$ voisin de 6,928203 il est clair que $2x_2 = 4{,}73917$ correspond au côté de l'ennéagone.

En fait, si on envisage l'arc AD de 120°, a été résolue l'équation : $3\theta = 120°$, donc $\theta = 40°$ (mod 120°).

Comme la corde de l'arc θ mesure $r\sin\frac{\theta}{2}$ on vérifiera :

$$\sin\frac{\theta_1}{2} \approx \frac{x_1}{r} \approx -0984808$$

$$\sin\frac{\theta_2}{2} \approx \frac{x_2}{r} \approx 0{,}342020$$

$$\sin\frac{\theta_3}{2} \approx \frac{x_3}{r} \approx 0{,}642788$$

En fait, cette étude correspond, pour le cas de l'ennéagone, à la méthode générale attribuée à Girard (1595 - 1632) qui lie la trisection de l'angle à la résolution d'une équation du troisième degré dans le cas appelé irréductible :

$x^3 = px + q$ avec $4p^3 > 27q^2$ ($p > 0$).

Si on pose

$$x = 2\sqrt{\frac{p}{3}}\cos a$$

l'équation devient :

$$\frac{8p}{3}\sqrt{\frac{p}{3}}\cos^3 a = 2p\sqrt{\frac{p}{3}}\cos a + q$$

ou : $$4\cos^3 a = 3\cos a + \frac{3q}{2p\sqrt{\frac{p}{3}}}.$$

Or $$4\cos^3 a = 3\cos a + \frac{3q}{2p\sqrt{\frac{p}{3}}}.$$

Donc : $$\cos 3a = \frac{3q}{2p\sqrt{\frac{p}{3}}},$$ avec

$$-1 < \frac{3q}{2p\sqrt{\frac{p}{3}}} < 1,$$ soit $27q^2 < 4p^3$.

Avec Bombelli on a :

$p = 36$ et $q = -72$ ($27\times72^2 < 4\times36^3$)

$$\cos 3a = \frac{-\sqrt{3}}{2} \text{ donc } 3a = 120°$$

$$a = 40° \text{ (mod. } 120°).$$

Avec $x = \dfrac{p^2 - y^2}{y}$ il vient :

$$y^6 + 2q^3y^3 - p^6 = 0,$$

puis, avec $z = y^3$:

$$z^2 + 2q^3z - p^6 = 0$$

dont la racine positive est :

$$z = -q^3 + \sqrt{q^6 + p^6}.$$

On en tire :

$$y = \left(\sqrt{q^6 + p^6} - q^3\right)^{\frac{1}{3}}$$

et on exprime x à l'aide de cette valeur.

Exemple : $x^3 + 21x - 42 = 0$ conduit à $z^2 + 42z - 343 = 0$.

Or $21^2 + 343 = 784 = 28^2$, donc $z = 28 - 21 = 7$.

Alors $y = 7^{\frac{1}{3}}$ et

$$x = \frac{7 - 7^{\frac{2}{3}}}{7^{\frac{1}{3}}} = 7^{\frac{2}{3}} - 7^{\frac{1}{3}} \approx 1{,}74640$$

Veni, vidi, legi.

[1] Publiée en 1572, l'*Algebra*, selon certains, fut rédigée vers 1560.

La régionale d'Ile de France vous propose

Mercredi 27 Septembre

à 14 h 30

à l'IREM de Paris 7

175, rue Chevalleret, Paris 13e

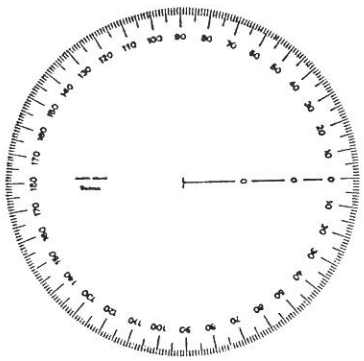
Conférence d'André DELEDICQ

La jubilation en mathématiques

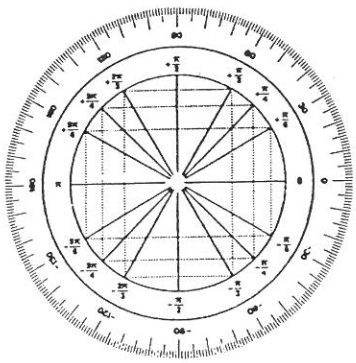
suivie du

Pot de rentrée

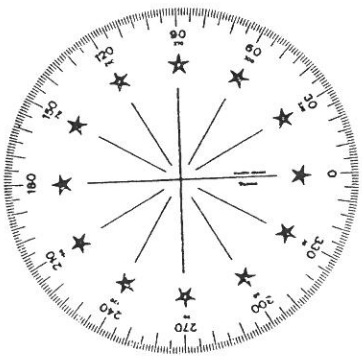
Matériel "Talma" (en réduction)



Rapporteur polaire
(couronne verte)

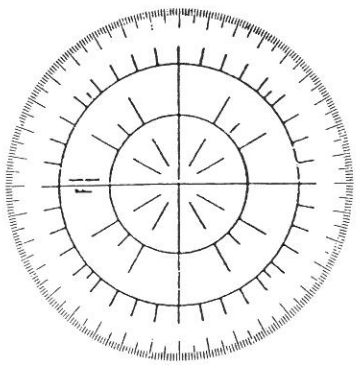


Rapporteur trigonométrique
(anneau médian rouge)

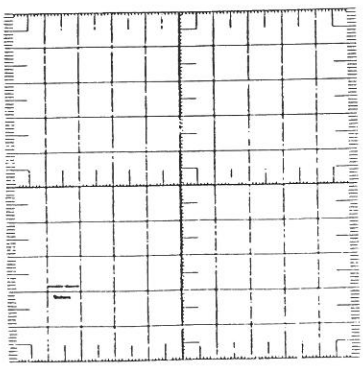


Rapporteur européen
(étoiles jaunes, anneau bleu)

Règle euclidienne
(bandes jaunes)



Rapporteur sans chiffres
(couronne jaune)



Décimètre-carré
(impression rouge)

Pour une documentation ou un spécimen :
Michel Roux – 13, av. Léon Gourdault, 94600 CHOISY-LE-ROI
01-48-53-30-66