### Introduction des probabilités en 3e : quels enjeux ?

L'introduction de l'aléatoire dans les programmes de la classe de seconde en 2000, avait suscité beaucoup de perplexité et d'interrogations, voire de vives réactions. Peut-on enseigner conjointement des éléments de statistiques et de probabilités ? Quels savoirs et compétences sont visés ? Que recouvre précisément une approche fréquentiste des probabilités ? Quelle est la place et le rôle de la simulation ?

Passés les premières inquiétudes et l'inconfort à prendre en charge un enseignement pour lequel on n'a pas une vision claire, pas de recul, peu de ressources et, au mieux, une formation universitaire qui est en net décalage avec les enjeux didactiques du secondaire, il est finalement apparu pour beaucoup d'enseignants. après une première année de pratique, que cette introduction à l'aléatoire aurait parfaitement sa place dès le collège. A ce sujet, Guy Brousseau, lors de l'élaboration de sa théorie des situations dans les années 70, a choisi d'expérimenter dans une classe du primaire, une situation relevant de l'aléatoire (une bouteille opaque laisse voir dans le bouchon, quand on la retourne, une des billes blanches ou noires qu'elle contient. Question : quelle est la proportion de billes blanches et noires?).

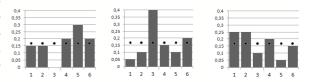
Ce n'est donc pas une surprise de voir apparaître cette nouveauté dans les programmes de 3<sup>e</sup>. Comme enseignant en seconde, je propose de faire le point sur ce que j'ai compris des enjeux de cette partie du programme après quelques années. Notons que la mouture du programme de troisième franchit un seuil par rapport à celui de seconde, en s'appelant *Notions de probabilités*, en indiquant explicitement de calculer des probabilités, et en demandant d'étudier des situations à une ou deux épreuves.

L'une des interrogations très souvent entendue est la suivante : quel est l'intérêt d'expérimenter des lancers de dés ou de pièces, tout ça pour "découvrir" que chaque face du dé à 1 chance sur 6 d'apparaître ? Comme scoop, ce n'est certes pas très excitant ! Il y a là un malentendu qu'il faut lever.

Une loi de probabilité est un modèle, que l'on choisit pour caractériser une expérience aléatoire. Trois cas de figure doivent être rencontrés avec les élèves, dans cet ordre :

### 1er cas: on connaît la loi de probabilité.

Il n'y a rigoureusement aucun doute sur la pertinence de la loi de probabilité choisie (la loi n'est pas et ne sera pas remise en question). C'est justement le cas des dés ou des pièces (éléments de symétrie attestés), des roulettes (secteurs parfaitement mesurables), des urnes (nombre de boules connu), etc. Le but de l'expérimentation est ici de faire constater que, alors que l'on connaît les probabilités de chaque éventualité (vues comme des "fréquences théoriques"), on ne retrouve pas ces fréquences en répétant l'expérience aléatoire un petit nombre de fois. De plus, en répétant des séries de même taille (réduite), on ne trouve pas des répartitions comparables. Ci-dessous, on a lancé un dé 20 fois et noté les fréquences observées des 6 occurrences (les points noirs ont pour ordonnée la fréquence théorique). On a recommencé ainsi 3 fois et les 3 séries ne donnent pas la même répartition. Le 5 sort-il "trop souvent" (série 1) ou "trop peu" (série 3)?

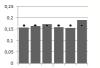


Fréquences observées sur 3 séries de 20 lancers d'un même dé

L'enjeu est de casser les représentations intuitives fausses, souvent bien ancrées, qui induisent un comportement déterministe. Il existe des magazines tirant à plus de 100 000 exemplaires qui, constatant que la fréquence d'apparition de la boule 24 du loto lors des tirages de l'année, est inférieure celle des autres boules, prescrivent de la jouer : elle va rattraper son retard! D'autres au contraire, face au même constat, reconnaissent là une preuve de plus de l'existence du grand complot, et recommandent de ne pas la jouer. A ce propos, lors de l'introduction du chapitre, je commence par un test du même type que celui proposé par le document d'accompagnement (page 16)<sup>2</sup>. Ce même test est rediscuté en fin de chapitre.

<sup>1</sup> http://www.univ-orleans.fr/irem/cii/modules/news/article.php? storyid=68

La phase suivante consiste à augmenter le nombre de répétitions de l'expérience (i.e. taille de l'échantillon). On constate alors que, d'une part il y a moins de disparités entre les séries d'expériences et d'autre part les fréquences observées ont tendance à se rapprocher des fréquences "théoriques". C'est la fluctuation d'échantillonnage : elle existe, mais elle est d'autant plus faible que le nombre de répétitions est grand. Il y a donc bel et bien de l'aléatoire, mais il est quand même possible de faire des prévisions sur le résultat lorsque le nombre de répétitions est grand. C'est cette dualité aléatoire/prévision qui est en jeu.







Fréquences observées sur 3 séries de 1000 lancers d'un même dé

Évidemment, on en reste à des formulations qualitatives, les premiers calculs quantitatifs relevant des classes terminales (test d'adéquation avec une loi équirépartie). Pour éviter les confusions, il faut impérativement rencontrer les exemples avec une loi équirépartie mais aussi non équirépartie. Ces dernières sont plus probantes pour distinguer ce qui est imputable à la fluctuation (ce qui est due "au hasard") et ce qui est imputable à la loi de probabilité

# 2º cas : on ne connaît pas *a priori* la loi de probabilité (en tout cas pas les élèves).

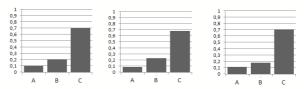
L'expérience réalisée et répétée, donne des indications sur la loi adéquate à trouver et permet de formuler une conjecture, ou de ruiner celle qu'on avait faite a priori (en probabilité l'intuition est souvent erronée, l'équirépartition est naturellement adoptée par les élèves ... souvent à tort). Puis, c'est par un raisonnement, un calcul, un arbre, un tableau, ou plus simplement en dévoilant le dispositif de l'expérience, que l'on va élucider *a postériori* la situation et trouver la loi de probabilité qui a prévalu. Les observations expérimentales ont pu éventuellement constituer une aide, dans la mesure où elles donnent des indications sur les valeurs à trouver.

Dans le document d'accompagnement, c'est l'exemple du *franc carreau*, très riche par la consistance des considérations géométriques nécessaires pour aboutir à la loi.

# 3º cas : on ne connaît pas la loi de probabilité et on est dans l'impossibilité de la déterminer par un raisonnement ou un calcul.

Soit parce que les élèves ne sont pas encore outillés mathématiquement pour le faire, soit parce que ce n'est de toute façon pas possible. Ce sont alors les fréquences observées expérimentalement qui vont définir la loi de probabilité que l'on retiendra. C'est l'exemple du lancer de punaises évoqué dans le document d'accompagnement.

Mais il faut tenir compte de l'existence de la fluctuation d'échantillonnage. Pour cela, on recommence plusieurs séries de même taille. Si la répartition est à chaque fois sensiblement la même, c'est que la fluctuation est faible (nettement plus faible que les écarts constatés entre les fréquences). On pourra donc valider avec confiance la loi de probabilité définie par les fréquences observées expérimentalement.



Fréquences observées sur 3 séries de taille 200 d'une expérience à 3 éventualités (A, B et C) non équiprobables : la fluctuation est faible, la loi de probabilité 0,1 / 0,2 / 0,7 peut être validée.

Ce qui tranche avec les pratiques habituelles en mathématiques, c'est qu'il ne s'agit pas d'une validation au sens preuve mathématique qui garantie à 100% que le modèle est bon. Dans certains cas, les calculs probabilistes savants rencontrés dans les mathématiques universitaires ne le pourront pas plus! Ils seront par contre capables d'évaluer le risque que l'on prend en décidant d'adopter tel ou tel modèle, uniquement sur la base des fréquences observées expérimentalement (tests d'hypothèses statistiques). Dans les applications scientifiques des statistiques et probabilités, l'évaluation de ce risque est nécessaire et le plus souvent suffisante pour mener efficacement les travaux. En particulier, et quoiqu'on dise, c'est le cas des sondages lorsqu'ils sont bien faits.

Quelle est la place de la simulation ? Elle est évidente : elle sert à faire très vite un grand nombre d'expériences, et d'être assisté par des outils numériques et graphiques puissants. Mais il y a lieu de faire deux remarques :

### Introduction des probabilités en 3e: quels enjeux ? (suite)

Il ne faut pas faire l'économie de réaliser des expériences réelles. La dévolution des situations proposées est bien plus efficace. C'est tout à fait possible en mettant à contribution les élèves de la classe et en mutualisant au tableau (tableau de classe ou tableur) leurs données (pour une fois le nombre d'élèves est un atout !). On peut aussi leur demander de réaliser ce travail de collecte à la maison.

En passant ensuite à la simulation sur calculatrice ou tableur, on utilise un générateur pseudo aléatoire. Il ne me semble pas opportun d'évoquer avec les élèves les questions de fiabilité de ces générateurs. D'abord parce qu'ils le sont très largement pour les besoins de cet enseignement, ensuite parce que cela risquerait d'apporter de la confusion sur les conclusions que l'on cherche à leur faire identifier.

Après ces considérations générales, il reste à mettre en œuvre concrètement cet enseignement. A côté du document d'accompagnement, plusieurs brochures de l'APMEP ou des

IREM (celles de Paris Nord notamment), rédigées pour le lycée, sont en partie facilement recyclables pour le collège. Le site Statistix, dédié à cet enseignement, est également une ressource pour les enseignants. Dans le prochain numéro des *Chantiers*, je proposerai de détailler quelques exemples.

Parmi les inquiétudes initiales des professeurs de seconde en 2000, il y avait celle de penser que les élèves ne prendraient pas au sérieux ces activités, estimant qu'elles manquent de consistance et les jugeant peu dignes du cours de mathématiques. L'expérience permet de faire un démenti formel. Les questions qui émergent chez les élèves sont très souvent pertinentes et surprenantes. De plus, cet enseignement est particulièrement propice à une démarche sous forme de travail en groupe, de mise en commun, de débats, étayés par une expérimentation qui interroge sur la nature et le sens de la formalisation mathématique.

Rémy Coste

### Correction des devoirs de vacances

J'avais proposé avant les vacances, quatre petits exercices à traiter sans calculs... Trop difficiles? Trop faciles? Naïveté d'un vieux professeur qui croit que les vacances c'est fait pour faire des maths? Toujours est-il que ce fut le bide: une seule réponse (merci Emile Sinturel). Stoïque, je propose les corrections...

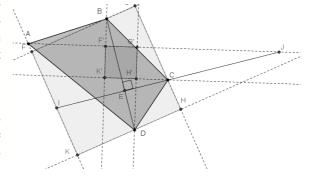
### Chacun sa route...

Il suffit d'adjoindre au plan une troisième dimension représentant le temps. Chaque trajectoire est alors représentée par une droite de cet espace plan-temps. La rencontre entre les deux premiers promeneurs nous assure que leurs trajectoires sont dans un même plan P et leurs rencontres avec les deux autres nous assure aussi que les trajectoires de ceux-ci sont dans ce même plan P. Comme celles-ci ne sauraient être parallèles (sous peine que leurs projections sur le plan le soient) elles sont donc sécantes et les deux derniers promeneurs vont donc se rencontrer.

### Le carré et les quatre points.

Il est facile de construire des rectangles répondant à la question (on construit n'importe quelle droite de départ passant par A, puis les perpendiculaires passant par B et D).

Pour obtenir le carré il faut savoir que deux sécantes perpendiculaires dans un rectangle déterminent des segments de même longueur entre les côtés opposés si et seulement si ce rectangle est un carré...ce qui donne un moyen de fabriquer deux points I et J (qui déterminent les droites de départ (AI) et (AJ)) et donc deux carrés répondant à la question.



### Probabilités en collège : exemples d'activités avec une simulation

Suite à l'article dans le numéro précédent des *Chantiers*, Rémy COSTE propose de montrer comment simuler des expériences aléatoires avec une simple calculatrice de collège actuelle puis, dans l'esprit de ce qui est développé dans le document d'accompagnement du programme de 3<sup>e</sup>, de mettre en œuvre ces possibilités à travers trois exemples d'activités pour construire la notion de probabilité (un exemple dans ce numéro, et deux exemples dans le suivant).

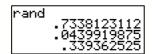
### Comment simuler une expérience aléatoire ?

Avant de répondre à cette question, je précise qu'il est important selon moi de faire réaliser quelques expériences réelles aux élèves avant de faire des simulations (lancer de pièces ou de dés, prélèvement de billes dans une urne, tirage au sort, etc.). Cela permet une meilleure identification de la situation par les élèves. La simulation permet ensuite de renouveler l'expérience un grand nombre de fois, mais aussi de réaliser virtuellement des expériences aléatoires que l'on ne peut pas réaliser réellement (c'est le cas de mon 1<sup>er</sup> exemple).

Je fais ici le choix d'utiliser une calculatrice (à titre d'exemple, je préciserai entre parenthèses comment accéder aux instructions sur la TI Collège Plus ; on trouvera l'équivalent sur les autres modèles). On peut bien sûr utiliser un tableur mais je veux montrer qu'une calculatrice est tout à fait opérationnelle et sans doute plus explicite pour les élèves, sans compter que la logistique en est simplifiée.

#### Le générateur aléatoire.

Il est accessible par la commande *Random*, notée en général *rand* sur les calculatrices (maths, RND, 1:rand). Par un algorithme interne très sophistiqué reposant sur des savoirs d'arithmétique, cette commande simule le tirage aléatoire équiprobable d'un nombre décimal à 14 chiffres pris dans [0;1[ (à l'affichage, on ne voit que 10 chiffres). Ci dessous, l'exécution réitérée de *rand* (en appuyant plusieurs fois sur *Entrer*).



## Utilisation pour la simulation d'expériences aléatoires.

1<sup>re</sup> idée : On convient d'un codage des 10 chiffres de la partie décimale des nombres que renvoie *rand*. Par exemple, pour le lancer de

pièces, on convient que si un chiffre est pair c'est Pile, s'il est impair c'est Face. Ainsi, chaque exécution de rand donne une liste de 10 lancers. Dans la copie d'écran ci-dessus, on a ainsi : FFFPFFFFP, puis PPFFFFFPF, puis FFFFPPFPFP (le 10<sup>e</sup> chiffre est 0, ce qui explique qu'il ne soit pas affiché).

Avantage : c'est rapide car un seul nombre simule plusieurs lancers. Inconvénient : la lecture n'est pas très confortable.

2<sup>e</sup> idée : Il est possible de régler la précision de l'affichage des nombres (Mode, Float n pour l'affichage de n chiffres après la virgule). Par exemple, pour le lancer d'une pièce, on règle l'affichage sur Float 0, ce qui revient à arrondir les nombres à l'unité la plus proche. La touche *rand* renvoie alors 0 si le nombre est inférieur à 0,5 (Pile) ou 1 si le nombre est supérieur à 0,5 (Face).



Avantage : ce que l'on fait ressemble plus à l'expérience réelle, on lance 1 pièce à chaque appui sur *Entrer*, il y a deux issues, immédiates à décoder, ce qui permettra sans doute aux élèves de mieux être convaincu que cela est conforme au lancer d'une pièce. Inconvénient : à chaque appui de la touche, on ne simule qu'un seul lancer.

**3**<sup>e</sup> idée: En multipliant *rand* par un entier n, on obtient un décimal dans [0; n[. Or il existe une commande qui renvoie la partie entière d'un nombre, en général *partEnt* (maths, NUM, partEnt) parfois notée *int*. L'instruction *partEnt* (*rand*×n) renvoie donc, de façon équiprobable, un entier compris dans [0; n[, c'est à dire 0, 1, 2, ..., ou n –1. Ainsi *partEnt*(*rand*×2) renvoie 0 ou 1 et simule le lancer d'une pièce, *partEnt* (*rand*×6)+1 renvoie 1, 2, 3, 4, 5, ou 6 et simule le lancer d'un dé cubique.

Remarque: certains modèles de calculatrices dispose d'une commande, en général *randn* ou *randint* (maths, RND, randn) qui permet d'obtenir directement la même chose que ci-dessus, c'est-à-dire que *randn*(p;n) ou *randInt*(p,n) renvoie aléatoirement un nombre entier compris entre p et n.

**4**<sup>e</sup> **idée**: Pour simuler une expérience à deux issues mais non équiprobables (une pièce truquée par exemple), l'une des issues ayant une probabilité égale à p, et l'autre une probabilité égale à 1-p, il suffit d'utiliser l'instruction *partEnt(rand* + p). En effet, (*rand* + p) renvoie un nombre décimal dans [p; 1+p[. Donc *partEnt(rand* + p) renvoie 0 si le nombre décimal est dans [p; 1[ et 1 s'il est dans [1; 1+p[. Ainsi, 0 code l'issue dont la probabilité est 1-p, et 1 code celle dont la probabilité est p.

### Premier exemple : sondage pour un référendum

**Objectif:** Dans une situation où la loi de probabilité est connue, constater l'existence d'une fluctuation dans les échantillonnages (ici les sondages) et l'ampleur de cette fluctuation selon la taille de l'échantillon (ici le nombre de personnes interrogées).

**Situation :** un référendum vient d'avoir lieu. 54% des personnes ont voté OUI, et 46% ont voté NON. Un sondage à la sortie des urnes aurait-il permis de prévoir cette répartition avant la proclamation officielle ?

**De la situation à la simulation :** On est dans une situation où la <u>loi de probabilité est connue</u> (0,54 ; 0,46).

Pour expliquer la situation aux élèves, on peut expliquer que ce sondage sortie des urnes nous place exactement dans la même situation que si l'on tirait au hasard des cartes bleues ou blanches dans un jeu de 100 cartes dont 54 sont bleues et 56 sont blanches. On peut même réaliser vraiment ce jeu de 100 cartes. Les 54 cartes bleues sont numérotées de 00 à 53, les 46 cartes blanches sont numérotées de 54 à 99. Il y a bien concordance entre le numéro et la couleur, et c'est cette traduction numérique qui sera utilisée dans notre simulation.

**Réalisation de la simulation :** Les élèves, regroupés en binômes, simulent chacun un sondage de taille 50 (par exemple). Pour réaliser cette simulation, on peut utiliser avec les calculatrices la 2<sup>e</sup> idée décrite ci-dessus : on règle l'affichage sur Float 2 (2 chiffres après la virgule). A chaque exécution de *rand*, on regarde le nombre à 2 chiffres formé par la partie décimale. Si ce nombre est compris entre 00 et 53, c'est OUI, s'il est compris entre 54 et 99, c'est NON (cela fait bien 54 éventualités pour OUI et 46 pour NON).



Dans l'écran ci-contre, on a obtenu 2 OUI et 2 NON.

Mais on peut également utiliser la 4° idée : l'instruction *partEnt(rand* + 0,54). Le OUI est alors codé par 1 et le NON par 0, avec les probabilités voulues.

Une fois les simulations réalisées, les élèves calculent la fréquence observée de OUI sur leur sondage, ainsi que l'écart avec la fréquence réelle (54%). Dans une classe de 28 élèves, cela fait 14 sondages de taille 50. Le relevé de ces résultats au tableau permet de constater la fluctuation des résultats et l'amplitude des écarts avec la valeur réelle. On observe ensuite ce que l'on obtiendrait avec des échantillons de taille plus grande. Pour cela, il suffit de regrouper 4 sondages de 50 pour obtenir des sondages de taille 200 (on fait ainsi 3 sondages de taille 200 avec 12 sondages de taille 50). La fluctuation est moindre, les écarts avec la valeur réelle sont en général plus réduits. On regroupe finalement tous les sondages pour faire un seul échantillon (de taille 700 dans mon exemple, pas loin de la taille couramment pratiquée dans les sondages d'opinion réels).

A l'aide d'un tableur vidéo projeté, le professeur peut montrer des simulations de taille encore plus grande. Sur tableur *rand* correspond à *alea()*. La formule à écrire est =ENT(ALEA()+0.54) que l'on recopiera sur une plage voulue (A1:N50 par exemple, pour avoir un sondage de taille 700). Pour comptabiliser le nombre d'occurrences 1 sur cette plage (c.à.d. de OUI) on peut simplement utiliser =SOMME (A1:N50) ou plus généralement =NB.SI (A1:N50;"=1") utilisable dans d'autres situations.

On peut alors constater que la fluctuation est réduite, mais faire la remarque qu'elle ne l'est pas dans les mêmes proportions que la taille de l'échantillon : en passant d'échantillons de tailles 50 à 700, la fluctuation n'est (en général) pas divisée par 14. On peut enfin répondre à la question initiale : la plupart des sondages prévoient l'issue du référendum. Mais pas tous ! La proportion étant proche de 50%, il arrive que le hasard fasse mal les choses.

En conclusion, on peut à la fois montrer l'intérêt des sondages (interroger 700 personnes pour estimer l'opinion de millions de personnes a un sens), mais faire percevoir la prudence à observer quand on en donne le résultat. Toutefois, une erreur est à éviter : laisser penser aux élèves que les sondages sont à proscrire

Dans le prochain numéro, je proposerai deux autres exemples d'activités, dans des cas où la loi de probabilité n'est pas connue a priori . On verra alors que l'intuition peut assez facilement être prise en défaut.

### Probabilités en collège : exemples d'activité avec une simulation (suite)

Suite aux articles dans les deux numéros précédents des *Chantiers*, qui donnaient un premier exemple autour d'un sondage, voici deux autres exemples d'activités pour traiter la notion de probabilité en classe de 3<sup>e</sup>.

### Deuxième exemple : Le Vrai / Faux

**Objectif**: Dans une situation où la loi de probabilité n'est pas connue *a priori* (et ne se devine pas intuitivement), la simulation permet de mettre fortement en doute certaines conjectures intuitives ou éventuellement d'en conforter d'autres ou encore d'en formuler de nouvelles. Puis, la constitution organisée d'une liste des éventualités ou la réalisation d'un arbre de choix permet d'élucider *a posteriori* la situation et de trouver la loi de probabilité.

**Situation :** Un exercice comporte 4 affirmations pour lesquelles il faut dire si elles sont vraies ou fausses. En répondant complètement au hasard, quelles sont les chances d'avoir toutes les réponses correctes ? Quelles sont les chances d'avoir exactement la moitié des réponses correctes ? Quelles sont les chances d'avoir au moins la moitié des réponses correctes ?

Ce scénario est un grand classique, relevant de la loi binomiale. Mais un élève "débutant" a très peu d'intuition pour conduire un calcul ou un raisonnement solide. Pour la 2<sup>e</sup> question, par exemple, il est fréquent qu'il formule la conjecture : il y a 1 chance sur 2 que la moitié des réponses soient correctes. La simulation va mettre en doute cette conjecture, puis une démarche raisonnée va clarifier la situation.

#### De la situation à la simulation :

Ici chaque éventualité est un quadruplet du type (V<sub>1</sub>, F<sub>2</sub>, F<sub>3</sub>, V<sub>4</sub>). Les indices, outre qu'ils rappellent le numéro de la question dans l'exercice Vrai/Faux, permettent de distinguer l'évènement *l'affirmation 1 est vraie* de l'évènement *l'affirmation 4 est vraie*. En effet, considérer indistinctement l'évènement *l'affirmation est vraie* pour les 4 affirmations, ce que l'on voit souvent dans les exercices de ce type, entraine beaucoup de confusions chez les élèves.

### Réalisation de la simulation :

On fera remarquer également que l'expression *répondre au hasard* permet d'introduire le modèle d'un lancer de pièces répété 4 fois, ou

de toute autre situation où l'on répète 4 fois une expérience à 2 issues équiprobables.

On règle la calculatrice pour obtenir un affichage des nombres arrondis à 10<sup>-4</sup> près (mode FLOTT 4). Après chaque exécution de *rand*, on regarde la parité des 4 chiffres après la virgule. Un chiffre pair code Vrai et un chiffre impair code Faux.

Dans l'exemple ci-dessous, on obtient

$$\begin{array}{c} (F_1\,F_2\,F_3\,F_4) \\ (V_1\,V_2\,F_3\,V_4) \\ (F_1\,V_2\,F_3\,F_4) \end{array} \qquad \begin{array}{c} \texttt{rand} \\ \texttt{.9519} \\ \texttt{.2210} \\ \texttt{.3695} \end{array}$$

La séquence de 20 tirages est donc très rapide. Une fois terminé, ne pas oublier de remettre la calculatrice en affichage normal.

Les élèves (en binôme) répètent la simulation 20 fois (par exemple), et recensent les résultats dans un tableau comme ci-dessous.

$V_1$	$V_2$	F <sub>3</sub>	F <sub>4</sub>
$F_1$	F <sub>2</sub>	F <sub>3</sub>	$V_4$
$F_1$	$V_2$	$V_3$	$V_4$

Le professeur dévoile alors quelle est la séquence correcte (on peut proposer aussi un exercice réel dans lequel les élèves peuvent valider les bonnes réponses). Chaque binôme compte combien de fois ils observent le bon quadruplet dans leur échantillon de 20. Puis on calcule le nombre d'occurrences du bon quadruplet pour l'ensemble de la classe (avec une classe de 32 élèves, on a ainsi un échantillon de 640 quadruplets aléatoires). La fréquence observée du bon quadruplet donne une estimation des chances de réussite complète à l'exercice en répondant au hasard.

Pour estimer les chances d'avoir exactement, ou au moins la moitié de bonnes réponses, les élèves reprennent leur tableau de 20 quadruplets. Pour chacun d'eux, ils barrent les mauvaises réponses. Par exemple, si le bon quadruplet est (F1 V2 V3 V4), on barre comme dans le tableau ci-dessous :

M	$V_2$	J.	F
F <sub>1</sub>	FX.	F	$V_4$
$F_1$	$V_2$	$V_3$	$V_4$
•••	•••	•••	•••

Cela permet ensuite de compter rapidement le nombre d'occurrences de l'évènement *il y a exactement 2 bonnes réponses*, puis de l'évènement *il y a au moins 2 bonnes réponses*. La encore, une mise en commun, permet d'estimer les fréquences recherchées, et d'éprouver les conjectures initiales.

### Résolution du problème

Les élèves réalisent la liste exhaustive des 16 quadruplets possibles. Chaque V ou F ayant les mêmes chances d'être attribué pour constituer un quadruplet, on en conclut que les 16 quadruplets ont les mêmes chances d'être obtenus. Pour renforcer cette conviction, un arbre de choix pondéré par les fractions 1/2 permet de représenter le processus de fabrication et la liste des quadruplets. L'approche fréquentiste de la situation joue ici un rôle essentiel car elle permet de donner une interprétation de cette pondération : sur un très grand nombre de tirages aléatoires, <u>la moitié des cas</u> contiennent  $V_1$ , <u>parmi eux la moitié des cas</u> contiennent  $V_2$ , etc.

Les élèves peuvent repasser en couleur le chemin de l'arbre correspondant au bon quadruplet, dans une autre couleur ceux qui contiennent exactement 2 bonnes réponses, etc. Pour la mise en œuvre, donner aux élèves des arbres vierges évite les "buissons" fantaisistes... Le calcul des probabilités par le quotient du nombre de cas recherchés sur le nombre de cas total permet de connaître les valeurs théoriques des fréquences que l'on compare à celle que l'on a obtenues expérimentalement, et bien sûr à celles que l'on avait conjecturées de façon intuitive au début de l'activité. La place de la simulation est ici centrale : outre qu'elle met en doute les conjectures intuitives, elle rend plus naturel et cohérent le recours à la liste des éventualités, ainsi que la constitution d'un arbre pondéré dont le sens est plus explicite.

### Troisième exemple: Croix et Pile

### **Objectif**

Rencontrer une situation où les issues ne sont pas, contre toute attente, équiprobables, dans le cadre de ce que le programme, avec audace, a prescrit : *expériences aléatoires à une et* <u>deux épreuves</u> (celles à deux épreuves ne sont pas dans le socle commun).

#### Situation

Il s'agit d'un jeu pratiqué sous l'ancien régime. Il se joue à deux. Les joueurs déposent chacun une mise. L'un d'eux lance une pièce, si c'est CROIX, il remporte les mises. Si c'est PILE, il relance la pièce. Si c'est CROIX, il remporte les mises, sinon c'est l'autre joueur qui les gagne.



Quelles doivent être les mises de chacun pour que le jeu soit équitable ?

Pour en savoir plus sur ce jeu, sur la controverse entre Diderot et D'Alembert, et pour réaliser des simulations en ligne, voir :

http://irem-fpb.univ-lyon1.fr/feuillesprobleme/feuille11/enonces/croixoupile.html .

### De la situation à la simulation

Les élèves perçoivent que des mises égales ne seraient pas équitables, et admettent intuitivement qu'elles doivent être proportionnelles aux chances respectives des joueurs de gagner.

Les élèves ont pour première tâche, de déterminer les différentes issues de ce jeu. Il y en a 3 que l'on peut coder par : C, PC, PP. Ils émettent ensuite des conjectures répondant à la question. Il serait surprenant que la répartition (2/3, 1/3) ne soit pas envisagée. Si elle n'est pas proposée, on pourra évoquer la correspondance entre Diderot et D'Alembert, ce dernier soutenant la répartition (2/3, 1/3). On réalise donc une simulation pour mettre cette conjecture à l'épreuve (ou d'autres s'il y en a).

#### Réalisation de la simulation

Pour simuler une partie, il suffit d'exécuter l'instruction randn(0;1) ou  $partEnt(rand \times 2)$  qui renvoie de façon équiprobable 0 (Croix) ou 1 (Pile) donc simule le lancer d'une pièce. Si c'est 1, il faut donc exécuter à nouveau l'instruction pour lancer la pièce une  $2^e$  fois. Une partie est donc simulée par l'exécution de 1 ou 2 fois l'instruction selon les cas. Entre 2 parties, il vaut mieux effacer l'écran pour ne pas se perdre (pour les écrans à plus de 2 lignes d'écriture).

Chaque binôme réalise une série de 100 simulations. Les fréquences observées sur chaque série font apparaître une valeur très souvent audessus de 0,7 et ne sont pas réparties autour de 2/3. Pour réduire l'ampleur de la fluctuation d'échantillonnage, on met en commun toutes les séries des élèves pour obtenir une seule série de taille 1600. La fréquence observée est bien éloignée de 2/3, alors que la taille de la série est conséquente (estimation qualitative qui n'a de sens que si l'on a précédemment rencontré des situations comme celle du sondage, dans lesquelles on a pu quantifier l'ampleur de la fluctuation selon la taille de l'échantillon).

Pour savoir si cela peut quand même en imputer le hasard seul, on peut réaliser une simulation d'une autre expérience aléatoire, à 3 issues dont on est sûr qu'elles sont équiprobables. Les différentes séries de 100 obtenues par les élèves sont cette fois <u>nettement mieux réparties</u> autour de 2/3.

### Résolution du problème

Pour élucider la situation, on peut proposer de reformuler le scénario de la façon suivante : on joue avec 2 pièces, l'une rouge, l'autre bleue, que l'on jette simultanément. Si la pièce rouge est Croix, le joueur gagne, que la pièce bleue soit Croix ou Pile. Si la pièce rouge est Pile, on regarde la pièce bleue. Si elle est Croix, le joueur gagne, sinon il perd.

Pour convaincre de l'équivalence des 2 scénarios on pourra faire l'arbre pondéré de ce nouveau scénario, puis effacer les deux branches "inutiles", ce qui donne l'arbre du 1<sup>er</sup> scénario. La répartition 3/4 1/4 est établie, et est conforme aux estimations obtenues avec les premières séries de simulations.

Enfin, on peut réaliser une simulation de ce  $2^{\text{nd}}$  scénario en exécutant l'instruction : randn(0;2) + randn(0;2)

(R;B)	(0;0)	(0;1)	(1;0)	(1;1)
Somme	0	1	1	2
Issue obs.	0	1		2
Partie	Gagnée			Perdue

Ce tableau montre la conformité de l'instruction avec le scénario et renforce la compréhension de la répartition 3/4, 1/4. Les résultats des séries de simulations sont bien conformes à ceux obtenus dans la simulation du 1<sup>er</sup> scénario (les fréquences sont proches de 0,75). Dans cette activité, les simulations ont eu à nouveau un rôle central puisqu'elles ont permis d'invalider la conjecture initiale (en établissant en particulier que la fluctuation ne pouvait expliquer le décalage observé), mais également de mieux comprendre le raisonnement qui a prévalu pour résoudre le problème.

L'introduction des probabilités dans le secondaire, relève d'une démarche particulière. Il s'agit d'un domaine des mathématiques atypique, avec des connaissances de nature spécifique, assez déroutantes si l'on cherche à transposer les procédures mises en œuvre habituellement, celles des élèves et celles des professeurs. Comme pour la géométrie à l'école primaire, les élèves ont d'abord à appréhender et comprendre la nature de ces situations nouvelles avant de constituer des compétences formelles pour résoudre les problèmes. L'écolier perçoit globalement les propriétés puis les valide à l'aide des instruments. Le collégien prévoit intuitivement ce que peut produire une expérience aléatoire, et le valide à l'aide de la simulation

Rémy Coste

### Du traitement de l'erreur

Pistes de réflexion à partir de l'exemple de la multiplication des décimaux en 6e

Voici un compte rendu d'expérience en classe de 6<sup>e</sup> dans un collège de ZEP, en Réseau Ambition Réussite. Une particularité : l'évaluation diagnostique a été observée par un professeur de français (professeur d'appui référent). Le but de cette expérience était d'analyser les différentes démarches des élèves pour comprendre l'origine de leurs difficultés. Il s'agissait également de modifier la culture de l'évaluation à la fois pour le professeur et pour l'élève, et de tenter d'en faire une ressource efficace d'un dialogue pédagogique. Eventuellement, ce diagnostique pouvait servir pour mettre en place un dispositif de soutien ou un PPRE (Programme Personnalisé de Réussite Educative). Cette expérience a également servi de support à la formation des assistants pédagogiques, qui étaient présents.