Au cours de son séjour à l'I.R.E.M. de Paris, Mme KRYGOWSKA, titulaire de la chaire de didactique mathématique à l'École Normale Supérieure de Cracovie, a bien voulu, au cours d'une conférence qui a connu un brillant succès, exposer aux membres de la Régionale Parisienne les travaux qu'elle dirige sur l'enseignement élémentaire. Nous remercions notre éminente Collègue de nous autoriser à reproduire ici l'enregistrement de sa conférence. Au delà du sujet traité qui est au cœur de nos préoccupations, nous faisons de cette publication un symbole : la réforme de l'enseignement mathématique comme facteur favorisant une meilleure compréhension entre les peuples ; des écoliers polonais et français travaillent dans la même voie.

La réforme de l'enseignement mathématique dans les classes élémentaires en Pologne

par Mme Zofia KRYGOWSKA

Dans cet exposé, je voudrais présenter les idées directrices des travaux réalisés en Pologne en faveur de la réforme de l'enseignement de la mathématique dans les premières classes de l'école de base. Cette école comporte huit années d'étude numérotées de 1 à 8; jusqu'ici l'entrée en première classe avait lieu pour les enfants âgés de 7 ans mais la réforme qui va être mise en application prévoit l'entrée à l'école un an plus tôt.

Depuis 1962, des réformes concernant l'enseignement mathématique ont été mises en place dans les classes, de la Cinquième à la Huitième. Mais ces réformes n'ont pas touché les quatre premières classes; l'enseignement mathématique n'y a pas été modifié depuis de nombreuses années. L'urgence d'une réforme est reconnue tant par les maîtres que par les autorités scolaires, mais on se heurte à de grandes difficultés.

S'il n'y a pas eu, à ce niveau élémentaire, de changement officiel, des expériences très nombreuses ont été organisées; expériences basées sur des conceptions très différentes, voire opposées. Il y a deux courants principaux : celui qui résulte de l'étroite collaboration entre ma chaire de didactique mathématique à l'École Normale Supérieure de Cracovie et M. Moross, de la chaire de pédagogie de l'Université de Cracovie; l'autre courant est influencé avant tout par l'Institut Pédagogique de Varsovie et par des mathématiciens de l'Académie des Sciences de Pologne.

Une sous-commission pour la réforme de l'enseignement mathématique dans les quatre premières classes, créée au sein d'une commission officielle plus vaste, a élaboré *une série de projets* et après des discussions et des compromis, elle a transmis un projet final au Ministre en juin 1970 (*). Cette rédaction, qui a pour principal auteur un mathématicien de l'Académie des Sciences qui n'enseigne évidemment pas à l'école élémentaire, représente un compromis entre le point de vue des mathématiciens et celui de l'Institut Pédagogique de Varsovie, collaboration à laquelle les autorités attachent le plus grand prix. Ce projet est essentiellement un canevas mathématique du travail à réaliser en classe. Il sera mis en application dans toutes écoles d'une voïvodie (la Pologne en compte 17) qui l'expérimenteront donc dans des milieux sociaux différents avec des maîtres différents ayant des formations différentes. C'est seulement après cette large expérimentation et les corrections qu'elle entraînera que l'introduction des nouveaux programmes sera étendue à tout le pays.

Voici, par contre, comment a été organisée l'expérience de Cracovie. Le projet a été élaboré en commun par l'équipe de didactique mathématique à l'École Normale Supérieure et celle de la chaire de pédagogie à l'Université. Au début, M. Moross a enseigné lui-même dans deux classes pilotes; en même temps, il dirigeait les contrôles et guidait les maîtres de 12 classes; par ailleurs, il fournissait aide et instruction à quelque 200 maîtres qui, volontairement, cherchaient à améliorer leur enseignement et s'adressaient à nous pour avoir des conseils, des instructions, des exemples. Notons en passant que ces demandes se multiplient et dépassent déjà les possibilités de notre petite équipe d'animateurs.

L'expérience de Cracovie suscite certaines réserves de la part de certains membres de la Commission officielle car elle est réalisée par des maîtres enthousiastes alors qu'à l'échelle nationale ils craignent que le même climat favorable ne règne pas.

Quoi qu'il en soit, c'est essentiellement de cette expérience que je parlerai ici, en donnant tous les détails que l'on voudra alors que sur le projet officiel je ne peux me borner qu'aux généralités puisqu'il n'a pas encore été expérimenté (**).

Principes de l'expérience à Cracovie

Au départ, nous avions cette conviction profonde que l'étape de la première mathématisation des expériences et des intuitions des débutants à l'école primaire est particulièrement importante pour le développement ultérieur de

(*) Voir le texte de ce programme page 106.
(**) Conférence prononcée en octobre 1970.

la pensée mathématique de l'élève et qu'elle joue même un rôle décisif. *Or, cette mathématisation doit être correcte du point de vue de la mathématique et naturelle du point de vue de l'intelligence enfantine.* Nous avons prouvé et constaté que ces deux postulats ne sont pas contradictoires.

La mathématique peut être présentée de façons différentes selon les niveaux et même elle doit l'être. Néanmoins, à chaque étape, il faut que ce soit une véritable mathématique. Un des défauts de l'enseignement traditionnel réside dans la nécessité où l'on se trouve pour passer d'un niveau au suivant, de commencer par détruire les notions acquises précédemment au prix de grands efforts de l'élève et du maître. Ce qui explique notre **premier principe :**

> *« Traiter l'enseignement primaire de la mathématique dans la perspective de la structure actuelle de la mathématique ; développer dès le début les catégories de la pensée mathématique qui seront utilisées dans la suite de telle sorte qu'un niveau d'enseignement de la mathématique ne soit pas séparé du niveau précédent par un seuil difficile à franchir pour un élève moyen. »*

Notre deuxième principe s'oppose à deux préjugés de la pédagogie traditionnelle : sous-estimation des possibilités intellectuelles de l'enfant et opinion erronée en ce qui concerne ses sujets d'intérêt et ses goûts. On prétendait avoir « démontré » que l'enfant, entre 7 et 10 ans, n'est pas apte aux généralisations abstraites en mathématique et ne s'intéresse qu'aux problèmes pratiques. La vérification était apparemment juste, mais on n'avait pas développé d'autres goûts chez les élèves. Si on développe le goût des élèves *a priori* dans une direction choisie. l'élève n'aura jamais l'occasion de révéler ses goûts véritables. La pauvreté du contenu mathématique de l'enseignement traditionnel fait que l'élève s'égare dès qu'on introduit une notion abstraite. [Ainsi aboutissait-on à une conclusion fausse à partir d'une démonstration objective. Au lieu de dire : « avec nos moyens pédagogiques actuels, telle notion est inaccessible », on a dit « cette notion n'est pas accessible ».]

Dans nos essais ou nos expériences, nous essayons d'éviter cette faute de méthode. Nous essayons d'éliminer l'opposition concret-abstrait que l'enseignement traditionnel souligne abusivement et de discerner au contraire le concret et le pratique qu'il confond souvent. L'enfant peut manipuler concrètement tout en traitant le problème considéré de façon abstraite à condition de disposer des moyens d'expression indispensables. Si l'élève ne comprend pas un problème dans un langage, peut-être le comprendra-t-il dans un autre langage.

Notre expérience montre que l'enfant porte un grand intérêt aux problèmes théoriques et que, par sa joie de la découverte, son goût de l'aventure intellectuelle, il est plus proche du travail créateur du mathématicien que l'élève plus âgé.

Tout ceci nous a permis d'énoncer ainsi notre **deuxième principe :**

> « *Ne sous-estimer ni sur-estimer les possibilités intellectuelles de l'enfant. Nous ne connaissons pas celles-ci d'avance ; il faut* les développer *par tous les moyens, spécialement par recours aux méthodes actives et en tenant compte du fait que la très souple intelligence de l'enfant est ouverte à toutes les suggestions, à toutes les initiatives.* »

Abordons de front la question de la soi-disant surcharge des nouveaux programmes. Dans l'enseignement traditionnel, le domaine mathématique où devait s'exercer la pensée de l'enfant était très pauvre. Un enrichissement raisonnable des programmes ne conduit pas à une surcharge du travail des élèves mais facilite au contraire la compréhension des matières traditionnelles.

La construction de programmes bien adaptés (aux exigences mathématiques et pédagogiques) et leur interprétation raisonnable conduit à attacher à certains sujets une importance plus grande, certains autres étant considérés comme auxiliaires ou même seulement comme une première initiation sur laquelle on reviendra plus tard.

C'est notre **troisième principe :**

> « *Dans chaque programme, il y a des questions essentielles, d'autres qui jouent un rôle auxiliaire. Il y a des façons diverses de traiter ces sujets, sans en épuiser nécessairement l'étude.* »

Dans son déroulement, l'enseignement ne peut être linéaire. Il faut changer fréquemment les thèmes, revenir périodiquement sur des sujets qui n'ont été d'abord qu'esquissés. Pendant l'étude d'une question, on constate que certaines choses déjà étudiées n'ont pas été comprises : on revient sur cette question importante et quand, huit jours plus tard par exemple, on reprendra le premier sujet, on s'apercevra que les élèves ont bien assimilé ce qu'ils n'avaient pas compris d'abord. Cette façon de faire étonne parfois les parents; l'un d'entre eux est venu me trouver : « Je regarde le cahier de mon fils. Je n'y comprends rien; c'est un chaos! » « Peut-être, lui ai-je répondu, mais c'est *un chaos organisé.* »

Cette conception cyclique concerne aussi l'acquisition des notions mathématiques fondamentales. Lorsque l'élève utilise un vocabulaire ensembliste, par exemple, cela ne signifie pas qu'il ait saisi tout le fond du sujet; il peut même arriver qu'il y ait des malentendus profonds. Mais on reviendra à plusieurs reprises sur ces notions de base, chaque révision comportant des éléments nouveaux. C'est organisé !

Tel est donc notre **quatrième principe :**

> « *L'enseignement se déroule avec de fréquents changements de thème, le retour cyclique sur les sujets fondamentaux se faisant de telle façon qu'à chaque révision il y ait des acquisitions nouvelles.* »

L'énoncé des derniers principes requiert peu de commentaires.

Cinquième principe :

« A chaque niveau, il faut enseigner la mathématique dans son langage propre. La composante symbolique facilite cet apprentissage mais elle expose à certains dangers dont on doit être conscient. »

Notons, en particulier, qu'il est très important d'utiliser des représentations diverses afin d'éviter le conditionnement des élèves à telle représentation, à tel symbolisme...

Sixième principe :

« Le recours à des matériaux didactiques est indispensable. Là aussi, on recommande l'utilisatian de matériels divers pour éviter le conditionnement. »

Il existe des pédagogues qui veulent tout faire avec un seul matériel; c'est pernicieux. Tout matériel nouveau stimule l'intérêt des élèves; de plus, il apporte des éléments nouveaux à la compréhension de la structure mathématique étudiée; il est particulièrement favorable au développement de la pensée mathématique de l'enfant d'être mis en présence de nouvelles situations.

Nos programmes

Nous tentons de mettre en œuvre ces principes à partir des programmes que nous allons maintenant analyser. La structure de l'anneau $\mathbb{Z}$ des entiers est l'objet principal de l'enseignement dans ces classes expérimentales; cette étude est le centre d'un domaine riche de problèmes en algèbre, en arithmétique, en géométrie. Certains thèmes sont seulement esquissés : on introduit des préconcepts. Des modèles, vus d'abord de façon intuitive, seront utilisés plus tard pour une étude approfondie. Certains thèmes sont introduits pour faciliter l'étude de sujets plus généraux; ainsi les diverses bases permettent d'approfondir le principe de la numération. Des exemples d'anneaux finis facilitent l'approche de l'idée générale d'opération (exemple de préconcept).

L'apprentissage du calcul numérique est une préoccupation permanente à ce niveau. L'enfant est amené à s'exercer à tout moment, ce qui exige de sa part du raisonnement aussi bien que le bon usage des techniques. Dans des situations nouvelles, l'élève ne s'ennuie pas (une raison de plus d'introduire la numération dans les diverses bases).

En géométrie intuitive, beaucoup de thèmes sont construits à partir du réseau carré, ce qui présente l'avantage d'utiliser les connaissances arithmétiques de façon nouvelle.

Voici maintenant une analyse détaillée des programmes pour chaque classe.

Première année : 5 leçons de 45 minutes par semaine (entre 2 leçons, quelles qu'elles soient, il y a toujours une pause à ce niveau). On utilise des matériaux structurés; le nombre n'est pas « visible » mais des manipulations sont une préparation qualitative à l'arithmétique.

1° Ensembles; sous-ensembles. Arrangement des objets d'un ensemble. Préconcept de l'ordre.

Jeux logiques avec du matériel; *et, ou, non.*

Application d'un ensemble dans un ensemble; graphe.

Ensembles équipotents.

Initiation aux opérations algébriques sur un matériel; préconcept d'opération inverse, d'opération compatible avec un ordre (par exemple avec les réglettes Cuisenaire).

2° Les naturels de 0 à 20 (étude complète), de 0 à 1 000 (sans chercher la perfection). On résout des équations du type $a+x = b$, $x—a = b$, $a—x = b$ et on les applique à des petits problèmes.

L'addition et la soustraction sont introduites *en même temps* (la même situation, la même pensée, s'expriment de façons différentes. Même problème pour la multiplication et la division (là où il y a eu multiplication, on peut inverser). On introduit la fraction comme opérateur composant une multiplication et une division. On introduit les parenthèses, l'ordre des opérations, a^n comme abréviation de $a \times a \times ... \times a$. A la fin de l'année, si cela est possible, on initie les enfants aux bases deux et trois (par exemple avec le matériel Dienes); c'est considéré par les enfants comme une récompense.

Deuxième année : 6 leçons de 45 minutes.

1° Introduction des symboles ensemblistes $\in$, $\notin$, $\subset$, $\not\subset$, $\cup$, $\cap$, $\setminus$, $\emptyset$.

Jeux logiques (matériel Dienes), sujet très apprécié; sur des exercices on propose de nier la conjonction ou la disjonction de propositions.

2° Arithmétique des naturels. Algorithmes des opérations dans les bases deux, trois, dix. Changement de bases. Équations de la forme $ax+b = c$, $a+x<b$, $ax>b$. Exemples de fonctions dans $\mathbb{N}$, fonctions empiriques (sur des exemples pris en géographie) et présentations diverses (graphiques en bâtons, en secteurs, etc.).

3° Application à des problèmes combinatoires simples (pas de formules); nombre de permutations; nombre de voies les plus courtes dans un réseau (par exemple sur des géoplans). Dans tout cela, initiation intuitive au raisonnement par récurrence; découverte de la loi!

Troisième année : 6 leçons de 45 minutes.

Révision avec éléments nouveaux : la structure de $\mathbb{N}$. Le bilan met en évidence les propriétés des opérations. La multiplication a été introduite d'abord comme addition itérée (en Pologne on écrit $a+a+a = 3a$, l'opérateur étant toujours écrit devant). La multiplication prend une nouvelle signification avec l'introduction du produit cartésien qui permet de mettre en évidence les propriétés de la multiplication.

Calcul numérique dans $\mathbb{N}$. Il arrive que l'ensemble des solutions d'une équation donnée soit vide.

Initiation à la géométrie intuitive. Sur le réseau carré, on définit des figures; figures « équivalentes ». Rectangle. Longueur d'une ligne polygonale, segment, mesure linéaire, longueur d'une frontière. [On évite certains dangers de l'enseignement traditionnel sur la droite infinie; on définit le prolongement d'un segment en posant le problème : « construire un segment AM qui contienne le segment AB ».] Demi-droite par réunion de segments. Aires des figures construites; mesure. Construire une surface d'aire donnée. Approximations; graduer une demi-droite.

Transformations du plan; translations; symétries axiales.

Initiation à $\mathbb{Z}$; vecteurs sur la droite; opérations sur les vecteurs et sur les entiers [ici, nous avons trouvé une nouvelle preuve de l'efficacité de cet enseignement : les règles d'addition et de multiplication des entiers ont été trouvées par les enfants eux-mêmes. Bien entendu, après une préparation convenable; on a considéré, par exemple, des jets de balle; il y a eu des jets « équivalents »; comment les additionner...].

Quatrième année : 6 leçons de 45 minutes.

Révision des entiers et étude développée de la structure de $\mathbb{Z}$. Équations (dans $\mathbb{Z}$).

Système de coordonnées; réseau carré avec axes; fonctions; graphiques. [Ici encore, nous avons pu vérifier l'efficacité de l'enseignement; l'étude de la fonction $x \mapsto |x - 1|$ est venue après celle des transformations géométriques; il a paru naturel d'étudier la fonction $x \mapsto x - 1$. puis de faire une symétrie axiale sur une partie du graphique.

Relations dans $\mathbb{Z}$. Ordre partiel. Représentation des entiers modulo 7 (ou modulo 12); exemples d'anneaux différents de $\mathbb{Z}$.

Étude intuitive du cube et de la boule pour mettre en évidence la notion de dimension. Constructions sur la surface du pavé [par exemple, chemin le plus court d'un point à un autre, par développement de la surface]. Mêmes problèmes sur la sphère.

Résultats

Les résultats de cet enseignement ont dépassé toutes nos hypothèses initiales. On a comparé les résultats avec ceux des classes ordinaires; il y avait parfois des différences dans la progression chronologique, moins d'habileté devant les problèmes-types pour lesquels les élèves de l'enseignement traditionnel étaient sur-entraînés. Le niveau était incomparablement supérieur dans la maturité des notions acquises.

Grâce à leur activité et à leur franchise, les élèves nous ont permis de découvrir des difficultés inattendues et souvent passées sous silence. Par exemple, nous savons le danger de succès douteux tels que l'introduction prématurée d'un formalisme ou d'un langage savant qui dissimuleraient un vide conceptuel. En fait, nous avons beaucoup appris grâce à nos petits collaborateurs.

On a vu que nos programmes expérimentaux sont fondés sur la structure de l'anneau $\mathbb{Z}$ des entiers. Le projet ministériel s'oppose à cette structuration puisqu'il est centré sur le problème de *la mesure;* il vise l'approche de la droite réelle; d'autre part, dans ce projet (voir plus loin son texte définitif), la géométrie est plus développée que dans notre plan. En comparant le projet initial de la commission et sa rédaction finale, on constate qu'il y a eu des compromis successifs, chacun d'eux étant en apparence d'une portée limitée mais, en fin de compte, ces compromis modifient complètement ce qui résultait des intentions initiales.

Bien entendu, il ne faut pas juger de l'enseignement par ces textes qui n'en constitue que le squelette. On verra, sur les essais de manuels, puis surtout sur les classes elles-mêmes, s'il s'agit d'un enseignement réellement nouveau ou d'un raccommodage du traditionnel. A Cracovie, nous poursuivons nos expériences, persuadés que la réforme est un mouvement permanent, chaque expérience ouvrant de nouvelles perspectives.

Z. K.

N.D.L.R. — Si cette dernière remarque, dans l'esprit de M[me] KRYGOWSKA, concernait seulement les réformes de l'enseignement mathématique en Pologne, nous pouvons évidemment reconnaître, dans les remarques de notre éminente Collègue, des vérités qui dépassent le cadre d'un seul pays. Nous sommes bien placés (si l'on peut dire) pour le savoir.

Aux nombreuses questions qui furent posées à la conférencière (et qu'il est difficile de résumer ici), celle-ci donna d'amples réponses parmi lesquelles nous retenons :

1° Si l'approche des réels a été écartée au profit de l'étude de $\mathbb{Z}$, c'est parce que la petite équipe de Cracovie a constaté, par expérience, combien la nécessairement lente approche des réels était fastidieuse pour les élèves.

2° Si le projet ministériel n'est mis en application que dans une seule voïvodie pour commencer, c'est pour échelonner la nécessaire préparation des maîtres. Il est vrai que ce problème de la formation permanente des maîtres est difficile; mais il faut reconnaître que les maîtres qui sont curieux et qui ont une bonne formation pédagogique s'informent et se perfectionnent vite en mathématique.

Annexe : Programme de mathématique pour l'enseignement primaire en Pologne adopté par la Commission Ministérielle le 17 juin 1970.

1re année. Exercices préparatoires sur l'orientation spatiale et la comparaison des objets. Première reconnaissance des figures géométriques simples. Ensemble, sous-ensemble, intersection, réunion des ensembles. Correspondance biunivoque entre les éléments des ensembles. Addition, soustraction, multiplication et division des nombres jusqu'à 20. Parenthèses. Le demi $\left(\text{le symbole } \frac{1}{2}\right)$. Préparation des tableaux fonctionnels. Connaissance de la numération jusqu'à 100. Comparaison des nombres, utilisation des symboles $<$ et $>$. Problèmes verbaux simples, l'inconnue étant représentée par le symbole x. Mesurage des longueurs, capacités et poids. Préparation de la notion de repère. Les jours d'une semaine. Comptage de l'argent.

2e *année*. Rappel des connaissances sur les ensembles. La différence des ensembles. Ensembles disjoints. Addition, soustraction, multiplication et division des nombres jusqu'à 100. Connaissance de la numération jusqu'à 1 000. Solution des équations et inéquations simples, ses applications aux problèmes verbaux. Segments perpendiculaires, le rectangle et le carré. Quadrillage. Le nombre des carrés unitaires dans un rectangle. Les fractions $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{4}$. Unités de temps. Les symboles romains I à XII. Déchiffrement de températures.

3e *année*. Révision des opérations jusqu'à 100. Les propriétés des opérations. Les règles d'omission des parenthèses. Divisibilité. L'impossibilité de la division par 0. Division euclidienne. Addition et soustraction, ainsi que multiplication et division des nombres naturels jusqu'à 1 000 par les nombres à un chiffre. Connaissance de la numération jusqu'au million. Algorithmes du calcul en écriture. Longueur d'une ligne brisée. Expressions binomiales et les décimaux. Introduction des fractions à petits dénominateurs; leurs représentations sur l'axe. L'aire du rectangle. Puissances. Systèmes non-décimaux.

4e *année*. Les quatre lois jusqu'au million. Les algorithmes. Expressions binomiales et les décimaux. Réduction et élargissement des fractions. Addition et soustraction des fractions au même dénominateur, addition d'un naturel à une fraction et l'opération inverse. Multiplication d'une fraction par un naturel. Le parallélépipède et le cube. Le premier quart du plan repéré. Nombres négatifs, leurs places sur l'axe, comparaison, addition, soustraction. Échelle d'un plan. Calculs concernant l'horloge et le calendrier.