PREAMBULE

Des erreurs, maintes fois constatées chez les collégiens, et même chez les lycéens, lorsqu'il s'agit pour eux de calculer des mesures d'aires, nous ont amenés à réfléchir sur les raisons qui peuvent en être à l'origine. Nos pratiques et nos observations de classes nous ont en effet permis de rencontrer des confusions importantes qui se traduisent par exemple par un mauvais choix d'unité ou l'utilisation inadaptée d'une formule. Ces difficultés sont présentes dès l'entrée en sixième comme le font apparaître les résultats de l'évaluation nationale depuis plusieurs années.

Nous avons donc d'abord essayé de comprendre pourquoi ces erreurs sont aussi fréquentes et aussi durables. En étayant notre réflexion sur des travaux issus de la recherche et sur les scores des évaluations nationales à l'entrée en sixième de la DEP et des évaluations de l'A.P.M.E.P., nous reprenons l'hypothèse qu'elles trouvent leurs racines dans des représentations entretenues, voire créées par des habitudes d'enseignement. En confrontant l'explicitation de liens entre différents concepts, comme ceux qui existent entre surfaces, grandeurs et nombres, et l'analyse des anciens programmes du collège et de l'école élémentaire, nous adoptons un double point de vue : l'identification trop précoce entre grandeurs et nombres favorise l'amalgame entre aires et périmètres, et l'introduction trop précoce de formules élimine toute autre considération.

Les nouveaux programmes du cycle 3 de l'école élémentaire insistent sur les activités de classement et de rangement des surfaces selon leurs aires comme activités préliminaires à toute mesure. Ceux de sixième soulignent l'importance de la poursuite de ce travail et mettent l'accent sur la dissociation du concept d'aire de celui de périmètre.

Nous avons donc cherché à élaborer des séances qui prennent en compte à la fois les aspects didactiques cités ci-dessus et les instructions officielles actuellement en vigueur. Ces séances ont été construites en commun, expérimentées sur le terrain et retravaillées ensuite. Elles concernent soit l'introduction de la notion d'aire à l'école élémentaire, soit la réactivation de cette notion en sixième. Elles ne constituent évidemment pas des modèles, mais nous espérons qu'elles suggèrent fortement des pratiques d'enseignement susceptibles de réduire les confusions rencontrées chez les élèves.

Nous avons enfin réfléchi aux différents liens qui existent avec les concepts d'aire et de périmètre à travers le collège, et nous proposons des énoncés d'exercices les illustrant. Certains de ces exercices privilégient par ailleurs la reconfiguration, qui constitue l'un des traitements figuraux qui rendent compte du rôle heuristique des figures ; ces exercices ont donc aussi pour but de favoriser l'exploitation des possibilités offertes par les figures.

Nous n'accompagnons pas ces documents d'une quelconque analyse ; nous pensons seulement qu'ils s'inscrivent assez bien dans la continuité des activités détaillées auparavant.

Programmes de l'école primaire et documents d'application sur « aire et périmètre »

Cycle des approfondissements

Contenu	Compétences	Commentaires
Connaissances relatives aux grandeurs et à leurs mesures.	- Connaître les unités légales du système métrique de longueur. - Utiliser les équivalences entre les unités usuelles de longueur.	- Les élèves doivent avoir une bonne connaissance des relations entre les unités les plus utilisées : 1 m = 100 cm; 1 cm = 10 mm; 1 dm = 10 cm; 1 km = 1000 m. Ces relations doivent être mémorisées et donc utilisables sans recours à un tableau de conversion. - Quelques références historiques peuvent être fournies aux élèves.
Périmètre d'un polygone	- Construire un objet dont le périmètre est donné. - Effectuer des calculs simples sur les mesures en tenant compte des relations entre les diverses unités correspondant à une même grandeur En particulier, calculer le périmètre d'un polygone. - Estimer une mesure (ordre de grandeur) du périmètre.	- Construire un rectangle qui a même périmètre qu'une figure donnée. - Le calcul du périmètre d'un cercle à l'aide d'une formule n'est pas au programme. Mais, pour le cercle, comme pour d'autres figures, l'évaluation du périmètre par différentes méthodes permet aux élèves de donner du sens à la notion de périmètre et, notamment de la distinguer de celle de l'aire. C'est également l'occasion de mettre en évidence la relation de proportionnalité qui existe entre le rayon et le périmètre du cercle.
Notion d'aire par activités de classement, de rangement de surfaces qui précèdent les activités de mesurage avec unité choisie, cm², dm², m², km² et leur relation	- Classer et ranger des surfaces selon leur aire, soit par superposition des surfaces, soit par découpage et recollement des surfaces avec une surface de référence.	- Activités de classement et rangement des surfaces selon leurs aires précèdent les activités de mesurage avec une unité choisie. En effet, par superposition et recomposition, il est possible de comparer des aires ou de réaliser des surfaces de même aire. Les élèves doivent prendre conscience que l'aire d'un assemblage de figures ne change pas lorsque l'assemblage est modifié. - L'aire d'une surface obtenue par recollement de deux surfaces est égale à la somme des aires de ces deux surfaces, mais son périmètre n'est pas égal à la somme des périmètres des deux surfaces initiales. - La reconnaissance de rapports entre deux grandeurs précède la mesure de l'aire.
	- Construire une surface qui a même aire qu'une surface donnée (mais pas superposable).	- Activités à base de puzzle pour montrer que deux figures non superposables peuvent avoir la même aire.
	- Différencier aire et périmètre d'une surface, en particulier savoir que deux surfaces peuvent avoir la même aire sans avoir nécessairement le même périmètre et inversement.	- Les concepts de périmètre et d'aire ne doivent pas se réduire pour l'élève à des nombres ou à des formules associés à des figures. Il faut distinguer ces deux notions. Par exemple, on peut construire des rectangles différents de même aire avec calcul du périmètre ou de même périmètre avec calcul de l'aire. On peut aussi, une figure étant donnée, proposer de la modifier pour en obtenir une autre d'aire plus petite mais de périmètre plus grand.

	- Mesurer l'aire d'une surface par un pavage effectif à l'aide d'une surface de référence (d'aire une unité) où grâce à l'utilisation d'un réseau quadrillé (le résultat étant une mesure exacte ou un encadrement).	- La forme des surfaces de référence sera variée et en particulier, on ne se limite pas à n'utiliser que des unités de forme carrée.
	- Calculer l'aire d'un rectangle dont l'un des côtés au moins est de dimension entière.	- Calculs d'aire de rectangles, dont les côtés ont des dimensions non entières, sont ramenés à des calculs avec des dimensions entières par changement d'unités, ou par pavage effectif par des carrés de 1 cm² et de 1 mm² ; les calculs peuvent aussi être faits à l'aide d'une calculatrice. Mais aucune compétence n'est exigible à ce sujet.
	- Connaître et utiliser les unités usuelles : cm², dm², m² et km².	- Les élèves doivent être conscients que ces unités peuvent correspondre à des surfaces de formes variées. Ainsi le dm² ne doit pas seulement être associé uniquement à un carré de 1 dm de côté, mais aussi, par exemple à un triangle ou à un rectangle obtenu par découpage et recollage du carré de 1 dm de côté. Le mm² peut également être utilisé, avec un support de type papier millimétré par exemple, pour calculer l'aire d'un rectangle dont la longueur et la largeur sont données en cm.
	- Connaître et utiliser quelques égalités : 1 m² = 100 dm² 1 dm² = 100 cm² 1 km² = 1 000 000 m²	- La connaissance de l'égalité entre, par exemple, 1 dm² et 100 cm² est construite par le pavage effectif d'un carré (ou un rectangle) de 1 dm² avec des carrés de 1 cm de côté. - L'égalité entre 1 km² et 1 000 000 m² est obtenue par le calcul, en imaginant le pavage correspondant. - En situation, les élèves peuvent être confrontés à des unités agraires (are, hectare) et avoir à utiliser l'équivalence entre 1 hectare et 10 000 m² qui leur sera alors fournie. - Les conversions systématiques d'aires ne sont pas au programme du cycle 3 ; elles seront traitées au collège. En situation, les élèves peuvent cependant avoir à réaliser de telles conversions en s'appuyant sur leur connaissance des équivalences entre unités et en utilisant un raisonnement (voir proportionnalité)

Eléments d'aide à la programmation sur la mise en place du concept d'aire au cycle 3

(documents d'application)

Aires

Année 1	Année 2	Année 3

- Classer et ranger des surfaces (figures) selon leur aire (par superposition découpage et recollement ou pavage par une surface de référence).
- Construire une surface qui a même aire qu'une surface donnée (et qui ne lui est pas superposable).
- Différencier aire et périmètre d'une surface, en particulier savoir que deux surfaces peuvent avoir la même aire sans avoir nécessairement le même périmètre et qu'elles peuvent avoir le même périmètre sans avoir nécessairement la même aire.
- Mesurer l'aire d'une surface grâce à un pavage effectif à l'aide d'une surface de référence (d'aire une unité) ou grâce à l'utilisation d'un réseau quadrillé (le résultat étant une mesure exacte ou un encadrement).
- Calculer l'aire d'un rectangle dont l'un des côtés au moins est de dimension entière.
- Connaître et utiliser les unités usuelles (cm^2, dm^2, m^2 et km^2) ainsi que quelques équivalences :
  ($1\,m^2 = 100\,dm^2, 1\,dm^2 = 100\,cm^2, 1\,km^2 = 1000000\,m^2$)

Légende

Pendant la période indiquée les activités sont orientées vers :
- l'approche et la préparation lorsque le trait est fin ;
- la construction* et la structuration, lorsque le trait est épais.

Lorsqu'il n'y a pas de trait les activités ne sont pas encore mises en place.
* Pour certains élèves, la période de construction doit être poursuivie pendant la période de consolidation.

Aires et longueurs à travers les programmes du collège

En sixième (programme mis en place en 2005, ne présentant pas, sur ces contenus, de réelles différences avec le programme encore en vigueur cette année) :

Contenu	Compétences exigibles	Commentaires
Longueurs, masses, durées	- Effectuer, pour les longueurs, des changements d'unités de mesure. - Comparer des périmètres. - Calculer le périmètre d'un polygone. - Connaître et utiliser la formule donnant la longueur d'un cercle.	Les activités de comparaison des périmètres peuvent faire intervenir diverses méthodes : report de longueur sur une demi-droite, recours à la mesure, utilisation d'un raisonnement. La comparaison des périmètres sans les mesurer est particulièrement importante pour assurer le sens de cette notion. Il s'agit en sixième d'introduire le nombre π ; c'est l'occasion de proposer une activité basée sur un évènement scientifique de portée historique. Des activités de mesurage permettent de conjecturer l'existence d'une relation de proportionnalité entre la longueur du cercle et le rayon. Certains travaux sur les périmètres conduisent à décrire des situations mettant en jeu des fonctions notamment à travers l'utilisation de formules (par exemple : exprimer le périmètre d'un carré en fonction de la longueur a de son côté). Le travail sur les périmètres est également favorable à une première initiation aux écritures littérales dans l'élaboration par les élèves d'une formule exprimant le périmètre d'une figure en fonction d'une ou de deux longueurs désignées par une ou deux lettres.
Aires : **Mesure, comparaison et calcul d'aires**	- Comparer des aires - Déterminer l'aire d'une surface à partir d'un pavage simple.	Poursuivant le travail effectué à l'école élémentaire, les élèves sont confrontés à des problèmes dans lesquels il faut : - comparer des aires à l'aide de reports, de décompositions, de découpages et de recompositions, sans perte ni chevauchement ; - déterminer des aires à l'aide de quadrillages et d'encadrements.
	- Différencier périmètre et aire.	Certaines activités proposées conduisent les élèves à comprendre notamment que leurs sens de variation ne sont pas toujours similaires.
	- Connaître et utiliser la formule donnant l'aire d'un rectangle.	Au cycle 3 de l'école élémentaire, les élèves ont calculé l'aire d'un rectangle dont l'un des côtés au moins était de dimension entière. En sixième le résultat est généralisé au cas de rectangles dont les dimensions sont des décimaux.
	- Calculer l'aire d'un triangle rectangle	Des manipulations permettent aux élèves de comprendre le passage du rectangle au triangle rectangle. A partir de là, ils peuvent être confrontés au calcul d'aires de figures décomposables en rectangles et en triangles rectangles.
	- Effectuer, pour les aires, des changements d'unités de mesure	Comme pour les longueurs, l'utilisation des équivalences entre diverses unités est préférée à celle systématique d'un tableau de conversion.
Symétrie orthogonale par rapport à une droite **(symétrie axiale)**		Dans la continuité du travail entrepris à l'école élémentaire, les activités s'appuient encore sur un travail expérimental (pliage, papier calque) permettant d'obtenir un inventaire abondant de figures simples, à partir desquelles sont dégagées les propriétés de conservation de la symétrie axiale (distances….aires)

Remarque : les travaux « géométrico-numériques » peuvent constituer un terrain privilégié pour aborder le raisonnement sur des îlots déductifs bien circonscrits, notamment à propos de comparaisons de longueurs et d'aires.

En cinquième :

Contenu	Compétences exigibles	Commentaires
Prismes droits, cylindres de révolution	- Calculer l'aire latérale d'un prisme droit à partir du périmètre de sa base. Calculer l'aire latérale d'un cylindre de révolution.	
Symétrie centrale		Les travaux conduiront à la mise en évidence de la conservation des distances, de l'alignement, des angles et des aires…
Parallélogramme	- Calculer l'aire d'un parallélogramme.	L'aire du parallélogramme est à relier à celle du rectangle.
Triangle	- Calculer l'aire d'un triangle connaissant un côté et la hauteur associée.	à relier à l'aire du parallélogramme.
Cercle	- Calculer l'aire du disque de rayon donnée	
Proportionnalité		Les activités numériques et graphiques pourront se référer à l'un ou l'autre thème exploitant des formules, notamment de longueur, d'aire et de volume. Ainsi, on pourra envisager des variations : - de l'aire d'un triangle ou d'un parallélogramme, de celle d'un disque, - de la longueur d'un arc de cercle, de l'aire d'un secteur angulaire, - du volume ou de l'aire latérale d'un cylindre ou d'un prisme droit, en fonction d'une variable de la formule, toute autre variable étant fixée.

En quatrième :

Contenu	Compétences exigibles	Commentaires
Pyramide et cône de révolution.		La recherche de l'aire latérale d'un cône de révolution peut-être une activité de mise en oeuvre de la proportionnalité. On pourra à l'aide des formules d'aires ou de volumes, étudier les variations d'une grandeur en fonction d'une autre.
Nombres et calcul numérique : touche √ de la calculatrice		On peut rattacher le calcul d'une racine carrée à des problèmes où interviennent l'aire d'un carré et la mesure de son côté.

En troisième :

Contenu	Compétences exigibles	Commentaires
Calculs d'aires et de - volumes	Calculer l'aire d'une sphère de rayon donné.	Réinvestissement et entretien d'acquis des années précédentes : aires des surfaces et volumes .des solides étudiés dans ces classes
Effets d'une réduction - ou d'un agrandissement sur des aires ou des volumes	Connaître et utiliser le fait que, dans un agrandissement ou une réduction de rapport k, ▫ l'aire d'une surface est multipliée par k^2, ▫ le volume est multiplié par k^3.	Des activités de comparaison d'aire seront autant d'occasions de manipulation de formules et de transformation d'expressions algébriques.

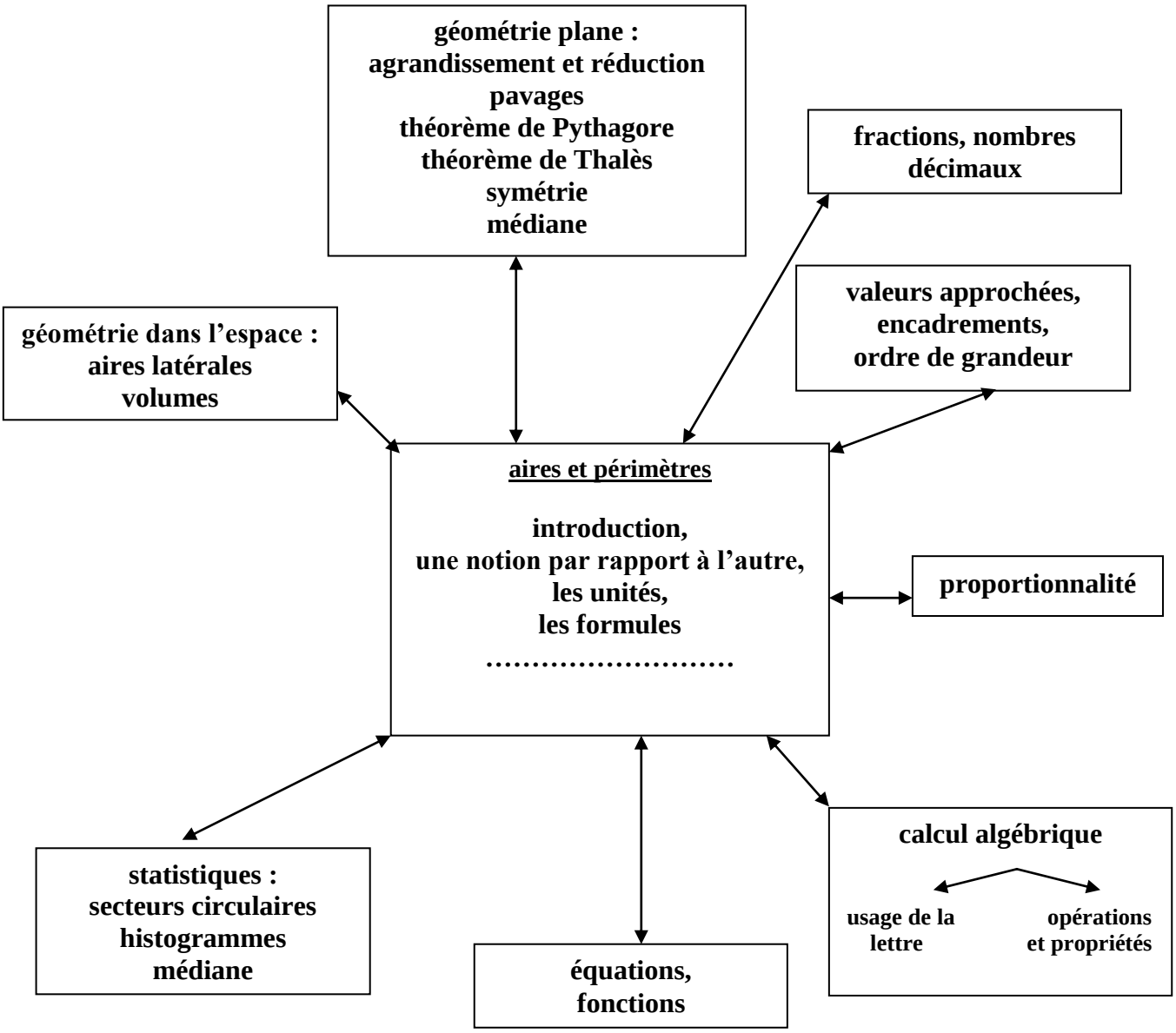
Place des grandeurs dans l'enseignement des mathématiques au collège : Les grandeurs et les programmes du collège

En mathématiques, on ne travaille pas **sur** des grandeurs (c'est l'objet d'autres disciplines …) mais **avec** des grandeurs ou **à partir** d'elles ; ici se situe l'interaction entre les mathématiques et les autres disciplines. Une exception : longueurs, aires ou volumes sont des grandeurs appartenant au champ mathématique, tandis que la mise en évidence de l'aspect multidimensionnel des deux dernières correspond à un travail **sur** des grandeurs. Le travail sur longueurs et aires est indispensable pour présenter aux élèves les nombres non entiers et les opérations étudiées au collège.

Au terme du collège : les prolongements.

L'étude des variations de longueurs, d'aires ou de volumes ainsi que celle des fonctions linéaires et affines en lien avec la proportionnalité faites au collège préparent aux démarches nécessaires à l'introduction de l'analyse au lycée.

AIRES, PERIMETRES ET AUTRES NOTIONS



CONSTRUCTION DU CONCEPT D'AIRE

A . Introduction

1. Problématique :

Dans le document d'accompagnement des nouveaux programmes du cycle III, on peut lire, en ce qui concerne « grandeurs et mesures » :

- « **Le domaine de la mesure est important à double titre** :
  - parce que les élèves doivent acquérir des compétences et des connaissances spécifiques relatives à différentes grandeurs et à leur mesure
  - parce qu les activités de mesurage font intervenir, en étroite imbrication, des notions géométriques et des notions numériques et, par conséquent, contribuent à une meilleure maîtrise des unes et des autres….»

- Plus loin : « ….On peut distinguer trois types d'activités :
  - celles où il s'agit de mettre en relation des objets visibles et la mesure d'une des grandeurs qui peuvent lui être attachées…
  - celles dans lesquelles un mesurage effectif n'est pas possible ou n'est pas nécessaire….
  - **celles où il s'agit de comparer des objets selon une grandeur ou d'opérer sur des grandeurs, sans mesurer**, en utilisant des procédés de comparaison adaptés :…..découpage, recollement et superposition pour les aires… ; **ces activités permettent aux élèves de construire le sens de la grandeur, indépendamment de la mesure et avant que celle-ci n'intervienne….. »**

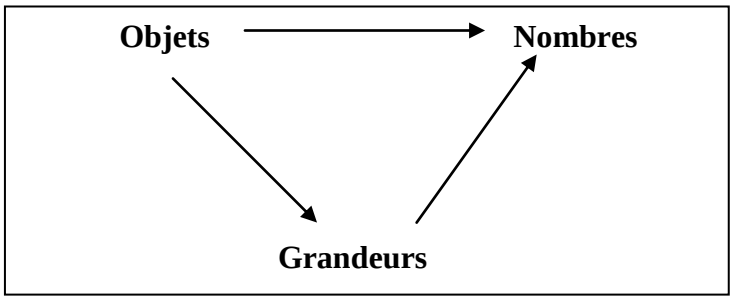
Nous nous sommes intéressés à ce dernier type d'activités car il est prouvé **qu'une construction insuffisante de la grandeur est responsable d'un certain nombre de difficultés des élèves :**

- l'aire et le périmètre sont amalgamés à la surface et liés à sa forme. Par exemple, une diminution de l'aire est comprise comme une diminution de la surface, avec sa forme, et va de pair avec une diminution de périmètre.

- l'aire est un nombre, ce qui favorise l'amalgame des grandeurs aire et longueur. L'élève se place dans un champ numérique et ne relève que des éléments pertinents du calcul, par exemple des mesures de longueur qui paraissent caractéristiques de la surface considérée et qu'il combine dans des formules plus ou moins fondées telles que « multiplier les mesures de deux côtés d'un parallélogramme pour trouver son aire…. ».

- L'aptitude à décomposer l'aire d'une surface comme somme ou différence des aires de figures simples qui la composent n'est pas opérante (par exemple l'aire d'un trapèze rectangle comme somme ou différence des aires d'un rectangle et d'un triangle rectangle).

2. Le problème de la mesure de l'aire (comme celui de la mesure du périmètre) consiste à associer un nombre à une surface selon le diagramme :



- L'objet physique a une surface modélisée par l'objet géométrique (partie du plan).

- L'aire est qualifiée de **grandeur mesurable**. En effet, sont appelées grandeurs mesurables **celles pour lesquelles on pourra définir :**

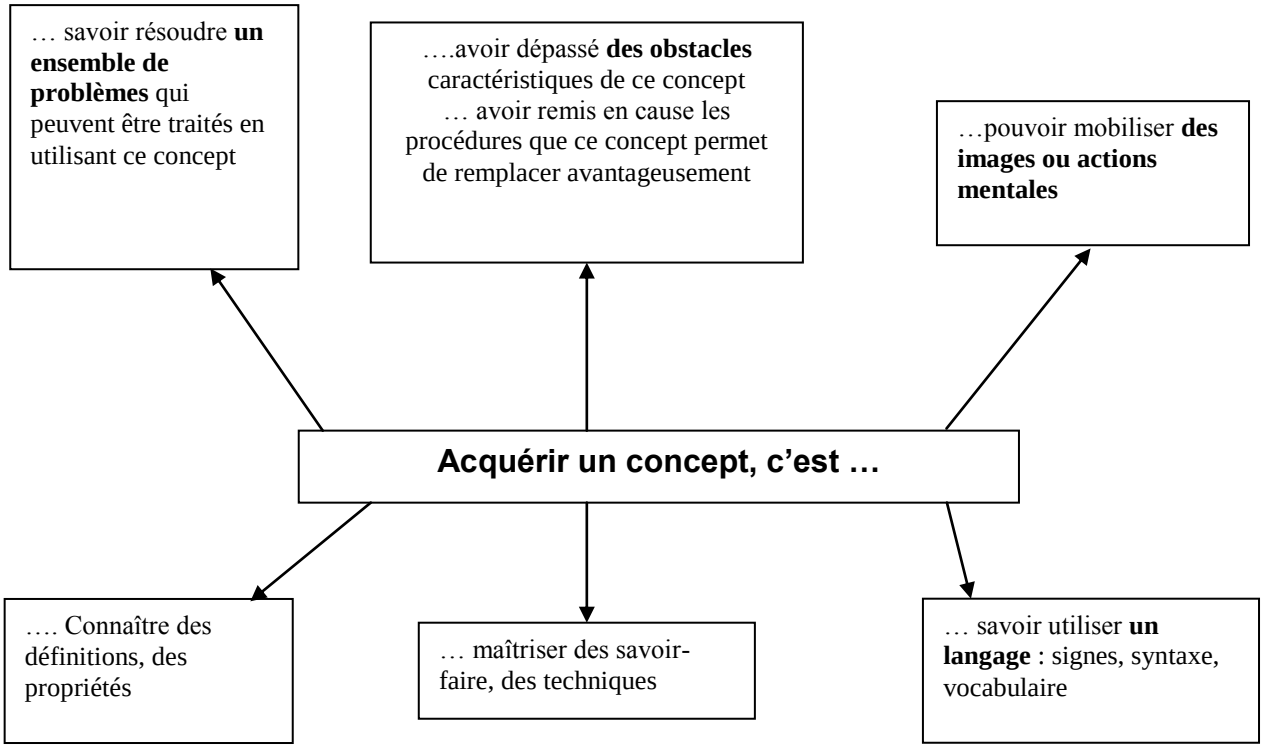
  - une relation d'équivalence comme « a la même aire que » pour les aires,
  - une relation d'ordre comme « a une plus grande aire que.. »,
  - une opération interne (sommation),
  - une opération externe (multiplication par un nombre)

- Une mesure est un nombre qui dépend de l'unité d'aire choisie.

B. Mise en place du concept d'aire

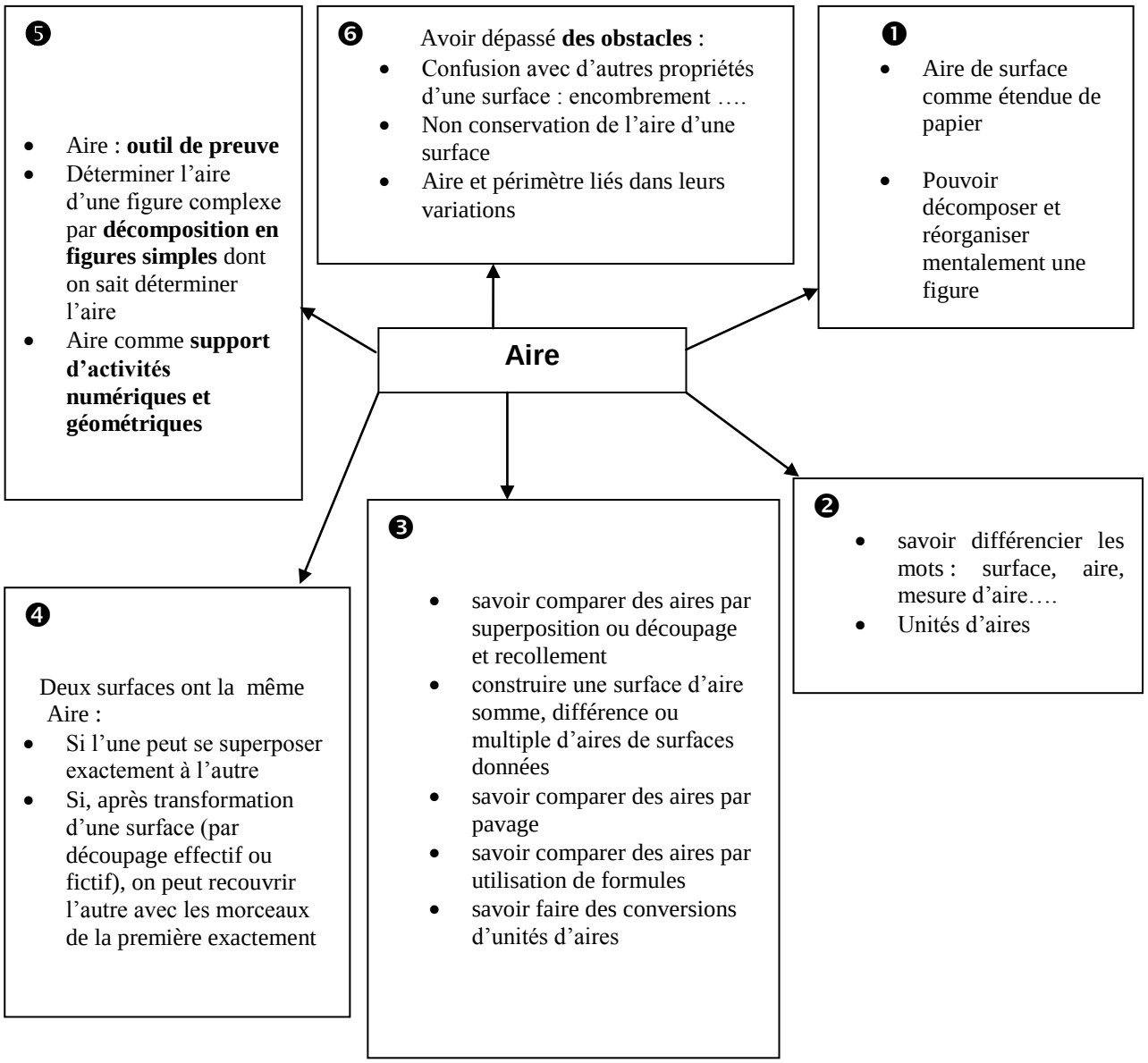
1. Qu'est-ce que s'approprier un concept ?

On peut caractériser l'acquisition d'un concept par le schéma suivant (d'après « apprentissage géométrique au cycle 3 et argumentation en géométrie ». Actes du XXVIIe colloque inter IREM) :



2. Concept d'aire

En reprenant la grille d'appropriation d'un concept, on obtient le schéma suivant (non définitif) qui permet d'élaborer des situations visant l'appropriation de ce concept.



3. Des situations pour construire le concept d'aire

a. Introduction du concept :

Dans ces situations à support matériel, les élèves vont devoir dans un premier temps superposer, découper et recoller pour comparer des surfaces selon ce que l'on sera amené à appeler « étendue de papier » puis « aire ».
Progressivement, l'objectif sera de trouver au problème proposé une solution qui se dispensera des manipulations d'objets réels mais qui pourra s'y référer. Ainsi, on passera de l'action sur des objets réels à l'action mathématique. Cette dernière se situe au niveau de l'anticipation.

Voir « Fiches d'activités n° 1, 2 et 3 ».

b. D'autres activités en CM1

Pour construire le sens de la mesure :

- Construire des surfaces ayant même aire qu'une surface donnée

- *Pour préparer le concept de mesure :*

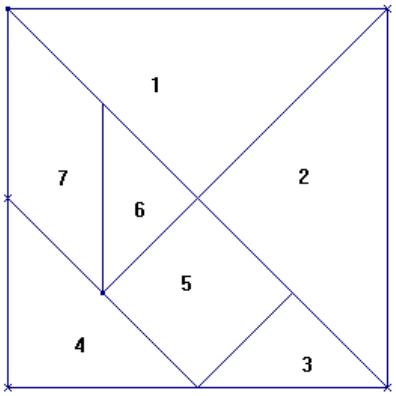
  - Trouver des rapports entre des aires : double, moitié, triple

c. Evaluation

- Activité permettant d'évaluer la capacité des élèves à comparer des aires après plusieurs séances consacrées à l'apprentissage du concept d'aire.

- Déroulement de la séance :

- Les élèves disposent d'un tangram
- Le découpage n'est pas autorisé
- La consigne est la suivante : *« comparer les aires du carré 5 et du parallélogramme 7 ; Justifiez votre réponse ».*



- Commentaires :

- Sur les 21 élèves présents, dont 15 élèves de CM1 et 6 de CM2, 6 trouvent que les aires sont égales.

- Sur les six qui ont trouvé des aires égales, trois ont partagé les quadrilatères selon leurs diagonales et justifient leur réponse par la réorganisation des triangles obtenus, deux les pavent avec un carré et des triangles rectangles, ou uniquement avec des triangles rectangles superposables. Pour le sixième, la comparaison est réalisée de manière perceptive.
  Sur les six, quatre ont pavé leurs figures avec uniquement des triangles superposables.
  Un seul a décompté des triangles pour justifier sa réponse. Ces six élèves sont des élèves de CM1.

  Quant aux autres :
- Six se fient à leur perception (parce que la figure 5 est un carré et que la figure 7 est un parallélogramme), ou justifient leur réponse par la non superposabilité des surfaces. L'un d'eux a répondu que les aires ne sont pas égales parce que dans le carré il y a 15 lignes alors qu'il y en a 7 dans le parallélogramme (le tracé du tangram a été réalisé sur du papier quadrillé).

- Cinq élèves ont tracé un carré identique dans les deux figures puis ont comparé les surfaces restantes. Ils se sont sans doute inspirés de l'activité où l'on demandait de rechercher les figures d'aire double, triple …. de celle d'un carré donné.

- Un élève a pavé les surfaces avec des rectangles. Il en décompte 15 pour le carré, avec trois autres rectangles d'aire inférieure ; 12 pour le parallélogramme avec ce qu'il pense être des quarts de rectangle. Il trouve 16 unités et demi pour le carré et 15 pour le parallélogramme. (Le carré de référence utilisé dans les activités précédentes a déjà été appelé carré unité).

- Un élève a pavé les surfaces avec des carrés et a trouvé « 9 aires » pour le carré et 7 pour le parallélogramme.

- La justification d'un élève est difficile à interpréter.

C. Conclusion

La construction d'un concept est un travail de longue haleine. Les activités proposées reposent toutes sur un même objectif : **introduire la notion d'aire comme une grandeur autonome, en la dégageant de la forme d'une surface plane.**
Dans un premier temps, les situations d'apprentissages s'articulent surtout autour de « manipulations réelles » (inclusion, superposition, découpage et recollement, ….). Elles permettent, entre autres, de dissocier les notions d'aire et de longueur, en particulier aires et périmètres sans l'intervention des nombres.
L'acquisition « d'images mentales » (découpage et superposition fictifs d'une surface, etc…) à partir de ces situations permettra aux élèves d'imaginer plus tard des procédures pour résoudre des problèmes et par ce biais, d'entrer dans « l'action » mathématique.

Fiche n° 1

RECOUVREMENT D'UNE SURFACE

- **Niveau concerné** : Cycle 3 /CM1
- **Matériel** :
  - différentes surfaces de papier décorées

  Parmi ces surfaces de différentes formes, certaines recouvrent de manière relativement évidente la surface nue.
  D'autres de la même manière ne la recouvrent pas entièrement et certaines enfin, nécessitent des transformations (découpage et déplacement des pièces découpées, pliage, etc. …) pour la recouvrir, parfaitement ou non.
  Les formes données à ces surfaces doivent être relativement simples afin « d'induire » chez les élèves la manière de recouvrir la surface nue.

  - surface nue à recouvrir (rectangle ou forme simple)
- Travail réalisé **en groupes**
- **Durée de la séance** : 40 minutes environ.

- **Objectifs** :
  - introduction du concept d'aire en tant que grandeur
  - comparaison de surfaces

- **DEROULEMENT DE LA SEANCE**

Etape 1 :

Phase 1 : Tous les groupes reçoivent les mêmes surfaces décorées et la surface nue.

- **Consigne**:

« V*ous devez recouvrir la surface nue à l'aide des surfaces décorées ; la surface nue ne doit être recouverte que d'un seul motif et entièrement. Plusieurs surfaces décorées conviennent.»*

- *Commentaires sur la mise en œuvre* : Il sera peut-être nécessaire de préciser la consigne car les élèves pensent que l'on peut utiliser des morceaux de surfaces à motifs différents pour recouvrir la surface nue. Ils utilisent en priorité les surfaces dans lesquelles la surface nue peut être incluse et estiment avoir répondu à la consigne. Ils ne pensent pas d'emblée au découpage.

Phase 2 : Après quinze minutes de recherche, chaque groupe vient donner ses solutions.
Une nouvelle recherche pourra être proposée si trop de groupes n'ont pas pensé aux transformations possibles (découpage, déplacement ……..). Il leur est alors demandé de trouver d'une part les surfaces qui ne peuvent pas recouvrir la surface nue et d'autre part celles qui peuvent la recouvrir moyennant découpage.

- *Commentaires* : Les élèves trouvent rapidement les surfaces qui peuvent être incluses dans la surface nue, puis parviennent à trouver celles qui la recouvrent exactement après découpage.

Conclusion et introduction du mot « aire » :
Les surfaces décorées qui peuvent, lorsqu'on les découpe, recouvrir exactement, sans chevauchement, la surface nue, ont la même étendue de papier qu'elle. On dit que **« ces surfaces décorées ont la même aire que la surface nue »**.

⌘ Etape 2 :

A l'issue de cette recherche, les élèves sont invités à classer les surfaces par ordre de grandeur : « même étendue de papier que la surface nue , plus petite étendue…… »

- **Consigne**:

« Vous allez maintenant ranger les surfaces décorées, de celle qui a la plus petite aire à celle qui a la plus grande aire, de celle qui comporte le moins de papier à celle qui en comporte le plus. Puis vous noterez le rangement trouvé sur votre feuille. »

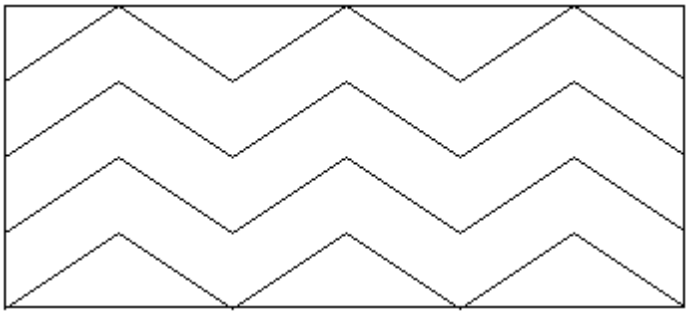
- *Commentaires* : Cette deuxième étape est plus difficile. Les productions des élèves mettent en évidence leurs conceptions erronées : rangement perceptif, prise en compte d'une dimension, de l'encombrement.

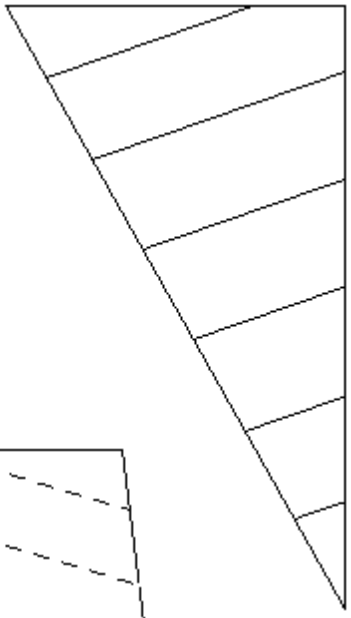
Lors de la mise en commun, on s'attachera à lever les ambiguïtés qui existent pour les élèves au niveau de la signification du concept d'aire.
On demandera aux élèves, pour chacune des surfaces décorées, de dire si elles ont une aire plus grande ou plus petite que la surface nue.

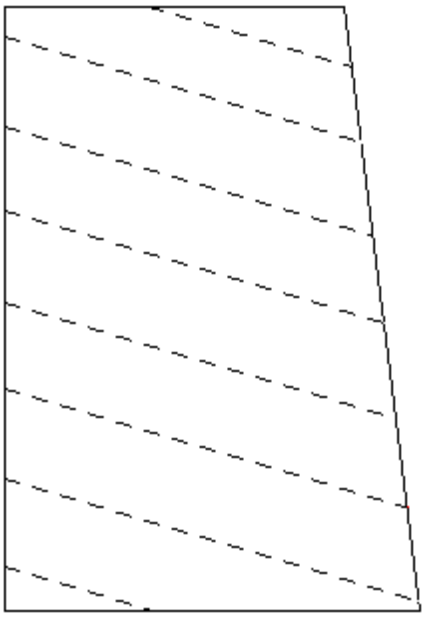
Conclusion:
On dit que **« deux surfaces ont la même aire :**

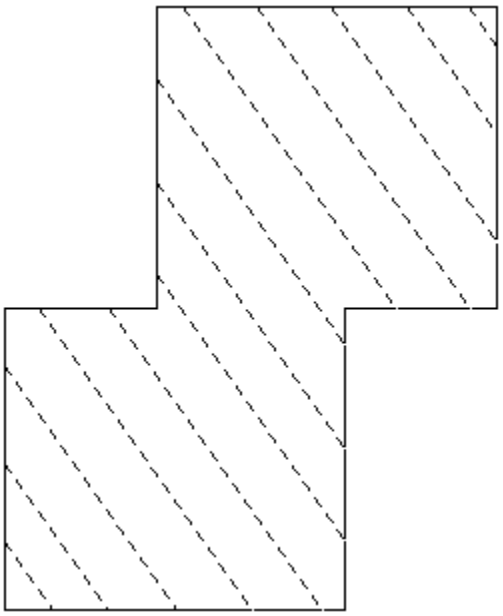
- **si l'une peut superposer exactement l'autre**
- **si, après transformation d'une des surfaces (par découpage), on peut recouvrir exactement, sans chevauchement, l'autre avec les morceaux de la première ».**

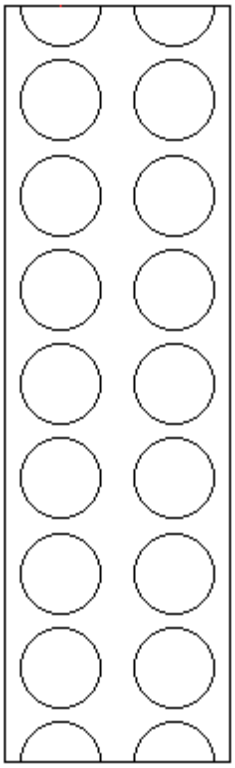
Fiche élève **Recouvrir une surface**

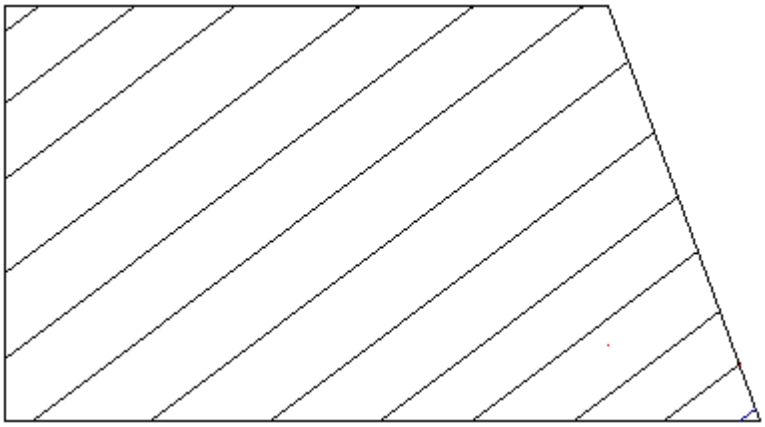












Fiche n°2

COMPARAISON D'AIRES AVEC LE TANGRAM

- **Niveau concerné** *:* Cycle 3 /CM1
- **Matériel** :
  - ♦ tangram découpé pour chaque élève
  - ♦ un tangram à plus grande échelle pour le tableau
  - ♦ fiche n°2 élève
- **Travail** en **groupes** ou **individuel**
- **Durée** : pour **l'activité 1** : 20 min
  pour **l'activité 2** : 20 min

- **Objectifs :**

  ♦ Cette séance intervient dans un but de consolidation après une première approche du concept d'aire: surfaces de même aire (voir fiche n° 1) .

  ♦ Reconstituer une surface dont on a la silhouette avec des pièces du tangram. L'élève est ainsi amené à analyser cette surface, à anticiper la position des pièces, à décomposer le tangram pour recomposer une nouvelle surface. Ce travail prépare la séance suivante (fiche n° 3) où les élèves devront réaliser des découpages- recollements fictifs pour repérer les surfaces de même aire.

➔ Dans l'activité 1, les élèves fabriquent des surfaces de formes différentes mais de même aire. On peut cependant s'attendre à ce que certains élèves superposent les pièces. Cela donnera l'occasion, lors de la mise en commun, de comparer les aires des surfaces alors obtenues aux aires des surfaces dont les pièces se juxtaposent exactement.

➔Dans l'activité 2, les élèves vont devoir imaginer le découpage de surfaces complexes en figures simples (les pièces du tangram).

Les feuilles sur lesquelles auront été réalisés les contours des figures sont conservées. Elles serviront d'exemples dans une séance ultérieure qui portera sur les périmètres et les aires. Les figures obtenues à partir du tangram permettront d'avoir un certain nombre d'exemples de surfaces non superposables, de périmètres différents mais de même aire.

- **DEROULEMENT DE LA SEANCE**

Activité 1 : Le professeur distribue un tangram à chaque élève et demande de le découper.

● **Consigne**

« En utilisant à chaque fois toutes les pièces du tangram, fabriquer plusieurs figures de formes différentes et reproduire sur une feuille le contour des figures réalisées.»

Après dix minutes de recherche, chaque groupe (ou chaque élève) vient proposer ses solutions à l'aide des dessins réalisés et le tangram qui est au tableau.

La mise en commun doit permettre la mise en évidence de la conservation de l'aire pour des figures qui ont des formes différentes mais peuvent être reconfigurées de la même manière (car composées des mêmes pièces).

Activité 2 : Les fiches sur lesquelles sont dessinées des « silhouettes puzzle » de tangram « vides » sont distribuées à chaque élève.

● **Consigne**

« En utilisant les sept pièces du tangram, reconstituer les silhouettes de la fiche. Les pièces ne doivent pas se chevaucher, la silhouette doit être entièrement et exactement recouverte avec les sept pièces. Vous noterez sur les silhouettes la position de chaque pièce.»

(si plusieurs tangrams ont été distribués aux élèves, ils pourront procéder au collage des pièces sur les silhouettes)

Après vingt minutes de recherche, chaque groupe (ou chaque élève) vient proposer sa solution pour l'une des silhouettes à l'aide des dessins réalisés sur les fiches et le tangram qui est au tableau. Le groupe explique comment il a procédé : ordre chronologique du placement des pièces.

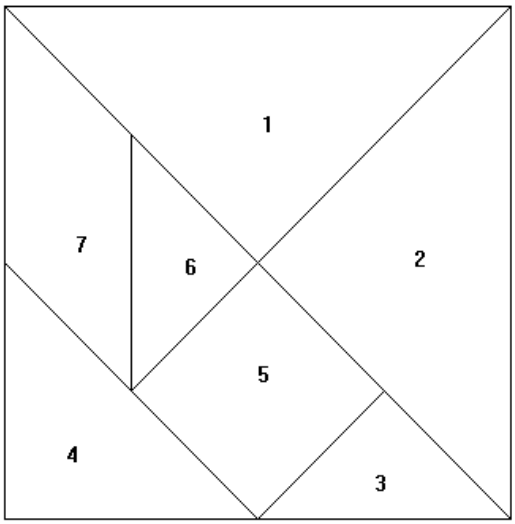
Les élèves prendront ainsi conscience qu'une figure complexe (silhouette) peut être découpée en figures élémentaires dont on apprendra plus tard à calculer l'aire. On pourra alors à cette occasion, reprendre les silhouettes et leur « découpage » pour en calculer l'aire.

Conclusion :

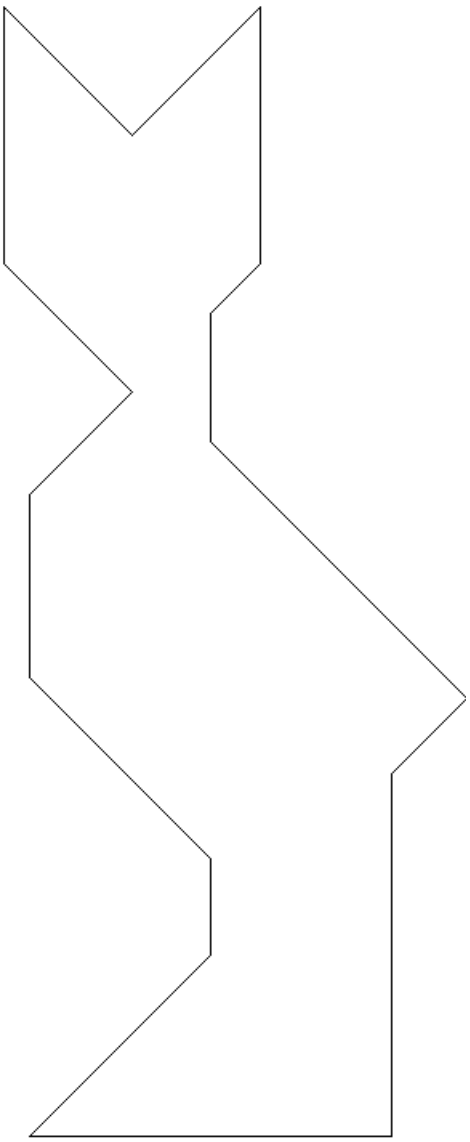
A l'issue de cette recherche, une question est posée aux élèves : « comparer les aires des quatre surfaces étudiées ». La réponse attendue sera : « les pièces du tangram recouvrent, à chaque fois, exactement les surfaces étudiées. Donc celles-ci ont la même aire ».

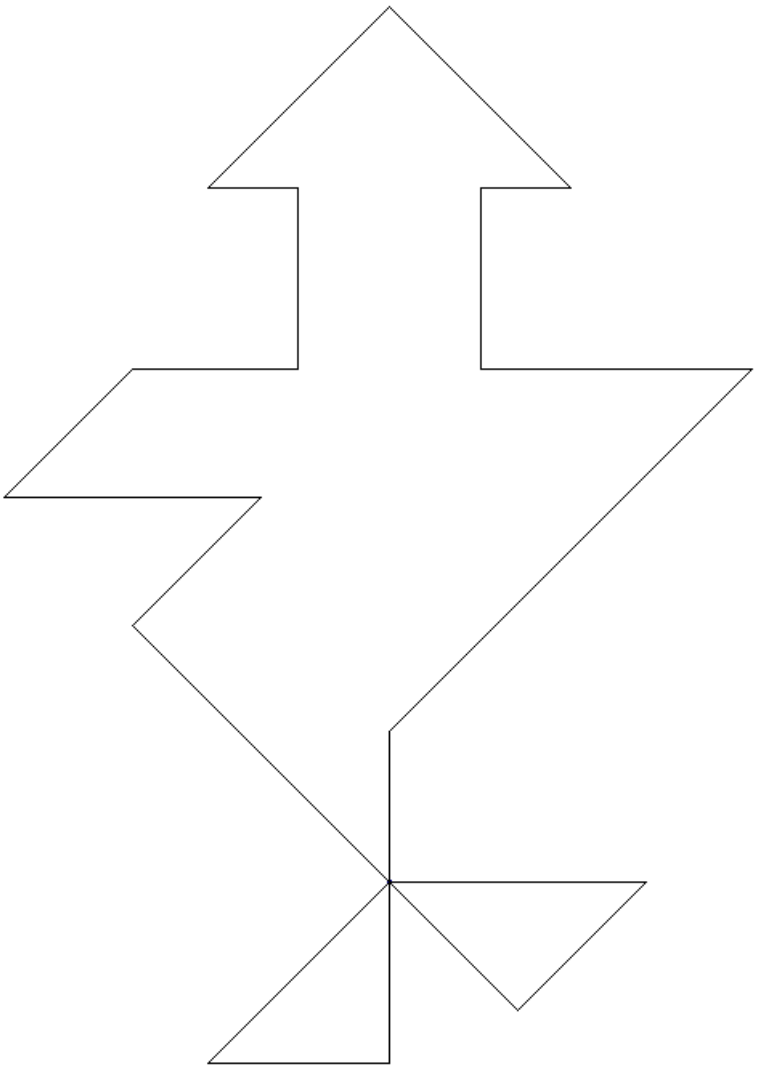
Le tangram est composé de sept formes géométriques qui, toutes réunies, forment un carré.

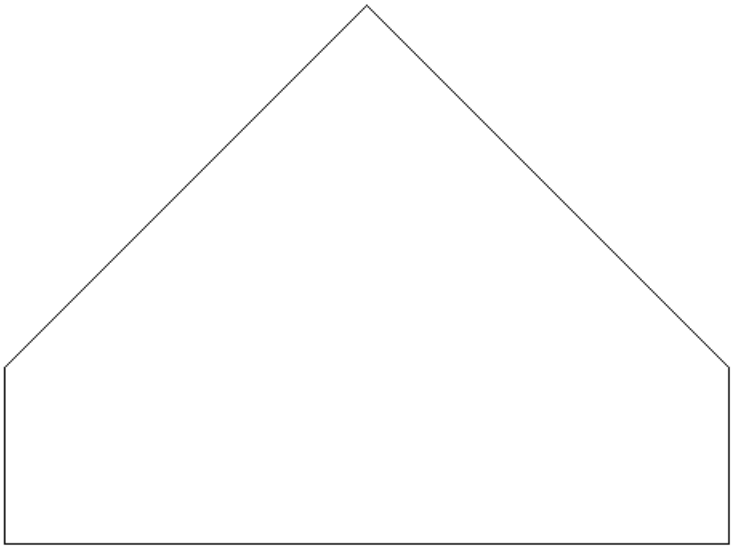
Tangram à distribuer aux élèves



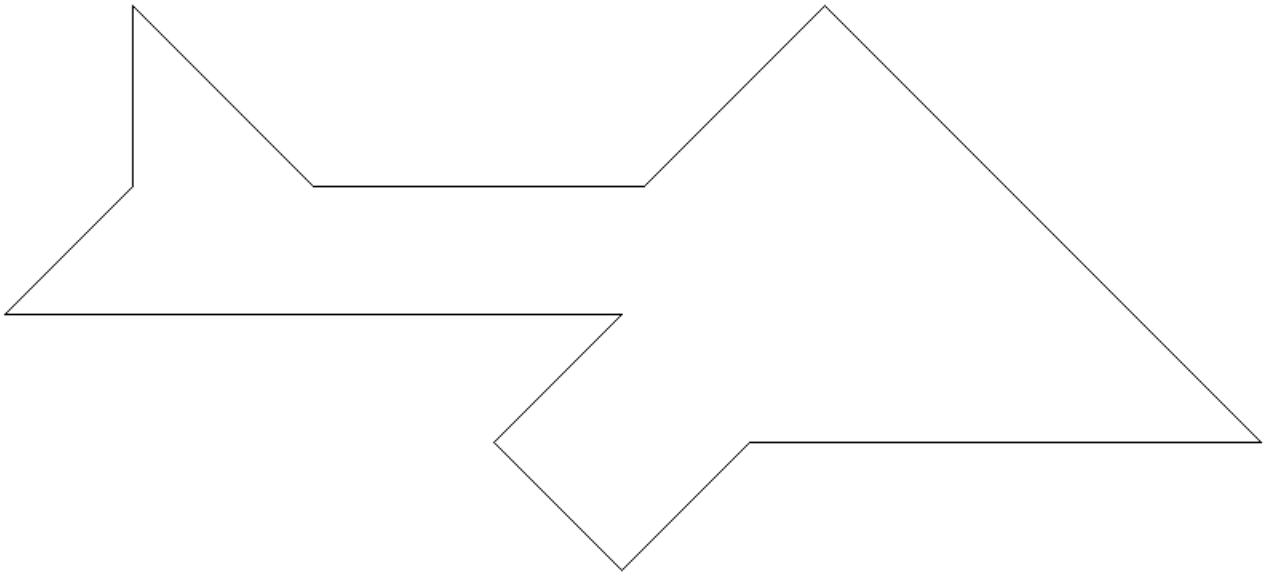
Fiche n°2 Elève
Silhouettes réalisées avec le tangram







Fiche n°2 suite



Fiche n° 3

DES SURFACES A DECOUPER

- **Niveau** : Cycle 3 / CM1
- **Matériel**
  - Fiche n°3 élève : les figures proposées sont obtenues par découpage d'un carré et de portions de disque
- Travail réalisé **en groupes**
- **Durée de la séance** : 40 minutes environ

- **Objectifs :**
  - Consolidation des notions abordées dans les fiches précédentes (fiches n°1 et 2).
  - Reconnaissance et analyse des figures géométriques.

- **DEROULEMENT DE LA SEANCE**

Tous les groupes reçoivent la fiche n°3 élève.

● **Consigne**

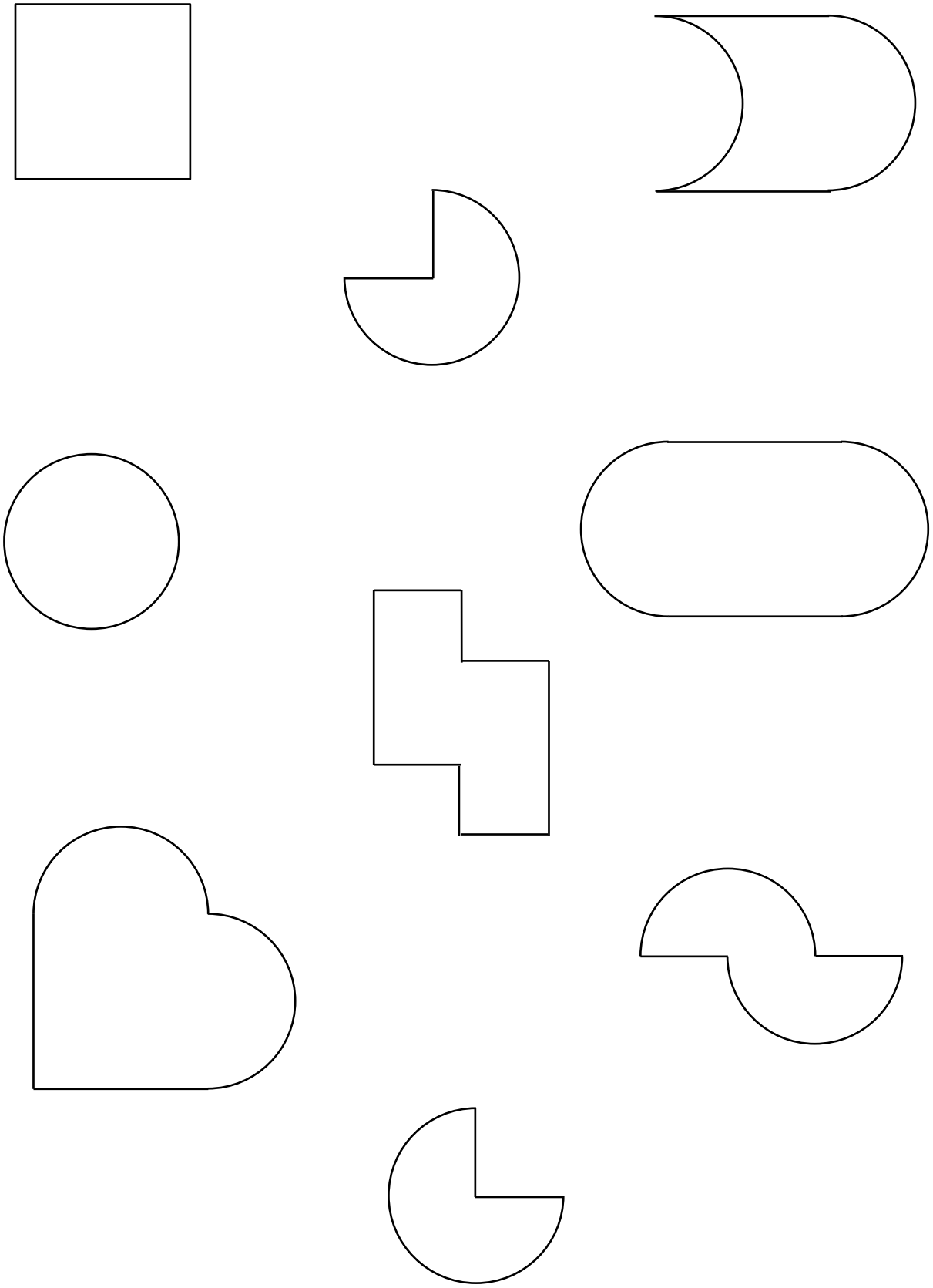
« Parmi les figures, quelles sont celles qui ont la même aire ? Expliquez comment vous avez fait pour trouver (attention, il ne faut pas découper la fiche)».

Les groupes font leur recherche pendant une vingtaine de minutes puis vient la mise en commun des travaux. Certains groupes peuvent avoir des difficultés à analyser mentalement les figures : une autre fiche pourra être donnée afin de faire un découpage.

● *Commentaires* : les deux « trois quarts de disque » superposables orientés différemment sont trouvés en premier.
Quelques élèves proposent comme solution des surfaces dont la somme des aires est égale à l'aire d'une autre surface (par exemple le carré avec la surface constituée de deux demi-disques décalés pour faire le cœur).
Pour d'autres, deux surfaces conviennent lorsque l'une d'entre elles peut être incluse dans l'autre.
Sept élèves sur huit tracent l'axe de symétrie du cœur et pensent, à juste titre, pouvoir recouvrir la surface faite d'un carré et de deux demi-disques ayant pour diamètres deux côtés opposés. Il leur est demandé de procéder au découpage pour valider leur proposition : l'un des morceaux doit être retourné pour réaliser la superposition.
C'est l'égalité des aires du carré et de la figure qui a la même aire mais pas la même forme qui a été la plus difficile à trouver. Les deux méthodes trouvées ont été présentées lors de la mise en commun, à l'aide de schémas, et complétées par un découpage effectif.
Dans leur ensemble les élèves ont montré une plus grande aisance lors de la troisième séance, dans la réalisation de la tâche (exercice de consolidation). Lors d'autres séances, ils apprendront à trouver des rapports (double, moitié, triple ….) entre les aires, à différencier aire et périmètre, à mesurer des aires par pavage.

Conclusion :
Des surfaces de formes différentes ont la même aire si elles sont composées des mêmes sous éléments.

Fiche 3 élève



UNE ACTIVITE POUR FAIRE LA DISTINCTION ENTRE AIRE ET PERIMETRE

(d'après Ermel – CM1)

□ **Niveau :** Cycle 3 / CM1 – CM2

□ **Matériel**

Pour chaque groupe :

♦ Un feutre et une grande feuille pour écrire les réponses ; elle sera affichée lors de la mise en commun

♦ Un tangram (de préférence sur feuille blanche), composé de triangles équilatéraux

♦ Deux assemblages de ces triangles, tels que seuls les contours apparaissent

□ Travail réalisé **en groupes**

□ **Objectifs :**

♦ Situation riche et motivante qui permet de renforcer la comparaison d'aires.

♦ Elle peut donner du sens à la notion de périmètre et éventuellement l'introduire si ce n'est déjà fait.

♦ Elle peut préparer l'apprentissage de la mesure en lui donnant du sens.

□ *DEROULEMENT DE LA SEANCE*

- Activité 1

Première phase :

Le maître demande de faire un assemblage de toutes les pièces de telle sorte qu'elles se touchent par un sommet ou un côté. Les élèves font leur réalisation et la collent sur une feuille de papier différente, puis les productions sont affichées et commentées en rapport avec la consigne.
Cette activité a pour but de permettre aux élèves de se familiariser avec les pièces, d'en percevoir les propriétés.

Deuxième phase :

Etape 1 : Recherche par groupes de deux

Le tangram de référence est affiché au tableau, et chaque groupe dispose d'un tangram et des deux assemblages.

● **Consigne**

« C'est un tangram, j'en ai découpé les pièces. J'en ai fait un premier assemblage (numéro 1) dont j'ai reproduit le contour sur une feuille verte ; j'en ai fait un deuxième assemblage (numéro 2), dont j'ai reproduit le contour sur une feuille jaune. Les deux assemblages ont-ils la même aire ? »

Etape 2 : Mise en commun

Résultats obtenus lorsque nous avons testé cette activité en classe :

- 8 groupes justifient l'égalité des aires par le dénombrement des triangles qui constituent les assemblages.

- 2 groupes ont décomposé les deux figures en quatre triangles équilatéraux et deux trapèzes ou deux parallélogrammes.

- Un groupe a estimé que les deux assemblages avaient « la même quantité de papier » et n'a pas pensé, semble-t-il, à se référer au nombre de triangles. Nous aurions aimé qu 'ils puissent nous dire « c'est parce que les assemblages sont constitués des mêmes pièces que le tangram de référence », mais cette explication, donnée ensuite ne semble pas les avoir convaincus. Sans doute la distribution des assemblages n'a-t-elle pas favorisé ce type d'argument.

- **Activité 2**

Le matériel est le même que pour l'activité 1. Les élèves ne disposent pas de leur double décimètre, mais nous leur avons distribué une feuille de papier.
Au tableau, nous avons collé les deux assemblages. Des morceaux de fils de laine de couleurs différentes suivent exactement leurs contours.

Etape 1 : Les élèves sont par groupes de deux ou trois

● **Consigne**
« On a posé un liséré de fil tout autour de chaque assemblage. Il suit exactement le contour de chaque dessin. Faudra-t-il la même longueur pour les deux assemblages? Justifiez vos réponses ».

Nous mimons le collage d'un morceau de ficelle autour d'un assemblage.

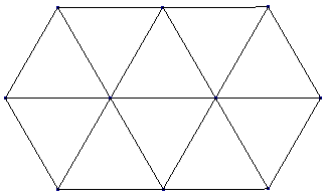
Etape 2 **:** Mise en commun

Lorsque nous avons testé cette activité tous les groupes ont donné la bonne réponse, mais :
- Certains ont justifié les inégalités de longueur en choisissant pour unité la longueur du côté d'un triangle, ou du petit doigt, celle d'un morceau de la bande de papier distribué, ou d'une gomme.
- D'autres se réfèrent à un nombre de triangles qui entourent les assemblages.
- Deux groupes n'ont pas justifié. Ils ont évalué les longueurs de manière perceptive.

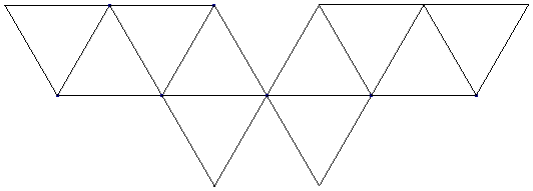
Conclusion :
Après la synthèse, les deux assemblages ont été collés dans le cahier « mémo », et la conclusion suivante a été écrite :
L'assemblage numéro 1 a la même aire que l'assemblage numéro 2.
Le périmètre de l'assemblage numéro 2 est plus grand que celui du numéro 1.

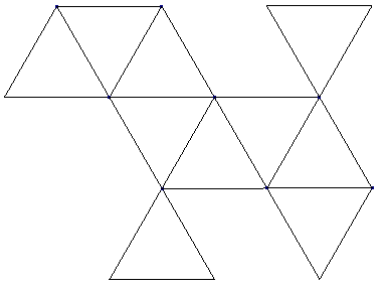
Prolongement : Plus tard, il a été demandé aux élèves de réaliser un assemblage de même aire mais de périmètre plus grand que celui du tangram de référence.

LE TANGRAM :



DEUX ASSEMBLAGES (pour les élèves, seuls les contours sont visibles)





Fiche élève

CABRI – GEOMETRE : AIRES

Les commandes

donner l'aire **d'une surface** déplacer **un point ou des objets**

Activité 1

Dans **fichier**, cliquer sur **ouvrir,** puis sur **mes documents** et sur **découverte aires .**

1. Observer les nombres et les surfaces qui se trouvent sur l'écran.

a. Sur l'écran ranger, en les **déplaçant,** de gauche à droite, les surfaces de la plus petite à la plus grande.

b. En dessous classer, en les **déplaçant**, les nombres par ordre croissant.

2. **Donner l'aire** de chacune des surfaces. Que constate-t-on?

……

……

……

……

3. **Déplacer** un des sommets du polygone jaune (situé en haut et à gauche du premier tableau, page suivante) :

a. Si on augmente l'étendue de la surface jaune, que se passe-t-il pour l'aire ?

……

……

……

……

b. Si on diminue l'étendue de la surface jaune, que se passe-t-il pour l'aire ?

……

……

……

……

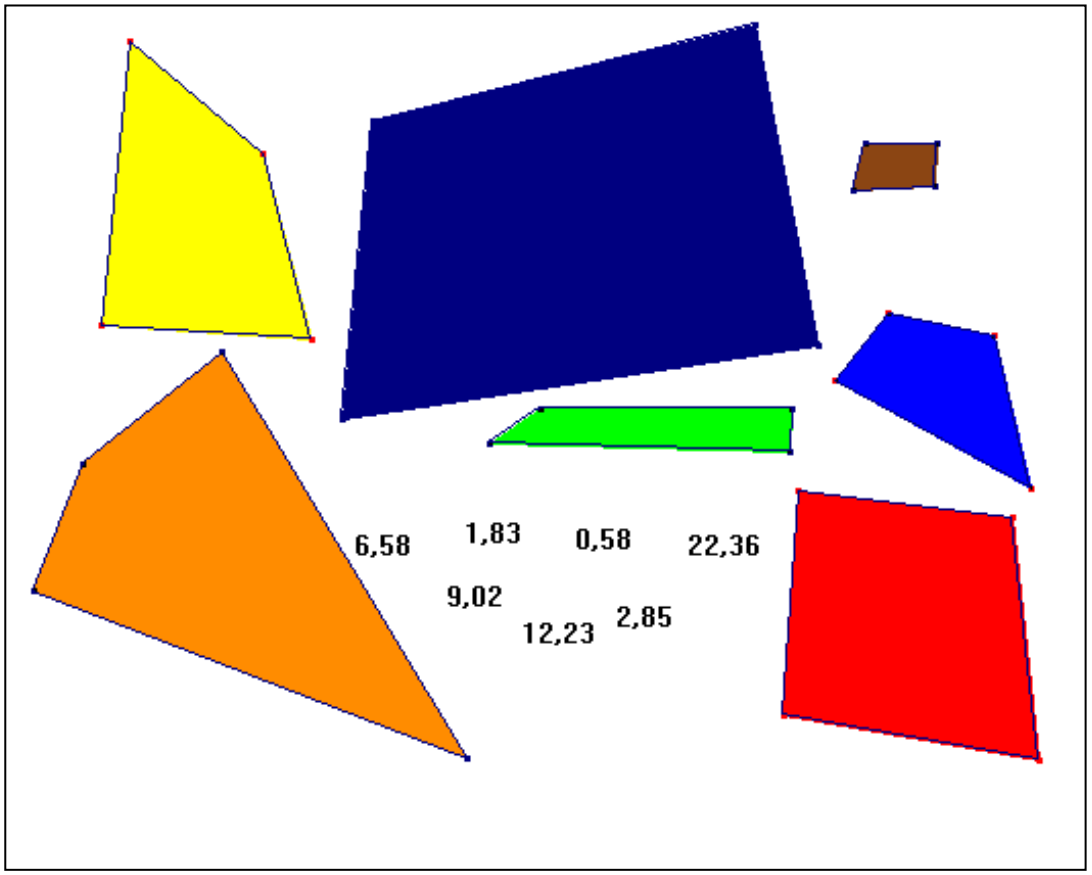
Fermer le fichier sans enregistrer les modifications.

Activité 2 :

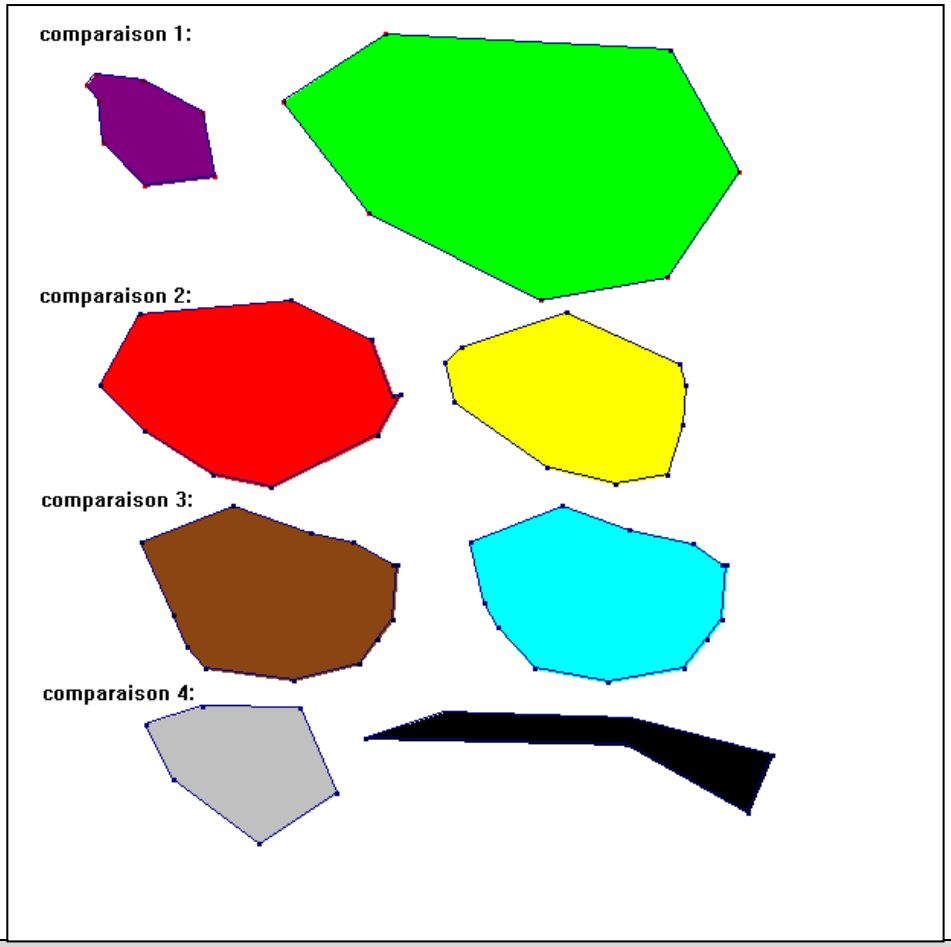
Dans **fichier**, cliquer sur **ouvrir** puis sur **mes documents** et sur **comparaison aires .**

Observer les surfaces qui se trouvent sur l'écran.
Dans chacun des cas suivants réponds à la question :

Activité 1



Activité 2



➔ **Comparaison 1 :**

Quelle est des deux surfaces (gauche ou droite) celle qui a la plus grande aire ?
Explique comment tu as fait pour trouver ?

……

……

……

……

➔ **Comparaison 2 :**

Quelle est des deux surfaces (gauche ou droite) celle qui a la plus grande aire ?
Explique comment tu as fait pour trouver ?

……

……

……

……

➔ **Comparaison 3:**

Quelle est des deux surfaces (gauche ou droite) celle qui a la plus grande aire ?
Explique comment tu as fait pour trouver ?

……

……

……

……

➔ **Comparaison 4 :**

Quelle est des deux surfaces (gauche ou droite) celle qui a la plus grande aire ?
Explique comment tu as fait pour trouver ?

……

……

……

……

CONCLUSION :

CABRI – GEOMETRE : AIRES

(Annexe)

Fiche professeur : mise au point des figures pour les élèves

Niveau concerné : cycle 3 /CM2

Objectif : introduire la notion de mesure d'aire

Activité 1 :

- Nom du fichier dans Cabri : **découverte aire. fig**

➔ Création du fichier :

Représenter plusieurs polygones.
Les remplir de couleurs différentes.
Mesurer leurs aires.
Avec la calculatrice, calculer : aire / 1 cm/ 1cm et afficher le résultat sur la figure *(ce qui permet de faire disparaître l'unité « cm² »)*

➔ Travail demandé :

1. Observer les nombres et les surfaces qui se trouvent sur l'écran.
a. Sur l'écran ranger, de gauche à droite, les surfaces, de celle qui est la moins étendue à celle qui l'est le plus.
b. En dessous, classer les nombres par ordre croissant.
2. **Donner l'aire** de chacune des surfaces. Que constate-t-on?
3. **Déplacer** un des sommets du polygone jaune. Que fait son aire ?

Activité 2 :

- Nom du fichier dans cabri : **comparaison aire. fig**

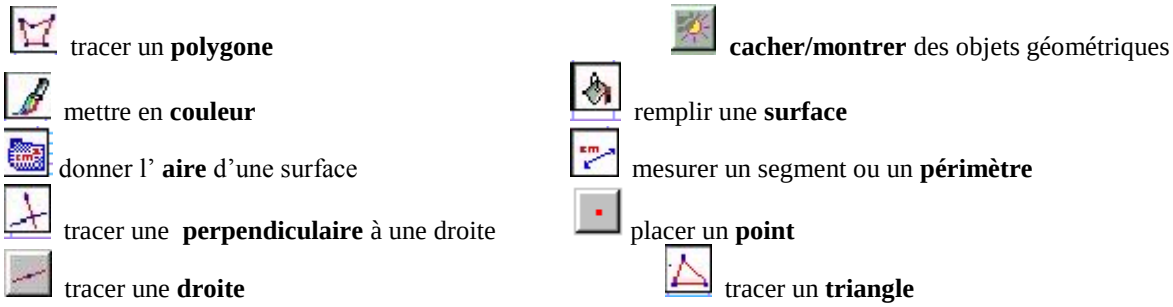
Des polygones sont représentés.

Texte : comparaisons 1 et 2
Les deux polygones ont des aires très différentes : réponse immédiate à partir de l'observation directe des figures.

Texte : comparaison 3 et 4
Les deux polygones ont des aires différentes mais proches. Il faut utiliser la commande « mesure d'aire » pour donner une réponse fiable. Les élèves restent libres d'utiliser la méthode qui leur semble la mieux adaptée.

CABRI-GEOMETRE : AIRES ET PERIMETRES

Commandes utilisées:



Exercice 1

- Tracer une **droite** et la **nommer** (d1).
- Placer un **point** A sur (d1).
- Tracer la droite **perpendiculaire** à (d1) passant par A. La **nommer** (d2).
- Placer un **point** B sur (d2).
- Tracer la droite **perpendiculaire** à (d2) passant par B. La **nommer** (d3).
- Placer un **point** C sur (d3).
- Tracer la droite **perpendiculaire** à (d3) passant par C. La **nommer** (d4).
- Placer D le **point** d'intersection de (d1) et (d4).
- Tracer le **polygone** ABCD.
- **Cacher** les droites (d1), (d2), (d3) et (d4).
- **Remplir** le quadrilatère ABCD en rouge.

➔ Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ?

…….

- **Déplacer** le point B ou le point C.

➔ Le quadrilatère ABCD a-t-il toujours la même nature ?

…….

Qu'est-ce qui a changé ?

…….

…….

Exercice 2

- Tracer un **polygone quelconque**.
- **Remplir** le polygone en jaune.
- Mesurer **le périmètre** du polygone.
- Donner **l'aire** du polygone.

➔ Noter dans le tableau ci-contre les valeurs de l'aire et du périmètre pour le polygone 1.

	périmètre	**aire**
Polygone 1		
Polygone 1		
Polygone 2		
Polygone 3		
Polygone 4		
Polygone 5		
Polygone 6		

- **Déplacer** un des sommets du polygone. On obtient un nouveau polygone que nous appellerons « polygone 2".

➔ Qu'observe-t-on?

……

……

……

➔ Noter dans le tableau les nouvelles mesures de périmètre et d'aire pour le polygone 2.

- **Déplacer** à nouveau l'un des sommets du polygone, en notant à chaque fois dans le tableau le périmètre et l'aire du polygone obtenu.

➔ Pour chaque mesure donnée par l'ordinateur, observer les unités de mesure du périmètre et de l'aire.

- Quelle est l'unité de mesure utilisée pour les périmètres ? ……
- Quelle est l'unité de mesure utilisée pour de l'aire ? ……

Fermer le fichier sans enregistrer le travail.
Ouvrir un **nouveau fichier**.

Exercice 3 :

- Placer trois **points** et les **nommer** T, R et I.
- tracer le **triangle** TRI.
- **Remplir** le triangle TRI en bleu.
- De la même manière tracer un triangle ANG.
- **Remplir** le triangle ANG en rouge.
- Donner les **aires** des triangles TRI et ANG.
- **Déplacer** les sommets du triangle ANG afin que les aires des deux triangles soient égales.

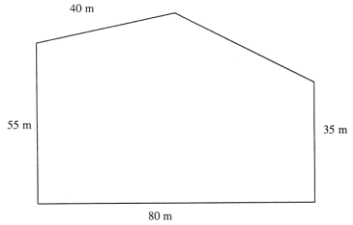
➔ Les triangles TRI et ANG sont-ils alors toujours superposables ?

PERIMETRES ET AIRES DANS LES EVALUATIONS

On trouvera, dans cet article, quelques résultats à connaître à propos d'évaluation sur les thèmes étudiés. Les exercices ne sont pas proposés dans leur version-élève et ne sont donc pas utilisables tels quels. A chaque fois, la figure est donnée, dans sa version originale, sous forme réduite, et le texte est intégré au commentaire. Pour avoir l'énoncé complet, il faudrait se reporter à la source, toujours citée.
Nous n'avons pas cherché à être exhaustifs, mais avons choisi des exemples « parlants ».

Périmètre

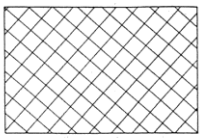
• Voici tout d'abord un exercice faisant appel à la notion de périmètre, sans que le mot lui-même ne figure dans l'énoncé :



Le texte dit :
« Le dessin ci-dessus représente un terrain clos.
On a indiqué les longueurs réelles de quatre des cinq côtés de ce terrain.
La clôture qui entoure ce terrain a une longueur de 260 m.
Trouve la longueur du cinquième côté. ».
(DEP/6/99 item 88, repris en 2000 DEP/6/00 item 89)

La réponse à cette question nécessite l'organisation d'un raisonnement assez élaboré pour des élèves de début de collège. Une démarche correcte a cependant été utilisée par 63,8 % des élèves, dont 57,3 % (56,6 % en 2000) avec un résultat juste. Ce score est à rapprocher de celui obtenu pour le calcul du périmètre d'un rectangle dont on connaît la longueur et la largeur (voir ci-dessous). Cette dernière tâche est pourtant considérée comme beaucoup plus simple, puisque faisant juste appel à l'utilisation d'une technique …
Bien entendu, le calcul « 260 - (40 + 55 + 80 +35) », vers lequel on tentera d'acheminer nos élèves tout au long du collège, ne se rencontre pour ainsi dire pas, et c'est normal. Les jeunes arrivant en 6ème disposent de procédures tout aussi efficaces, et il est souhaitable de les encourager à les utiliser.

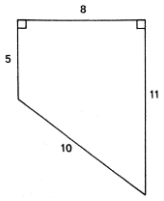
• Qu'en est-il pour le calcul « classique » du périmètre d'un rectangle dont les mesures sont données ?
Le calcul du périmètre de cette figure est effectué correctement par 56,1 % des élèves. La figure, un rectangle, est pourtant bien connue des élèves et les dimensions sont données avec des nombres entiers assez simples. Par contre, celles-ci n'étaient pas à lire directement sur le dessin, comme dans l'exercice étudié précédemment … (DEP6/93 item 76)



Un terrain a la forme d'un rectangle. Les dimensions sont :
- longueur : 60 m ;
- largeur : 40 m.

• On s'intéressera seulement ici à la première partie de l'exercice suivant ; la figure doit être considérée comme « quelconque » par les élèves puisqu'ils ne disposent pas d'une formule pour calculer le périmètre d'un trapèze rectangle.

« Voici un modèle réduit de la figure que tu dois reproduire. Les nombres indiquent les dimensions, en centimètre, que tu dois donner au dessin. »
Cet exercice demandait aux élèves, dans une première question d'inscrire le périmètre de la figure obtenue sans les inciter à écrire un calcul, puis dans une deuxième de faire le dessin avec les mesures exactes.

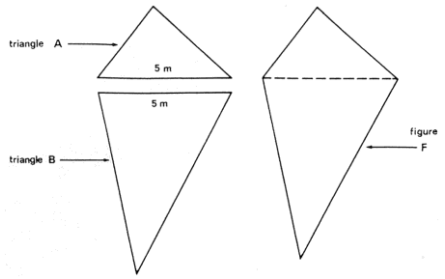


DEP6/91 (repris en 92 et 95)

La réponse juste pour la première question a été donnée par 66,8 % des élèves ; par ailleurs, 5,7 % ont pris les mesures sur le dessin donné et ont fait le calcul avec ces mesures. On peut donc considérer que 72,5 % des élèves « savent » calculer le périmètre d'un quadrilatère dont on connaît les longueurs des côtés. Et c'est un bon score.
On peut toutefois se demander, au moins pour certains, s'ils ne vont pas « au plus simple » : à savoir additionner tous les nombres présents (l'addition parce que c'est l'opération la mieux connue, et depuis le plus longtemps ; tous les nombres, parce que cela évite d'avoir à faire un choix …), comme on rencontre parfois, pour le calcul de l'aire d'un triangle, le produit des trois longueurs des côtés.

Remarque : en 90, les élèves avaient à calculer le périmètre d'un quadrilatère dont trois longueurs de côtés étaient portées sur le dessin et la quatrième avait été préalablement mesurée. La réponse exacte, ou au moins cohérente avec la mesure effectuée, a été donnée par 73 % des élèves, ce qui confirme le score de l'exercice étudié.

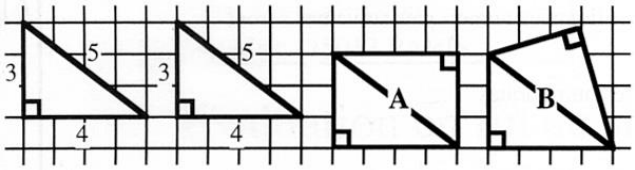
• Voici maintenant deux exercices pour lesquels on doit avoir repéré les tracés parasites … et donc vraiment compris la notion de périmètre!.



Le texte donnait le périmètre de chacun des triangles (respectivement 12 m et 17 m), et expliquait le procédé de fabrication de la figure F : « la figure F est formée à l'aide des deux triangles, comme indiqué sur le dessin ».
Les élèves étaient invités à calculer le périmètre de la figure F et à inscrire le résultat dans la case prévue à cet effet, l'unité étant déjà écrite.
(DEP/6/92/ item 96, repris de DEP6/90)

La réponse juste est donnée par 17,6 %, alors que 44 % annoncent la somme des périmètres des deux triangles !

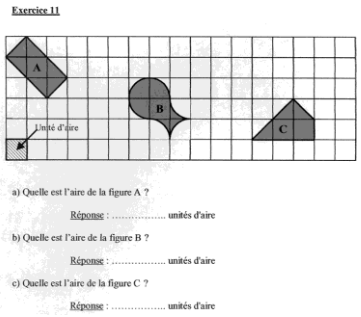
Dans cet exercice, après avoir explicité les assemblages A et B, on demandait aux élèves le périmètre des deux figures obtenues. (EVAPM6/97 Sg16-18[1])



Comme ci-dessus, il s'agissait donc, connaissant la notion de périmètre, d'utiliser les seules dimensions utiles pour calculer. Les réponses justes sont données par 41 % des élèves. Par contre, on demandait ensuite de faire un dessin correspondant à un assemblage de périmètre donné (16 cm puis 18 cm). Les scores de réussite ne sont plus alors que de 22 % et 24 % (réussite conjointe pour les deux valeurs : 19 %), chute prévisible puisqu'il fallait en outre ici faire preuve d'initiative pour construire.

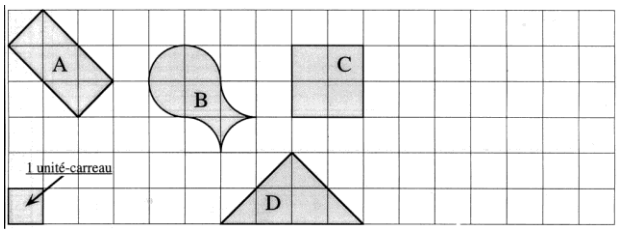
Aire

• Dans cet exercice, une unité d'aire étant fixée par les mailles d'un quadrillage, l'élève est invité à dire quelles sont les aires de trois figures tracées sur le même quadrillage.
(DEP6/03 items 23-25, repris de DEP6/02).



Les résultats pour les deux années n'étant pas significativement différents, on se contentera ici d'examiner les plus récents. L'aire correcte a été donnée par 69,5 % pour la figure A, par 60,1 % pour la figure B et par 58,9 % pour la figure C ; pour chacune des figures, entre 4 % et 5 % des élèves comptabilisent l'ensemble des carreaux occupés au moins en partie. L'ordre décroissant de ces scores et la proximité des deux derniers est conforme à ce que l'on pouvait attendre ; en effet le comptage des carreaux-unité pour la figure A est assez simple et classique, il est nettement moins simple pour la figure B ; quant à celui de la figure C il conduit à un nombre non entier de carreaux, ce qui perturbe certains élèves.

L'exercice précédent est à comparer avec celui-ci :

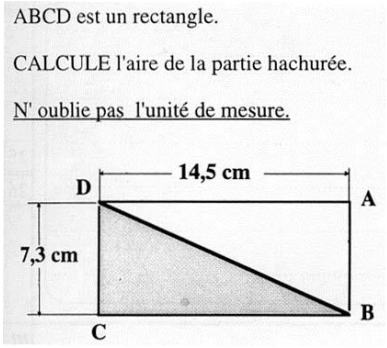


Les élèves (de fin de sixième) étaient invités à écrire l'aire des trois figures A, B, D sachant que le carré C a une aire égale à 4 carreaux-unité. Ils avaient ensuite à dessiner sur le quadrillage une figure E de forme différente dont l'aire est égale à 4 carreaux-unité.

(EVAPM6/97 Gn 32-37)

L'ensemble des trois premières réponses justes est donné par 79 % des élèves et l'ensemble des quatre réponses justes est donné par 67 % des élèves. Ces scores, très proches se répartissent en 87 % pour la figure A, 84 % pour la figure B, 89 % pour la figure C. Quant au tracé de la figure E, il est correctement fait par 77 % des élèves, on retrouve la baisse importante de réussite entre les questions de reconnaissance et celles de tracé.

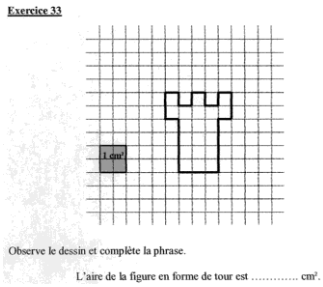
• Qu'en est-il pour le calcul, pourtant considéré comme très simple, et uniquement technique ci-dessous ?



La réponse juste, que l'on ne demandait pas d'expliquer, est donnée par seulement 40 % des élèves de fin de sixième. Et pourtant, on peut mettre de côté une grande part des erreurs de calculs, puisque la calculatrice était autorisée dans ce questionnaire.
On peut se demander si la bonne perception de l'aire d'une figure n'est pas en contradiction avec les résultats de cet exercice. Les élèves ne semblent pas donner de sens à ce genre de calcul.

(EVAPM6/97 Ug 14-15)

• Dans l'exercice ci-dessous, l'élève devait juste écrire l'aire de la figure à l'aide du carreau-unité.



Cet exercice est assez bien réussi puisque 70,1 % (66 % pour 2002) donnent la réponse correcte et 5,4 % (4,5 % pour 2002) ont compté, à tort, tous les carreaux occupés sans tenir compte de l'unité, ce qui laisse penser que 75,5 % (70,5 % pour 2002) des élèves associent bien comptage des carreaux et aire. Cependant on peut se demander s'ils n'auraient pas donné la même réponse pour le périmètre de la figure …

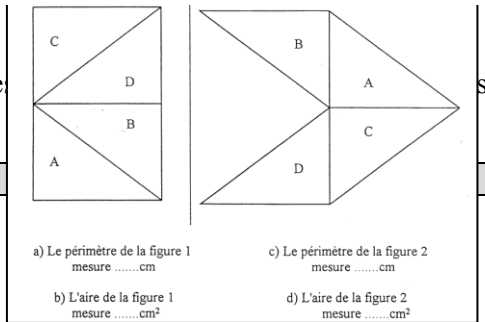
(DEP6/2003 item 67, repris de DEP6/2002 item 66, et de …)

On aurait pu penser que l'aire des pièces triangulaires étant donnée dans le texte, les questions b) et d) seraient bien réussies. Il n'en est rien puisque moins de la moitié des élèves donnent une réponse juste. Par ailleurs, seuls 8,7 % repèrent au moins l'égalité des aires en donnant la même réponse, fausse, pour les aires des deux figures.

(DEP6/96 items 76-79)

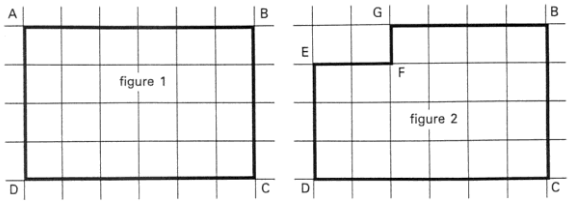
érimètre s),
›.

33 -



Relation périmètre-aire

• Voici trois exercices qui proposent des figures de même périmètre et d'aires différentes. Les résultats obtenus en ce qui concerne les périmètres sont conformes à l'idée, fausse, que périmètres et aires varient toujours de la même façon.

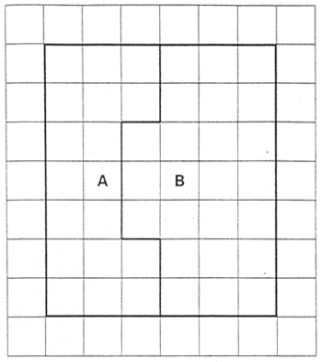


La réponse juste, formulée ainsi : « Le périmètre de la figure 1 est égal au périmètre de la figure 2. » est cochée par 25,6 % des élèves alors que 57,6 % affirment que la figure 1 a un périmètre plus grand que la figure 2 (pourtant c'est la première réponse proposée qui est juste…et l'on connaît l'importance de la place d'une réponse dans un questionnaire à choix multiple).

(DEP6/91 item 109)

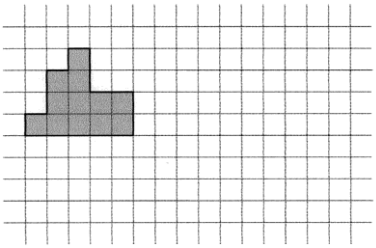
Le texte indiquait aux élèves : « Un terrain a été partagé comme l'indique la figure ci-contre », et ils devaient entourer, pour l'aire puis pour le périmètre, la réponse qui convenait parmi trois proposées.

(DEP/6/92 item 118)



La réponse juste, libellée ainsi : « les deux parcelles ont le même périmètre » a obtenu le score de 32,7 % (34,5 % en 90), alors que la réponse « le périmètre de la parcelle B est le plus grand » a été, elle, choisie par 46 % (40,8%) des élèves.

Attention, toutefois : au moins en 90, le code 1 était attribué pour : « choix de l'égalité des périmètres avec une justification correcte (calcul des périmètres en mesurant, en comptant des segments …) » alors que pour la réponse fausse repérée, on ne tenait pas compte de l'explication … voire du manque d'explication. Parmi les 14,1 % qui ont donné une autre réponse, sont donc comptés ceux qui ont choisi la réponse exacte sans l'expliquer.



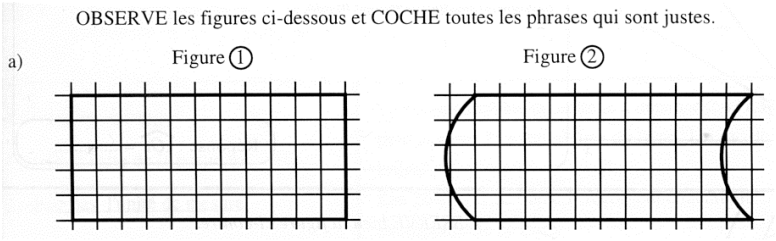
On demandait de tracer un rectangle qui a le même périmètre que la figure grisée. (DEP6/01 item 70)

Un rectangle correct a été tracé par 16% des élèves, auxquels s'ajoutent 2,3% qui ont tracé une figure différente de la figure donnée, de même périmètre mais qui n'est pas un rectangle. Un grand nombre d'élèves (37,5%) tracent un rectangle de même aire, et non de même périmètre. Il est à noter que la présence du quadrillage incite fortement à « compter des carreaux » et donc à « penser aire et non périmètre ».

Dans le même protocole, un exercice du même type dans lequel, à partir de la même figure, on demandait un rectangle de même aire, conduit à des résultats très différents : la moitié des élèves (47,2% + 3,3%) trace une figure différente de même aire ; parmi ceux qui donnent une réponse erronée, 4,4% seulement tracent un rectangle de même périmètre au lieu d'un rectangle de même aire (alors que dans l'exercice précédent 37,5% avaient inversé).

(DEP6/01 item 6)

• Les deux questions suivantes ont été reprises par EVAPM6/97, ce qui permet d'observer l'évolution des résultats pour les élèves de la même année scolaire.

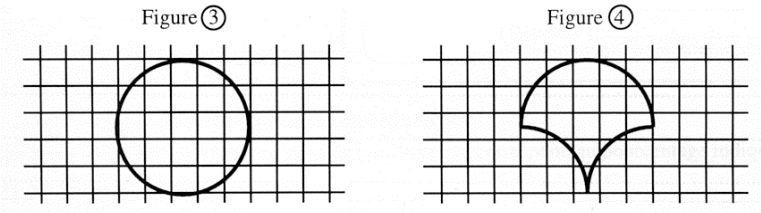


Les deux réponses justes : « les deux figures ont la même aire » et « le périmètre de la figure 2 est le plus grand » sont choisies par 12,9 % d'élèves en début d'année, par 23 % en fin d'année. Par contre le pourcentage d'élèves qui donnent une réponse erronée sur les seuls périmètres est stable (41 % puis 43 %).

(DEP6/96 item53)

Les deux réponses justes : « les deux figures ont le même périmètre» et « l'aire de la figure 3 est la plus grande » sont choisies par 31,5 % d'élèves en début d'année, par 46 % en fin d'année. En ce qui concerne le pourcentage d'élèves qui donnent une réponse erronée sur les seuls périmètres, il est de 46 % puis 36 %.

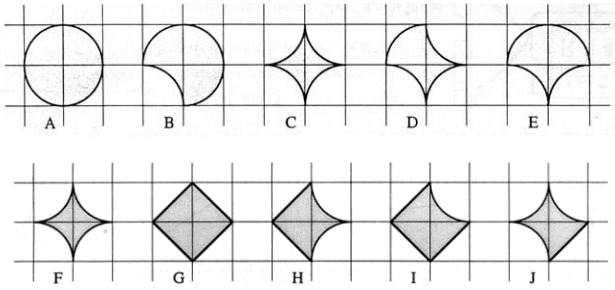
(DEP6/96 item 54)



On peut donc considérer que la comparaison d'aires, sur les figures 3 et 4, est bien acquise. Par ailleurs, les élèves sont confiants sur cet exercice puisqu'ils ne s'abstiennent pratiquement pas, que ce soit en début ou en fin d'année.

L'écart important entre les réussites aux deux questions de cet exercice peut s'expliquer facilement. Pour les figures 3 et 4 la comparaison des aires est immédiate par inclusion, alors que pour les figures 1 et 2 l'égalité des aires est perceptible seulement après le déplacement, au moins mental, d'une partie de la figure 4.

Il convient de se persuader que la notion de périmètre est loin d'être acquise en début de collège, déjà lorsqu'elle doit être mobilisée seule, mais encore plus lorsqu'elle est mise en concurrence avec la notion d'aire.



Par exemple, lorsque l'on interroge les élèves de fin de sixième (EVAPM6/97 Ti, El) sur les comparaisons ou rangements de périmètres et aires pour les « collections de figures » ci-dessous, les scores de réussite passent de 25 % à 58 % pour les figures F à J, et même de 25 % à 66 % pour les figures A à E, lorsque l'on passe du périmètre à l'aire !

Il semble nécessaire de travailler simultanément les deux notions au collège jusqu'à ce qu'elles soient vraiment acquises chacune, c'est-à-dire jusqu'à ce qu'elles soient bien mises en place l'une par rapport à l'autre. En effet, on peut constater que les élèves réussissent assez bien les exercices concernant les aires lorsque ceux-ci ont pour support un quadrillage, ou tout au moins lorsqu'ils utilisent les pavages. Par contre, ils ont fortement tendance à abandonner tout raisonnement « de bon sens » et toute procédure efficace jusque-là dès qu'ils disposent de formules, à confondre aire et périmètre, à associer une augmentation de l'aire à une augmentation du périmètre.

[1] EVAPM : Evaluation des programmes de mathématiques, proposée par l'**A**ssociation des **P**rofesseurs de **M**athématiques l'**E**nseignement **P**ublic, (26 rue Duméril, 75013 Paris) à plusieurs reprises, et faisant à chaque fois l'objet d'une publication d'analyse des résultats. Attention, il s'agit d'une évaluation de **fin de sixième,** contrairement aux évaluations de la DEP ou de la DP&D situées, elles, en début d'année.

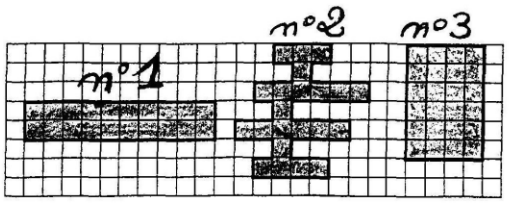
ETAT DES LIEUX

(Activité proposée dans une classe de sixième au collège Painlevé - 93 Sevran)

Objectif : Evaluer les acquis d'élèves de sixième, sur aires et périmètres, avant de revisiter ces notions.

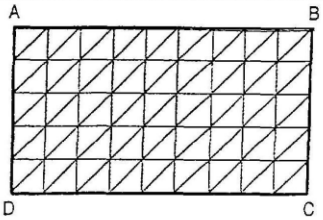
Exercice 1

Ces pièces sont trois pièces que l'on doit peindre.
Quelle pièce nécessitera le plus de peinture et quelle pièce nécessitera le moins de peinture ? .....



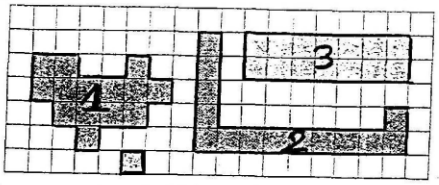
Exercice 2

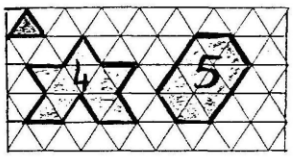
Hugues dit : « l'aire de ABCD est 45 ».
Farah répond : « Mais non ! C'est 90 !!! ».
Qui a raison ? .....



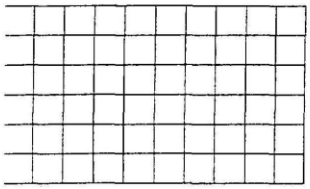
Exercice 3

1. En choisissant le carré ■ pour unité d'aire, déterminer :
* l'aire de la figure 1 : .....
* l'aire de la figure 2 : .....
* l'aire de la figure 3 : .....
2. En choisissant le triangle équilatéral ▲ pour unité d'aire, déterminer :
* l'aire de la figure 4 : .....
* l'aire de la figure 5 : .....
3. Quelle remarque peut-on faire ? .....





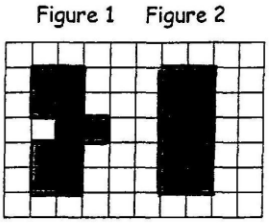
Exercice 4

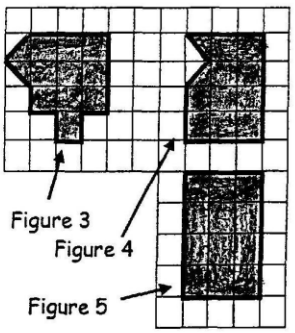


En choisissant le carré ■ pour unité d'aire,
dessiner sur ce quadrillage une surface dont l'aire est 16 unités d'aire.

Exercice 5

1. Parmi les figures 1 et 2, quelle est celle qui a la plus grande aire ? .....
2. Parmi les figures 3 et 4, quelle est celle qui a le périmètre le plus grand ? .....
3. Parmi les figures 4 et 5, quelle est celle qui a le périmètre le plus grand ? .....
4. Parmi les figures 4 et 5, quelle est celle qui a l'aire la plus grande ? .....



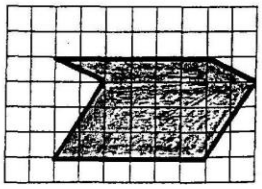


Exercice 6

a) Sofia dit : « Si je dessine une figure avec un périmètre plus grand, alors je sais que l'aire de ma figure sera *forcément* plus grande ».
Es-tu d'accord avec elle ? .....

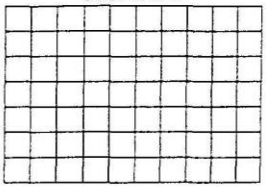
Exercice 6 (suite)

b) On travaille sur la figure suivante :

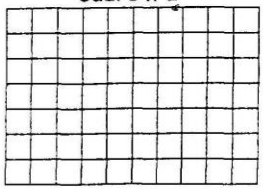


1. Dans le cadre 1, tracer une figure de <u>même</u> périmètre et d'aire <u>plus grande</u>.
2. Dans le cadre 2, tracer une figure de périmètre <u>plus petit</u> et d'aire <u>plus grande</u>.
3. Dans le cadre 3, tracer une figure de périmètre <u>plus grand</u> et de <u>même</u> aire.
4. Dans le cadre 4, tracer une figure de périmètre <u>plus grand</u> et d'aire <u>plus petite</u>.

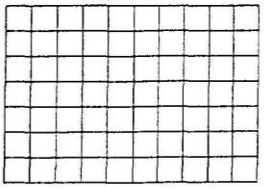
Cadre n°1



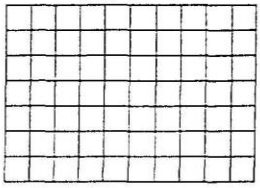
Cadre n°2



Cadre n°3



Cadre n°4

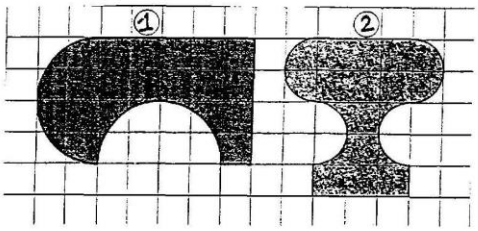


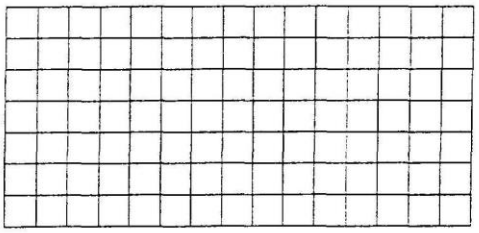
Exercice 7

<u>En utilisant la feuille distribuée en plus par le professeur :</u>

Pour chaque figure :

1. Découper la figure.
2. Assembler les morceaux pour obtenir un rectangle.
3. Demander au professeur de vérifier.
4. Coller le rectangle obtenu sur le quadrillage .
5. Déterminer l'aire du rectangle obtenu, en prenant le carré comme unité d'aire.
6. En déduire l'aire de la figure de départ.





<u>Figure 1</u>

Aire du rectangle : .....

Aire de la figure 1 : .....

<u>Figure 2</u>

Aire du rectangle : .....

Aire de la figure 2 : .....

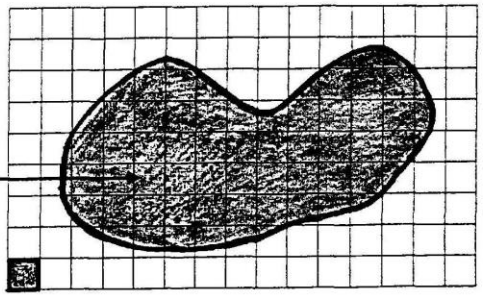
Exercice 8

Sur le quadrillage suivant :

on choisit un petit carré comme unité d'aire.

1. Peut-on calculer la valeur exacte de l'aire de la surface S ? .....

.....



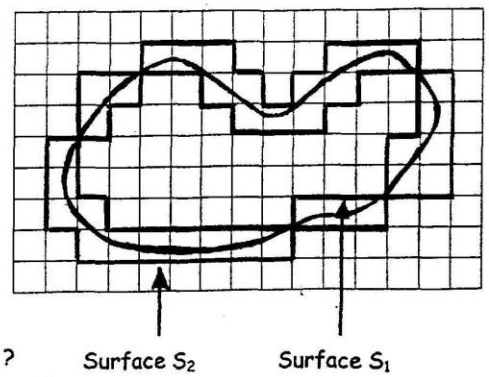
On ne peut pas déterminer la valeur exacte de l'aire de la surface S. Mais on peut, par contre, trouver un encadrement de cette aire.

Pour cela on a construit les surfaces S_1 et S_2 avec :

- la surface S_1 à l'intérieur de la surface S,
- la surface S à l'intérieur de la surface S_2.

2. Quelle est l'aire de la surface S_1 ? .....
3. Quelle est l'aire de la surface S_2 ? .....
4. En déduire un encadrement de l'aire de la surface S.

..... ≤ Aire de la surface S ≤ .....



<u>Bonus</u> : Comment pourrait-on trouver un encadrement plus précis ?

UNE PROPOSITION D'ACTIVITE POUR REACTIVER LA NOTION D'AIRE EN SIXIEME

Présentation

Cette activité est très largement inspirée d'un travail réalisé par Marie-Lise PELTIER et Catherine HOUDEMENT (IUFM Rouen). Elle est ici adaptée pour des élèves de sixième comme activité de réactivation, mais pourrait fort bien être proposée comme remédiation pour des élèves des autres niveaux du collège.

Description

Les élèves disposent de plusieurs exemplaires d'un même rectangle. Chaque rectangle sera découpé en deux surfaces superposables. Ce travail a été prévu et expérimenté en groupes, mais il peut être adapté à un travail individuel.

Objectifs

- Réactiver le concept d'aire, indépendamment du dénombrement sur quadrillage, du calcul et de l'utilisation de formules.
- Exhiber des surfaces non superposables de même aire – la moitié de l'aire du rectangle initial –, ces surfaces étant toutes issues du découpage d'un même rectangle en deux surfaces superposables

Le scénario décrit ci-dessous en est un parmi d'autres. Il est émaillé d'un certain nombre de remarques. Chaque professeur a le loisir de le modifier selon sa personnalité, ses élèves et le moment de sa mise en oeuvre. Certaines modifications possibles sont d'ailleurs évoquées.

Scénario

Matériel

Plusieurs (une dizaine de) rectangles dont la longueur mesure 12 cm et la largeur 9 cm.
Crayon, ciseaux

Première phase :

Consigne 1

« Prenez un de vos rectangles, partagez-le en deux parties superposables que vous découperez soigneusement. Attention ! Tout le papier doit être utilisé.

Lorsque vous aurez fait chacun votre découpage, comparez votre production dans le groupe et choisissez celle que vous souhaitez présenter à l'ensemble de la classe. »

Commentaires

Faire en sorte que chaque élève puisse disposer du matériel :

- en faisant construire et découper ceux-ci par les élèves eux-mêmes, chez eux
  (Prévoir des rectangles « de secours » !)
- ou en distribuant des feuilles avec des rectangles déjà tracés à faire découper
- ou en distribuant directement les rectangles

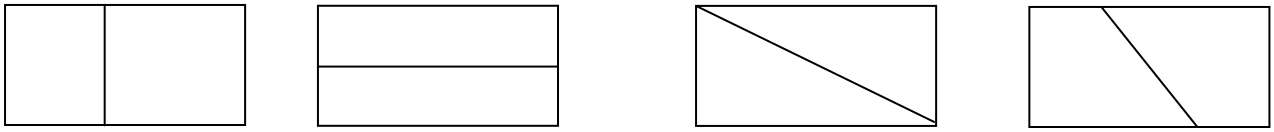
***Remarques** : on peut s'interroger sur l'opportunité de faire réaliser les constructions par les élèves eux-mêmes. D'une part, cela introduit une difficulté supplémentaire pour certains, d'autre part la donnée explicite des dimensions risque de modifier l'activité des élèves. Cela peut en revanche, comme le découpage, favoriser l'appropriation des formes par les élèves. De même, on peut se demander s'il est nécessaire d'utiliser du papier uni. L'utilisation de papier quadrillé comporte, dans certaines classes, le « risque » de voir les élèves recourir à un dénombrement. Enfin, le choix du format des rectangles (12 sur 9) permet d'avoir une diagonale « entière », dans la perspective d'une réutilisation des rectangles.*

Le professeur circule dans les rangs, mais n'intervient pas auprès des élèves. Il laisse assez de temps pour des échanges au sein des groupes

.

Mise en commun :

Commentaire :
Dès que tous les élèves ont réalisé leurs partages, le professeur exhibe les différentes formes obtenues par affichage ou en les posant sur le rétroprojecteur.
Quand un partage est validé, les élèves qui ont effectué ce partage particulier peuvent venir identifier concrètement chacune des deux parties. (Par exemple, par une couleur ou un numéro)
On attend une remarque proche de : « toutes les figures obtenues ont la même aire qui est la moitié de l'aire du rectangle.
Remarques *: on peut s'attendre à ce que les premiers partages soient effectués selon les médiatrices des côtés ou les diagonales, donc que 3 formes différentes soient identifiées. Une autre série, dont on gardera un seul représentant, apparaîtra sans doute rapidement par un partage selon une « oblique » autre que la diagonale.*
Suivant la classe, le débat « même aire/même périmètre » sera lancé ou non.



Deuxième phase :
Consigne :
« Partagez un nouveau rectangle en deux parties superposables. Votre partage sera différent de tous ceux qui ont été présentés au cours de la mise en commun. »

Il est probable que les solutions seront moins immédiates, et que pour le professeur la tentation d'intervenir sera grande. Le professeur encouragera à la mise en place de lignes de partage « originales » voire « farfelues ». Il ne s'agit pas de tendre vers l'exhaustivité, mais de laisser le temps à chacun de se construire des représentations durables.

Dans le cas où aucune solution nouvelle n'émerge, ou afin de « relancer » l'ensemble des élèves, le professeur peut suggérer une ligne de partage qui ne sera pas une droite.

Remarque *: Une étape importante de l'activité est celle qui permet à chaque élève de constater, individuellement ou au sein de son groupe, que certains essais n'aboutissent pas et qu'il soit ainsi conduit à imaginer d'autres possibilités.*

Mise en commun

Cette deuxième phase sera prévue suffisamment longue pour laisser aux élèves le temps d'inventer et de s'approprier de nouvelles procédures.
La phase de validation collective est ici très importante et mérite sans doute d'être faite par les élèves eux-mêmes. Autrement dit, les élèves qui

présentent un partage, viennent vérifier la superposition exacte des deux parties et la reconstruction possible du rectangle initial.
Il est intéressant de faire expliquer le procédé qu'ils ont utilisé pour obtenir la ligne de partage.

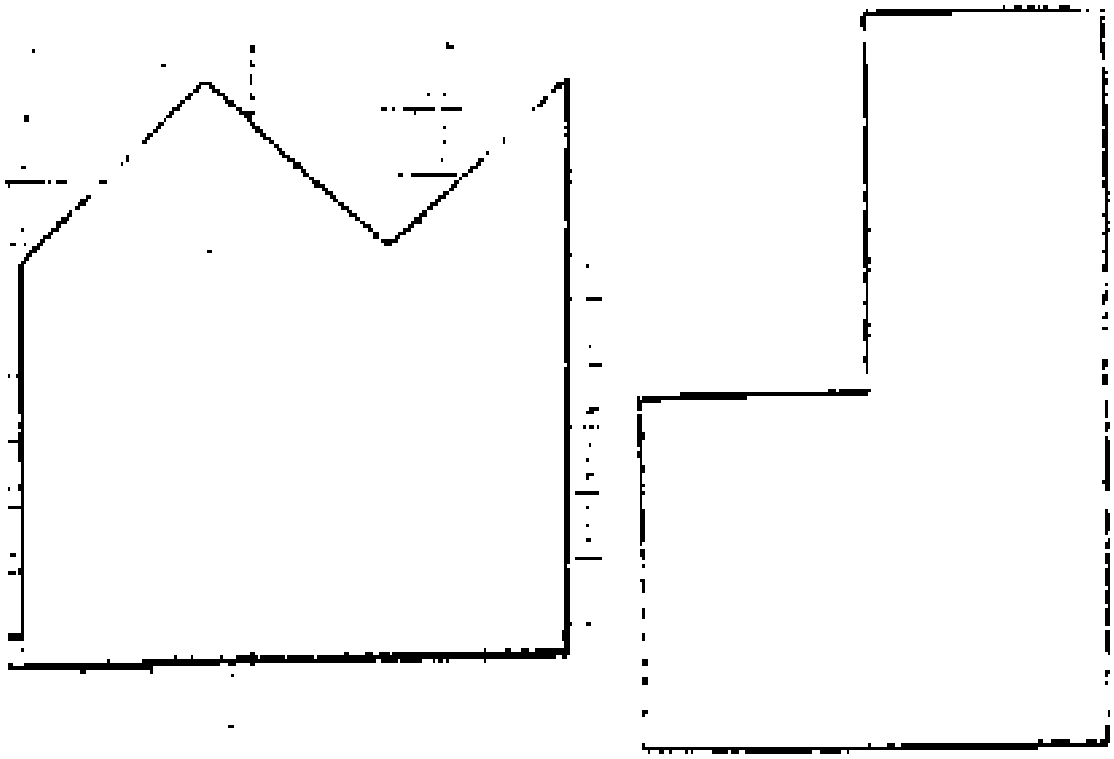
***Remarque** : On pensera à repérer les différents partages obtenus.*

Troisième phase :

C'est la phase de synthèse au terme de laquelle le professeur cherchera avec ses élèves à mettre en évidence que :

- Deux parties issues d'un même partage sont superposables : elles ont donc même forme, même périmètre et même aire.
- Deux parties issues de deux partages différents ne sont pas directement superposables, pourtant, avec deux parties analogues à chacune d'entre elles, on peut reconstituer un rectangle entier : elles ont encore la même aire, mais pas forcément le même périmètre.
- On peut, par recollement sans chevauchement de deux formes issues ou non de deux partages différents, créer une surface qui a la même aire qu'un rectangle initial.

Cette phase peut se concrétiser par une institutionnalisation qui consisterait à faire coller aux élèves dans leurs cahiers un rectangle initial, deux surfaces obtenues par deux partages différents, et une surface différente d'un rectangle obtenue par recollement de deux telles surfaces.



***Remarques** : les élèves ont théoriquement rencontré les notions de périmètre et d'aire au cours du cycle 3 de l'école élémentaire. Ils ont éventuellement revu la notion de périmètre en sixième. Il est donc possible que les mots « périmètre » et « aire » apparaissent au cours de l'activité. Il est possible aussi que les élèves aient recours à un moment donné à des procédures faisant intervenir des mesures ou des formules. Sans rejeter ces évocations de notions antérieures, le professeur s'efforcera de mener l'activité à son terme, gardant comme cap un travail sur les grandeurs : la deuxième phase de l'activité, au cours de laquelle des partages moins évidents sont demandés aux élèves, devrait l'aider à convaincre les élèves du choix de sa stratégie !*
Le professeur pourra éventuellement évoquer que la propriété vérifiée par la ligne de partage n'est pas liée à une symétrie axiale (seule symétrie rencontrée en cycle 3 et en sixième), mais à un « demi-tour » par rapport au centre du rectangle.

En prolongement, en classe ou à la maison, on peut faire écrire par chaque élève ce qu'est pour lui l'aire d'une surface, et/ou rechercher d'autres partages.

UNE DEUXIEME PROPOSITION D'ACTIVITE POUR REACTIVER LA NOTION D'AIRE EN SIXIEME

Présentation

Cette activité s'inscrit à la suite de l'activité précédente et réactive à son tour les liens entre surface, aire et périmètre. On se place toujours du point de vue des grandeurs et non des mesures.
Elle aurait aussi sa place en activité préalable ; elle aurait alors pour objectif de réactiver la notion d'aire en faisant travailler les élèves sur des surfaces obtenues à partir d'un même nombre de formes identiques, sans que ces formes définissent explicitement une unité d'aire.

Description

Les élèves disposent de plusieurs exemplaires d'un même triangle rectangle. Le professeur demande à chaque élève, par recollement sans chevauchement, de constituer le plus grand nombre de formes possibles à partir de deux triangles rectangles.

Selon les cas, en particulier selon le temps que l'on veut consacrer à cette activité, on s'en tiendra à cette consigne « floue » qui permet d'obtenir un grand nombre de possibilités, incluant les recollements sommet contre sommet ou côté, « morceau de côté » contre côté, côté contre côté, ou bien on exigera un recollement côté contre côté, de façon à n'obtenir que des triangles et quadrilatères non croisés, soit six possibilités seulement à partir de deux triangles. Dans la suite de cette activité, c'est ce deuxième choix qui est fait

Objectifs

- Réactiver le concept d'aire, indépendamment du dénombrement sur quadrillage, du calcul et de l'utilisation de formules.
- Exhiber des surfaces non superposables de même aire : le double de l'aire du triangle rectangle initial dans la première phase et le quadruple dans la deuxième phase.
- Constater que le périmètre et l'aire varient de façon indépendante.

Scénario :	Commentaires :
Matériel Un grand nombre (une vingtaine) de triangles rectangles superposables dont les côtés mesurent 3 cm, 4 cm, 5cm. crayon, ciseaux, colle	Faire en sorte que chaque élève puisse disposer du matériel : - en faisant construire et découper ceux-ci par les élèves eux-mêmes, chez eux, (éventuellement après en avoir construit un en classe pour s'assurer que la consigne a été comprise par chacun !) (dans ce cas, prévoir des triangles « de secours » !) - ou en distribuant des feuilles avec des triangles déjà tracés à faire découper - ou en distribuant directement les triangles
Première phase : Consigne 1 : « Prenez deux de vos triangles rectangles, juxtaposez-les, sans recouvrement. Deux côtés de même longueur seront exactement collés l'un à l'autre».	Lorsque le professeur s'est assuré que la consigne a été comprise, il donne la suite de la consigne à chaque groupe, (ou à chaque élève lorsqu'il s'agit d'un travail individuel).
Consigne 2 : « Essayez de trouver d'autres possibilités. Gardez une trace de chaque solution. Peut-on les trouver toutes ? »	Le professeur circule dans les rangs, mais n'intervient pas auprès des élèves. Il laisse suffisamment de temps pour des échanges au sein des groupes.
Consigne 3 : « Les surfaces que vous avez obtenues ont-elles le même périmètre ? »	Dès que tous les élèves ont réalisé leurs recompositions, le professeur exhibe les différentes formes obtenues par affichage, en utilisant des agrandissements des triangles ou

en les posant directement sur le rétroprojecteur.
L'un des triangles rectangles de base et quelques-unes des figures obtenues peuvent être collés par les élèves sur leur cahier ou dans leur classeur, avec indication du périmètre.
(Une construction géométrique de quelques-unes des figures obtenues peut ensuite être demandée, en complément à. l'activité soit plus tard, en classe, en utilisant un logiciel de géométrie dynamique ou sur papier en utilisant les instruments de géométrie, soit en travail maison.)

Deuxième phase :

Consigne :
« Faites le même travail qu'à l'étape précédente, mais en utilisant à chaque fois quatre triangles »

On peut aisément imaginer pour cette phase un déroulement analogue à celui de la première phase, jusqu'à la présentation de différentes formes, dont deux rectangles et un losange.

Troisième phase :

C'est la phase de synthèse au cours de laquelle le professeur cherchera à mettre en évidence avec ses élèves que :

- Deux parties formées par le recollement d'un même nombre de triangles rectangles ont la même aire, mais pas forcément le même périmètre.
- L'aire des figures obtenues à l'issue de la première phase, en particulier celle du rectangle et des deux triangles isocèles, est deux fois plus grande que celle d'un triangle rectangle et l'aire des figures obtenues à l'issue de la deuxième phase, en particulier celle du losange et des deux rectangles, est quatre fois plus grande que celle d'un triangle rectangle (et deux fois plus grande que celles des premières figures obtenues)
- Les périmètres des figures obtenues dans chacune des deux phases ne sont pas nécessairement égaux entre eux alors que les aires, elles, sont égales.

Cette phase peut se concrétiser par une trace écrite de ces constats

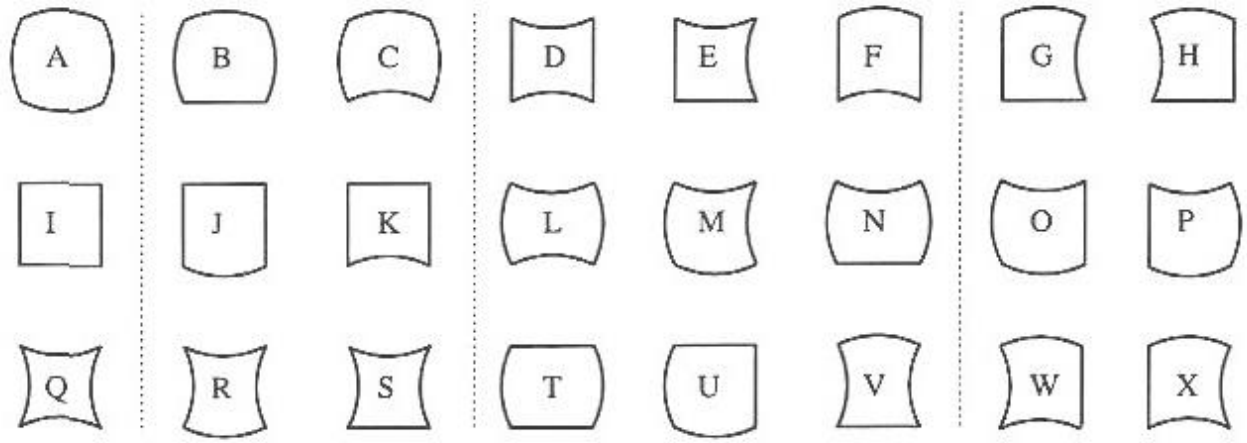
Remarques *: on se gardera à nouveau de travailler sur les mesures en particulier de l'utilisation ou même de l'évocation de quelque formule que ce soit, même si la tentation est grande.. On cherchera à orienter le constat de périmètres différents soit par identification des côtés soit par report au compas de leurs longueurs. Enfin, on pourra insister sur le fait que, si l'aire d'une figure formée par deux triangles qui ont un côté commun est deux fois plus grande que celle d'un triangle, ce n'est pas vrai pour les périmètres…*
Le lien de cette activité avec l'introduction des fractions étant très étroit, on conservera les résultats obtenus dans la mémoire collective de la classe, par exemple à l'aide d'une affiche, pour une exploitation ultérieure, et on profitera simplement du moment présent pour donner du sens aux mots « double », « moitié », « quart », et pourquoi pas « quadruple » , en attendant l'introduction explicite d'une unité d'aire… qui pourra être l'aire d'un triangle rectangle !

CURVICA

(Activité extraite de la brochure n°119 (année 1998) – A.P.M.E.P)

Présentation et objectifs de l'activité : L'activité de la fiche 1 a essentiellement comme objectif un travail sur les aires et périmètres. Elle s'adresse à des élèves à partir de la cinquième. Le fait qu'une figure peut avoir un périmètre plus grand mais une aire plus petite qu'une autre est souvent une découverte pour les élèves de collège. Le tracé préalable des pièces donne lieu à une construction géométrique, mais permet surtout à chaque élève de prendre conscience de l'égalité des longueurs des arcs, que ceux-ci soient bombés ou creusés.
Cette activité a été prévue pour un travail en groupe. Le groupe se partage la réalisation d'un même jeu qu'il utilisera pour la suite de l'activité. Un jeu pour 4 est satisfaisant car il faut avoir de la place pour étaler les pièces. De plus le travail en groupe favorise les échanges d'idées, amène à argumenter pour convaincre et permet une critique permanente de l'état d'avancement du classement, lorsque les élèves « jouent le jeu », bien entendu!
Si l'enseignant préfère que le travail soit individuel, il peut faire fabriquer, par exemple, deux pièces différentes à chaque élève. Il obtiendra ainsi deux jeux. Il pourra en utiliser un au rétroprojecteur, en ombres chinoises, pour donner des explications à toute la classe, puis donner un rectangle de la fiche 2 à chaque élève pour que celui-ci réalise son jeu.
La fiche 3 permet de faire le point sur l'activité, en groupe, en la faisant passer de groupe en groupe, ou devant toute la classe à l'aide du rétroprojecteur.

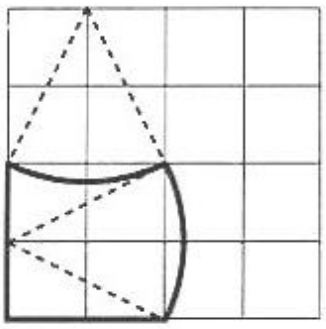
FICHE 1 : *l'activité*



Ce puzzle comprend toutes les pièces qu'on peut obtenir à partir d'un carré, en "creusant", en "bombant" ou en laissant droit les côtés d'un carré.

A partir des indications de constructions portées sur le dessin ci-contre, dessine sur une feuille de bristol les 24 pièces de ce puzzle CURVICA. (Par groupe de quatre élèves, chacun en réalise 6).

Découpe alors ces pièces et utilise-les pour faire le travail suivant :

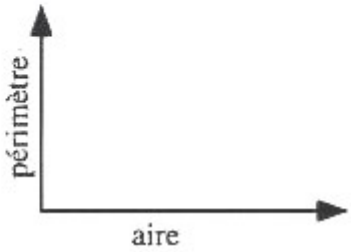


1°) Regroupe les pièces qui ont le même périmètre. Ordonne alors l'ensemble des pièces suivant leurs périmètres, du plus petit au plus grand.

2°) Regroupe les pièces qui ont la même aire. Ordonne alors l'ensemble des pièces suivant leurs aires, de la plus petite à la plus grande.

3°) Y a-t-il des pièces qui ont à la fois même aire et même périmètre ?

4°) Dispose ces pièces dans le plan (sur la table) de telle sorte que la mesure des aires soit croissante horizontalement, et que la mesure des périmètres soit croissante verticalement, comme l'indique le dessin ci-contre.

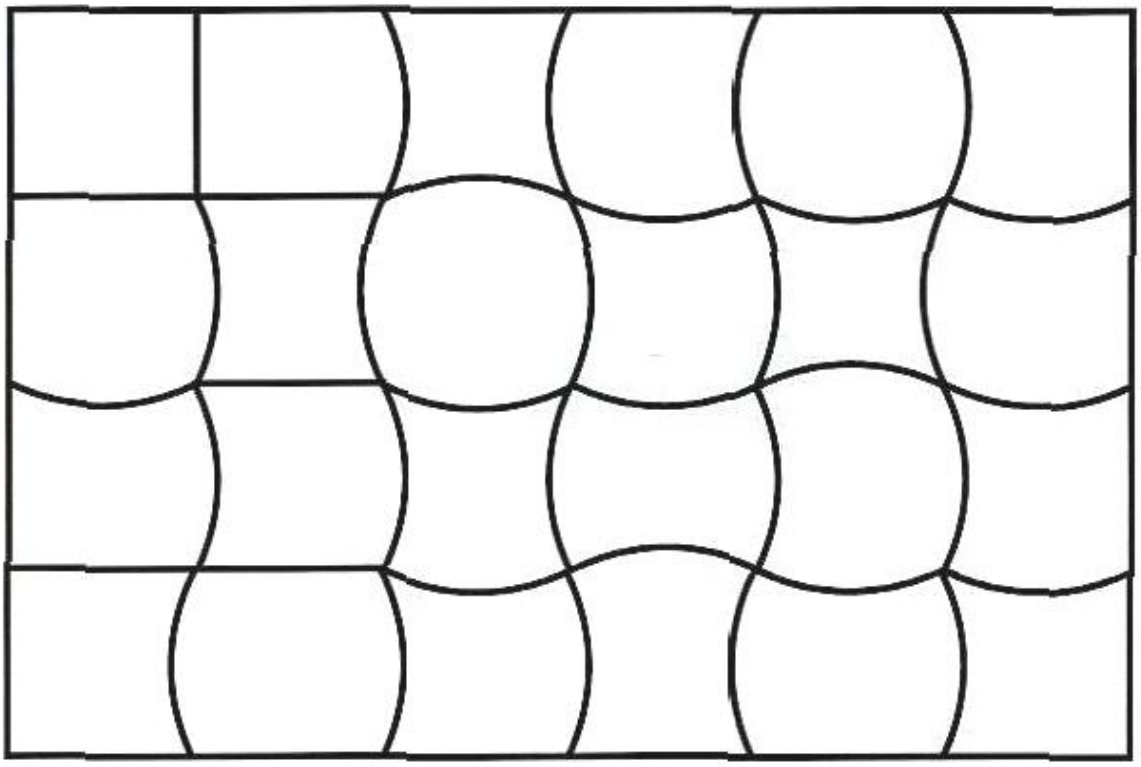


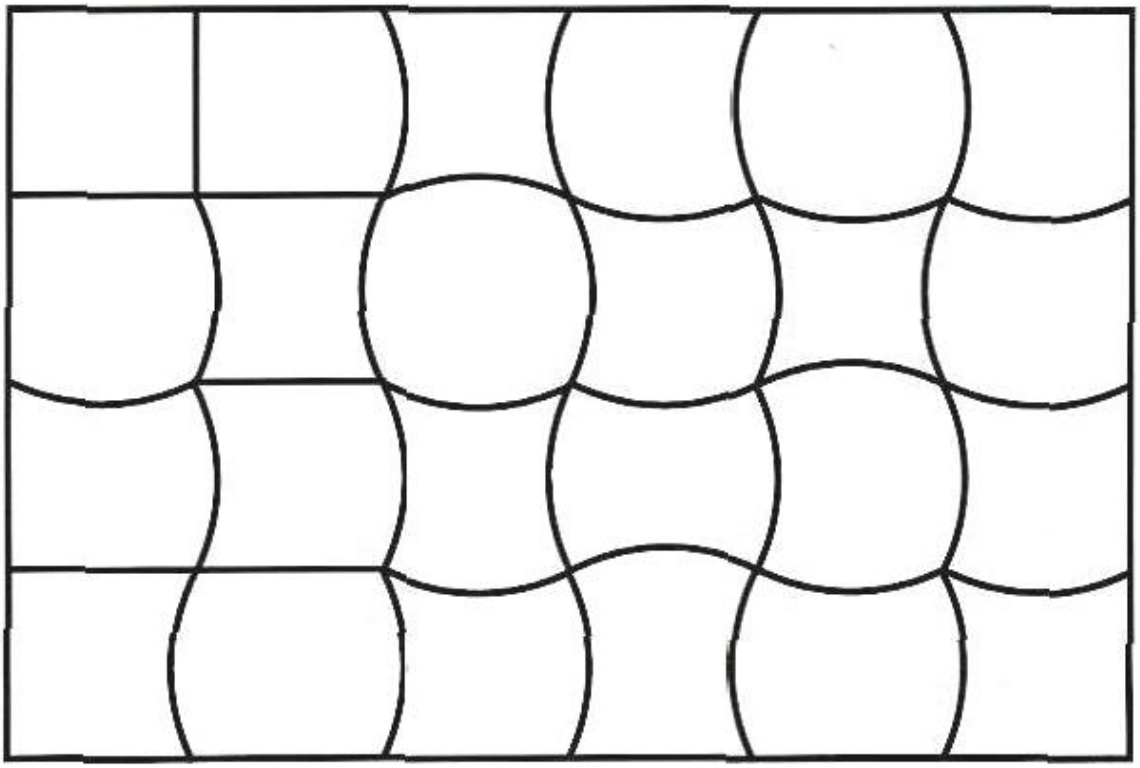
Remarque

La brochure n° 119 de l'A.P.M.E.P. consacre six pages au jeu CURVICA, qui comportent des commentaires et des prolongements qui ne figurent pas ici.

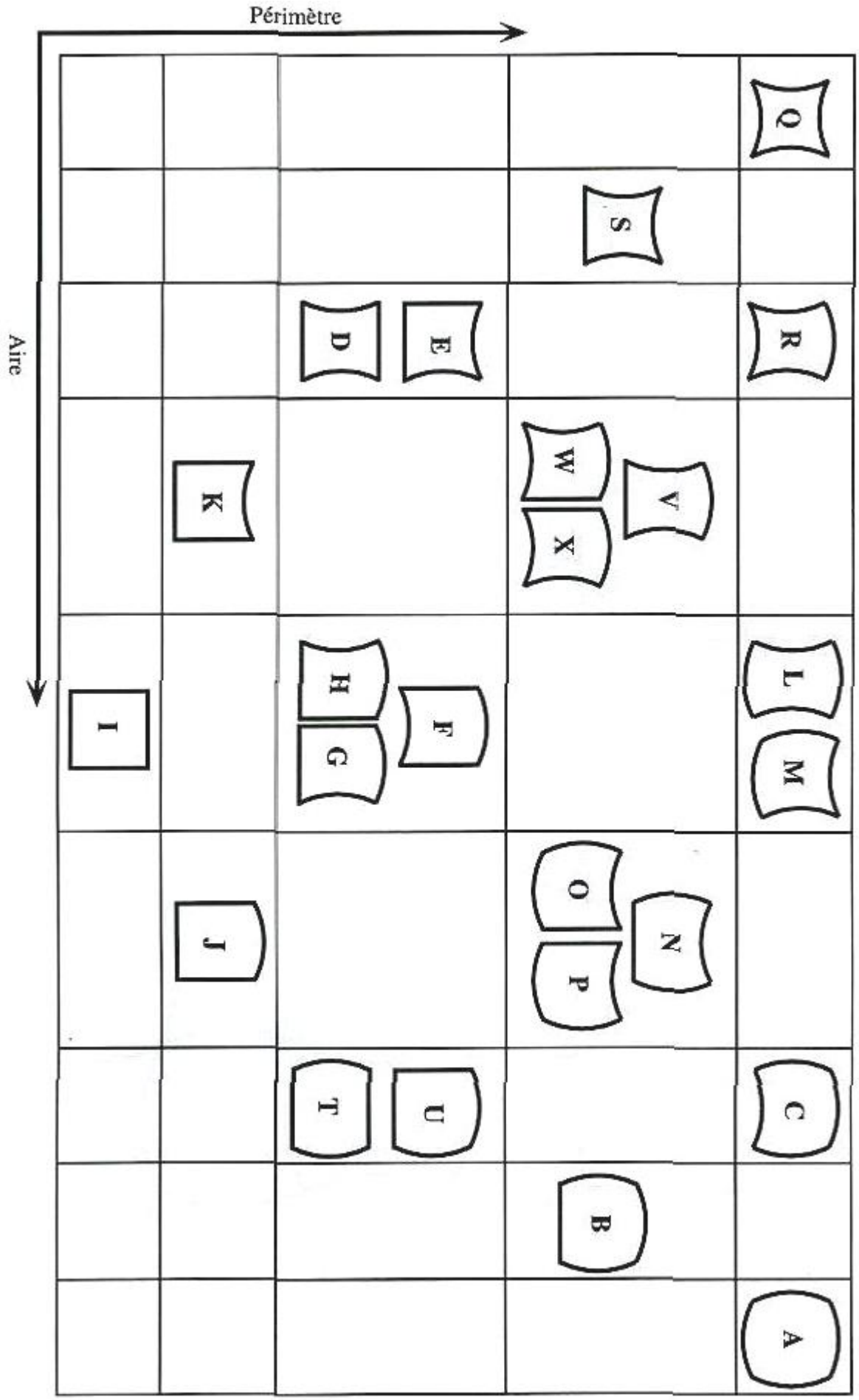
Par ailleurs l'activité ci-dessus a été reprise dans le PLOT n°105 – nouvelle série n° 2 de l'A.P.M.E.P

Ci–dessous : **FICHE 2 :** *pièces à découper*
Page suivante : **FICHE 3 :** *solution de l'activité*





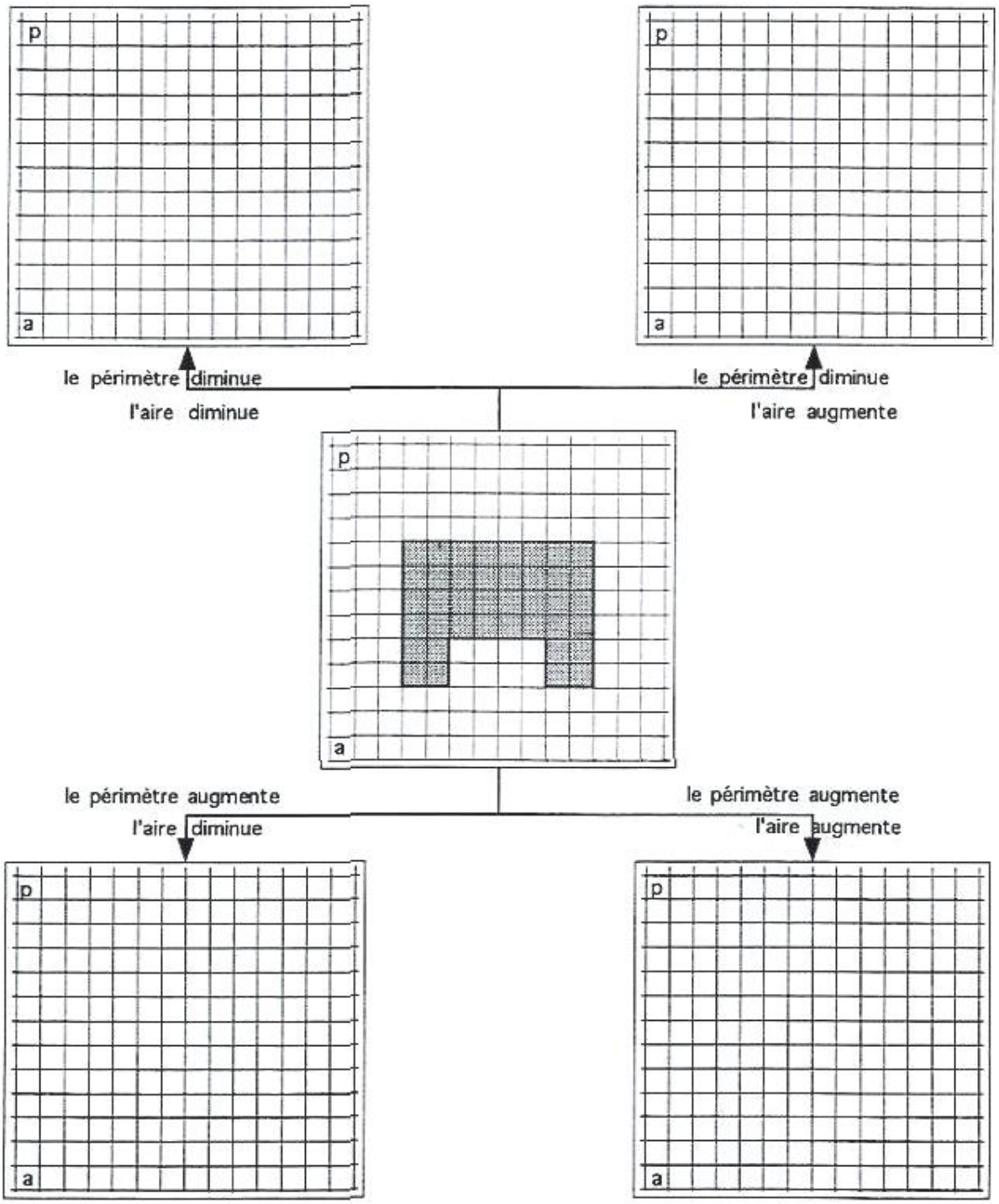
:


Périmètre
Aire
Q
S
D
E
R
K
W
V
X
H
F
G
L
I
M
O
N
J
P
T
U
C
B
A

TOUT PEUT CHANGER

(Activité extraite de « Activités mathématiques au collège » fascicule 1- IREM Paris – Nord)

Objectif : Illustrer le fait que, lorsqu'on modifie une surface, son aire et son périmètre ne varient pas nécessairement dans le même sens.



Si c'est possible, modifier la figure initiale en lui ôtant ou en lui ajoutant un «morceau» pour que les consignes proposées soient respectées.

LE MEMORY DES AIRES ET DES PERIMETRES

Matériel

Un jeu de 70 memorys.

But du jeu

Associer les cartes par paires.

Nombre de joueurs

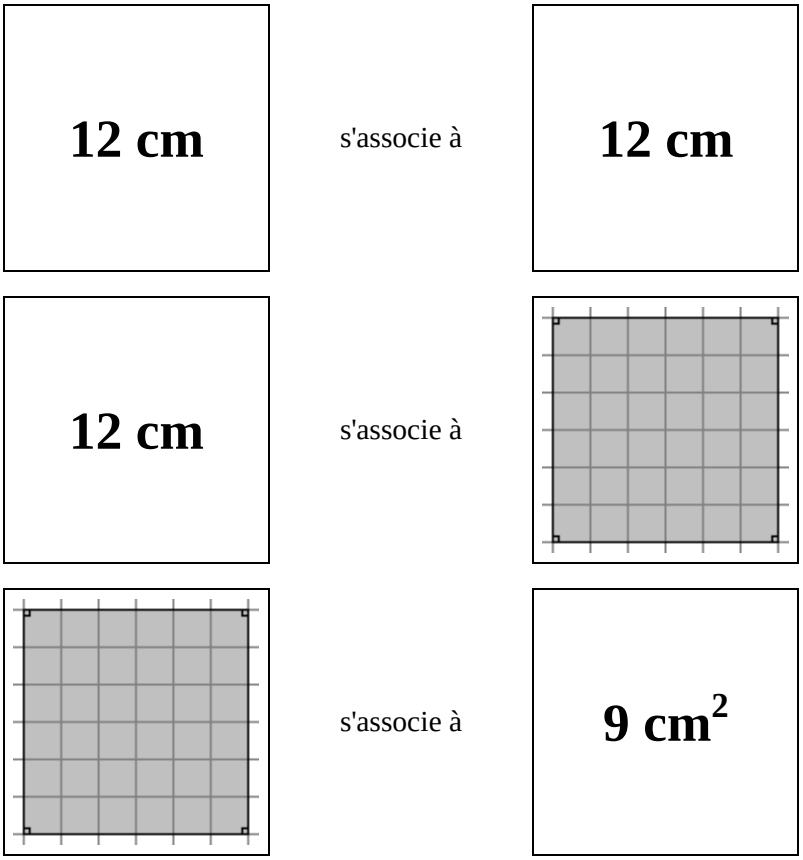
2 ou 3

Règles du jeu (inspirées de la règle classique des memorys)

Les memorys sont placés "face contre table". Courtoisement, les joueurs décident d'un tour de table.

Suivant l'ordre établi, les joueurs retournent deux cartes. Lorsque deux de ces cartes peuvent être associées, le joueur empoche ces deux cartes. Dans ce cas, il est autorisé à jouer à nouveau.

Deux cartes sont considérées comme pouvant s'associer lorsqu'elles désignent une même mesure de longueur ou lorsqu'elles désignent une même mesure d'aire.



→ *Même mesure de longueur*

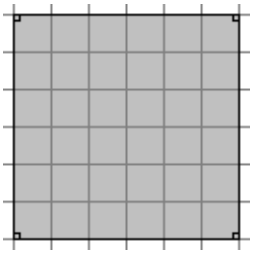
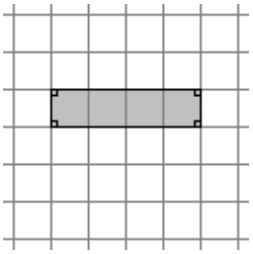
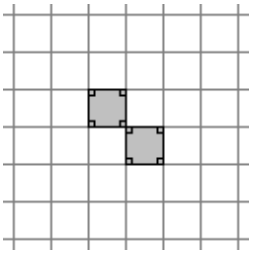
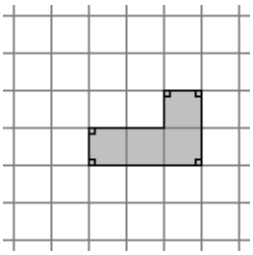
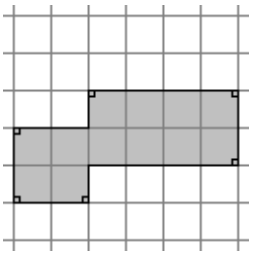
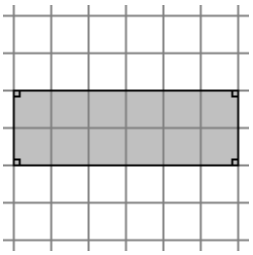
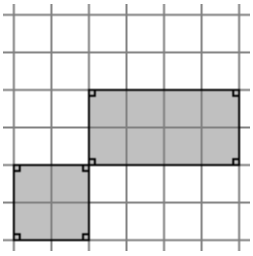
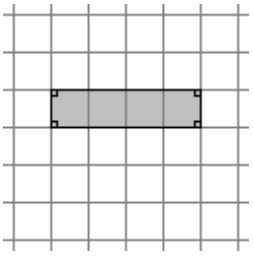
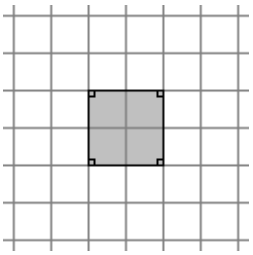
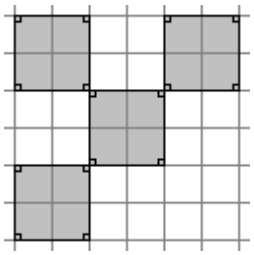
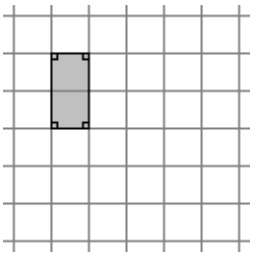
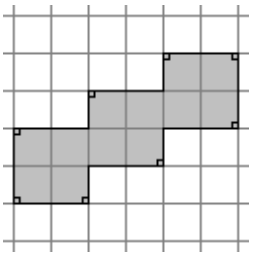
→ *Même mesure de longueur*

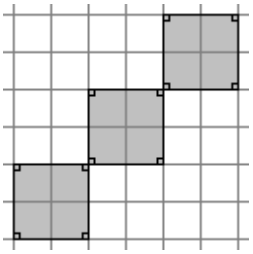
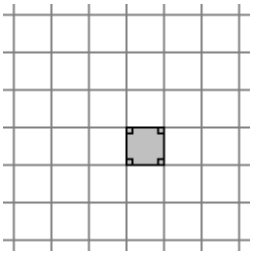
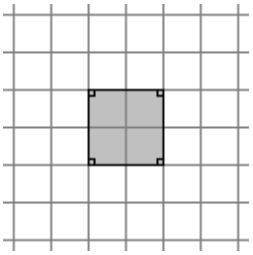
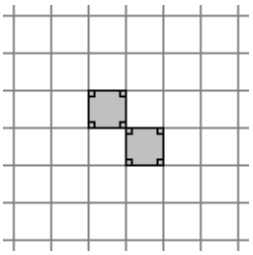
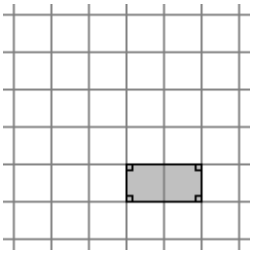
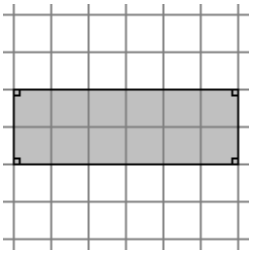
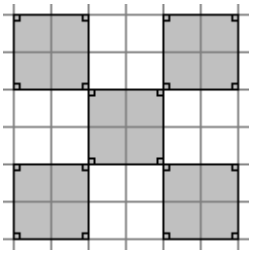
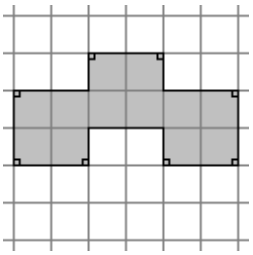
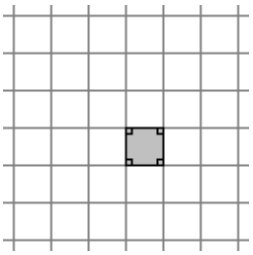
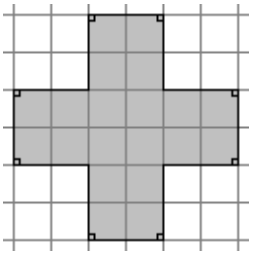
→ *Même mesure d'aire*

Le jeu prend fin lorsque toutes les cartes ont été empochées par les joueurs ou, sur décision unanime, lorsque aucune combinaison de cartes ne semble possible. Est déclaré gagnant, le joueur qui possède le plus de paires de cartes.

Variantes

Afin d'accentuer les progrès des élèves sur certaines connaissances, le nombre important de cartes permet de conserver un jeu fonctionnel lors du retrait de certains types de cartes. Il est ainsi possible de ne jouer qu'avec les cartes indiquant une aire ou uniquement avec celles qui représentent une figure géométrique.

	12 cm		20 cm	1 cm^2
9 cm		3 cm	1 cm^2	5 cm^2
	10 cm	2 cm	3 cm^2	
3 cm^2		3 cm^2	5 cm	10 cm
	10 cm		1 cm	4 cm
1 cm^2		0,25 cm^2		0,5 cm^2
	4 cm		5 cm^2	12 cm

0,5 cm^2		3 cm^2	2 cm	0,5 cm^2
	4 cm		1 cm^2	8 cm
16 cm	0,5 cm^2	3 cm^2		10 cm
	3 cm		1 cm^2	
9 cm^2		12 cm	3 cm^2	3 cm^2
12 cm	3 cm^2		4 cm^2	0,25 cm^2
5 cm		8 cm	4 cm	5 cm

LES DOMINOS EXPRESSIONS ALGEBRIQUES, AIRE ET PERIMETRE

Ce jeu de dominos est une reproduction des pages 170 à 172 du livre intitulé **"L'algèbre par des situations-problèmes au début du secondaire"**, avec l'accord de ses auteurs Joëlle Vlassis et Isabelle Demonty (Editions de Boeck - ISBN : 2-8041-3985-9).

L'activité proposée trouve sa place en fin de cursus de collège, à un moment où les connaissances des élèves sur les concepts d'aire et de périmètre peuvent être considérées comme convenablement stabilisées. Elle est présentée dans cette revue dans une perspective d'ouverture.

Matériel

Un jeu de 24 dominos.

But du jeu

Associer deux expressions algébriques égales.

Nombre de joueurs

2 ou 3

Règles du jeu (inspirées de la règle classique des dominos)

Les joueurs se partagent les dominos: chacun en reçoit 8. Pour plus de facilité, il faut déposer les cartes devant soi. Un joueur place un domino sur la table. Les participants jouent à tour de rôle et, s'ils ne peuvent placer un domino, ils passent leur tour et tirent une carte (domino).

Si un participant place un double, il peut rejouer.

Le gagnant est celui qui, le premier, a pu placer tous ses dominos.

Attention! Les dominos doivent se suivre en alternant dessin et expression algébrique sauf pour les doubles qui se placent perpendiculairement aux autres dominos. À la suite du double, on peut faire suivre une figure ou une expression (au choix).

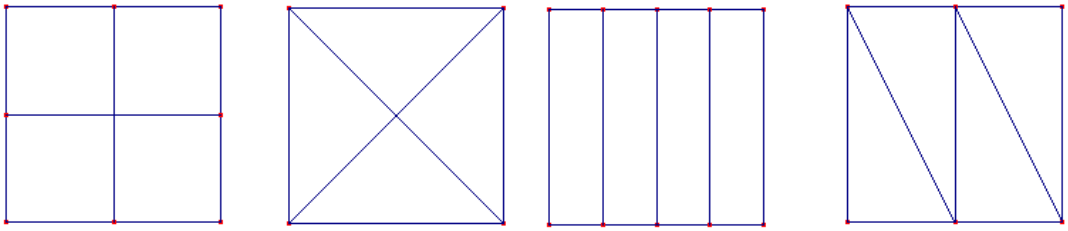
Erreur! Argument de commutateur inconnu.

Erreur! Argument de commutateur inconnu.

AIRE ET FRACTION

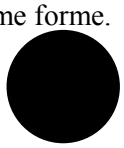
Introduction :
Les approches pour mettre en place le concept « fraction » sont riches et diverses. Une des approches proposées en cycle 3 fait référence à l'idée de partage d'une figure donnée. En effet, si l'on partage une surface en parties identiques, chaque morceau représentera alors une fraction de la surface initiale.
Il faut toujours bien préciser la figure de référence et insister sur le fait que la même fraction peut être associée à des surfaces de formes différentes.
Toutes les activités proposées ci-dessous, peuvent être utilisées indépendamment les unes des autres, à des niveaux différents (du CM2 à la 3ème suivant l'activité). Dans toutes ces activités, on prendra l'aire de la surface de référence comme unité d'aire.

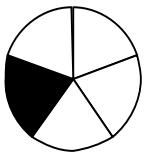
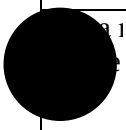
Activité 1 : Partager un carré de 4 cm de côté en 4 parties superposables à l'aide d'un pliage (et éventuellement d'un découpage). Après un travail individuel, une mise en commun sera faite dans un deuxième temps. Voici des exemples de pliages que l'on peut trouver :



Le but de cette activité est de mettre en évidence que l'aire de chaque partie représente $\frac{1}{4}$ de l'aire du carré initial.
On conforte l'idée que des figures qui ont la même aire, n'ont pas forcément la même forme.

Activité 2 : QCM : On choisit comme unité d'aire, l'aire de ce disque D :
(Plusieurs réponses sont possibles)



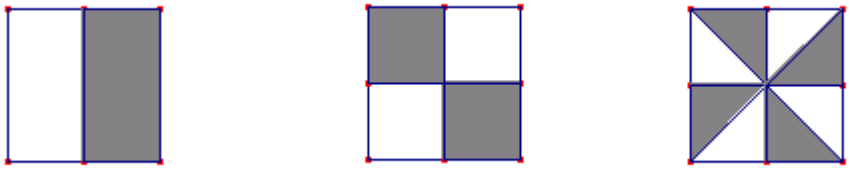
Q.C.M	A	B	C	D	E	F	G
1. La mesure de l'aire de la figure noire est : 	1	$\frac{1}{4}$	5	$\frac{1}{5}$	$1-\frac{4}{5}$	$\frac{4}{5}$	$1\times\frac{1}{5}$
2. La mesure de l'aire de la figure noire est :	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$	3	$1-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$3\times\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$
3. La mesure de l'aire de la 	$\frac{5}{6}$	$1+\frac{2}{3}$	1,5	$\frac{5}{3}$	$2-\frac{1}{3}$	$5\times\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{1}{3}$

Le but de cette activité est d'associer à des dessins des fractions, simples ou décomposées. Il apparaît indispensable dans cette activité de préciser **l'unité de référence**.

En effet, dans le tableau précédent si l'unité d'aire était l'aire de $\frac{1}{4}$ du disque D, la seule réponse juste de la 2ème ligne serait la C. Si l'unité d'aire était l'aire de deux disques D alors la seule réponse juste de la 3ème ligne serait la A.

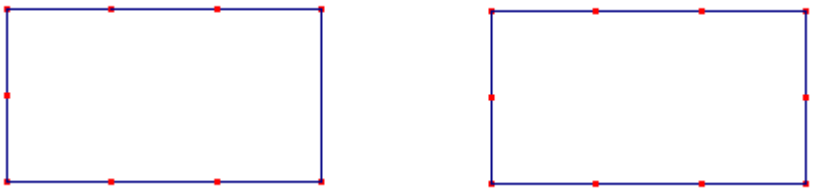
<u>Activité 3</u> : Egalité de fractions.

1. Le carré étant la figure de référence, écrire des égalités de fractions à l'aide de ces figures :



$\frac{\cdots}{\cdots} = \frac{\cdots}{\cdots} = \frac{\cdots}{\cdots}$

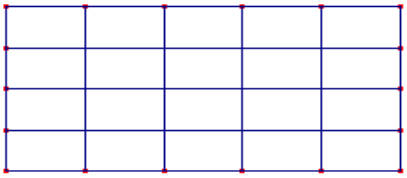
2. Illustrer l'égalité $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$ à l'aide des figures suivantes :



Le but de cette activité est d'illustrer des égalités avec des fractions grâce à des égalités d'aire. On remarquera encore que des figures qui ont la même aire, n'ont pas forcément la même forme.

<u>Activité 4</u> : Addition de fractions : Le rectangle étant la figure de référence :

1/ a) Colorier en rouge $\frac{1}{4}$ du rectangle.



b) Colorier en jaune les $\frac{9}{20}$ du rectangle sans repasser dans la partie rouge.

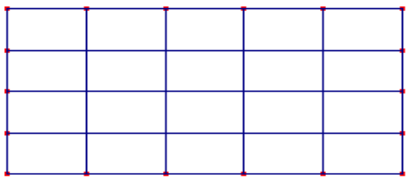
c) Quelle fraction du rectangle a été coloriée? …….

d) Peux-tu additionner directement $\frac{1}{4}$ et $\frac{9}{20}$? ……..

e) Comment transformer l'écriture d'une des fractions ?.....

f) Compléter : $\frac{1}{4}+\frac{9}{20}=$ ……..

2/ a) Colorier en rouge les $\frac{2}{5}$ du rectangle et en jaune les $\frac{3}{20}$ du rectangle sans repasser dans la partie rouge.

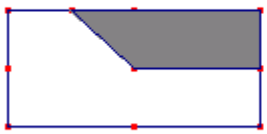


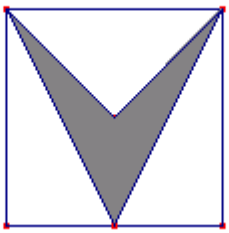
b) Quelle fraction du rectangle n'a pas été coloriée ?.....

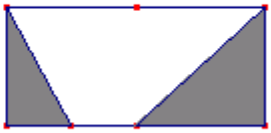
c) Ecrire l'opération qui te permet de calculer la fraction du rectangle qui n'a pas été coloriée? ……
……

L'objectif de ces activités est d'illustrer l'addition et la soustraction de fractions par les aires.

<u>Activité 5</u> :
Dire quelle fraction de chaque figure a été grisée:

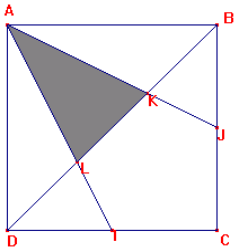






<u>Activité 6 :</u>
Sur la figure ci-dessous, ABCD est un carré ; les points I et J sont les milieux respectifs de [DC] et [BC].

1) Démontrer que LD = $\frac{1}{2}$ LB.
2) Démontrer que l'aire de ALK est le tiers de l'aire du triangle ADB.
3) Si l'unité de référence est le carré, quelle est la fraction qui représente l'aire du triangle ALK.



Le but de ces deux dernières activités est de savoir calculer l'aire d'une figure à l'aide de propriétés géométriques ou du théorème de Thalès.

D'autres figures sont proposées dans les malices du Kangourou, édition collège 2003.

AIRE ET FONCTION

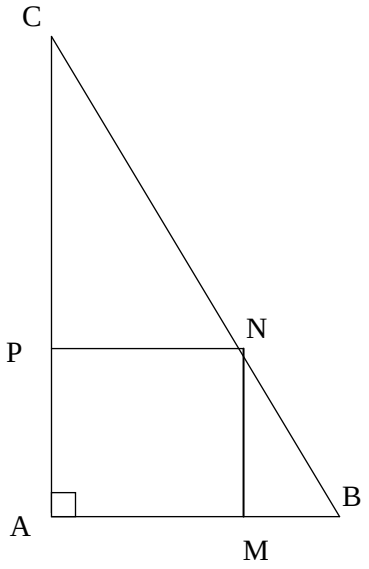
Niveau : 3ème

Objectifs : Cette activité permet de répondre à un problème d'aire en utilisant un graphique mais aussi de tracer une courbe représentative d'une fonction qui ne soit pas une droite, à l'aide d'un tableur-grapheur, avec une prise d'initiative de l'élève.
La poursuite de la construction de concept de variable, le réinvestissement du Théorème de Thalès, la résolution d'une situation d'un problème avec une équation et l'utilisation des décimaux sont aussi abordés dans cette activité.

La figure ci-contre représente un triangle ABC rectangle en A tel que :

- AB = 4,2 cm , AC = 6,3 cm
- M est un point de [AB], N un point de [BC] et P un point de [AC] tels que AMNP soit un rectangle.
  On pose BM = x cm

Le but de cette activité est de trouver la position du point M de [AB] pour laquelle l'aire du rectangle AMNP est maximale.



PARTIE I

1. Montrer que les droites (MN) et (AC) sont parallèles.

2. Calculer MN pour $x = 2$.

PARTIE II

1. Donner un encadrement de x.

2. Exprimer en fonction de x: a) la longueur AM,
   b) la longueur MN,
   c) l'aire du rectangle AMNP que l'on notera $\mathcal{A}(x)$.

3. Pour quelle valeur de x le rectangle AMNP est-il un carré ?

PARTIE III : Utilisation du tableur-grapheur

1. a) Utilisation du tableur
Établir un tableau numérique pour l'obtention de l'aire $\mathcal{A}(x)$ en faisant varier x de 0 à 4,2 par pas de 0,2.

Feuille de calcul Excel :
Après avoir rempli les cases A1, A2, B1, B2 et A3, cliquer sur le sommet inférieur droit de la "case" A3 puis "tirer" vers le bas jusqu'à 23.
Refaire la même manipulation à partir de la case B2

	A	B
1	x	$\mathcal{A}(x)$
2	0	=6,3*A2-1,5*A2^2
3	=A2+0,2	
23		

b) Utilisation de l'assistant graphique

Faire apparaître, avec le grapheur lié au tableur, le graphique associé au tableau précédent.
En déduire pour quelle valeur de x, l'aire $\mathcal{A}(x)$ du rectangle AMNP semble être maximale et la valeur de cette aire.

Graphique avec nuage de points Excel :
** Axe des abscisses : Mini : 0 ; Maxi : 4.2 ; Unité principale : 0,2 ; Police : Arial 11*
** Axe des ordonnées : Mini : 0 ; Maxi : 7 ; Unité principale : 0,2 ; Police : Arial 11*

2. Refaire le même travail qu'au 1. a) avec le tableur en faisant varier x avec un pas de 0,1 puis avec un pas de 0,3 puis avec un pas de 0,7.
Que peut-on constater ?

Pour aller plus loin

Montrer que $6{,}615 - \mathcal{A}(x) = 1{,}5(x - 2{,}1)^2$. En déduire que $6{,}615 - \mathcal{A}(x) \geq 0$
Conclure.

LES QUATRE LEMMES DU COLLEGE

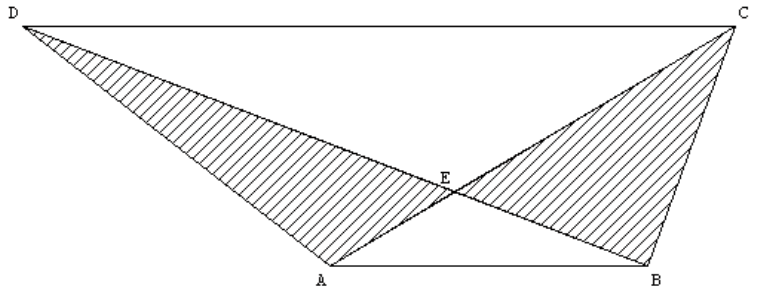
Dans un texte rédigé pour la commission Kahane, Daniel Perrin met en exergue quatre théorèmes qu'il appelle « les quatre lemmes du collège », à savoir :

- Le lemme « du demi-parallélogramme » : chaque diagonale d'un parallélogramme partage celui-ci en deux triangles de même aire.
- Le lemme « du trapèze » : deux triangles ayant un côté en commun et leur troisième sommet sur une parallèle à ce côté ont des aires égales.
- Le lemme « de la médiane » : une médiane d'un triangle partage celui-ci en deux triangles de même aire.
- Le lemme « des proportions » : si deux triangles ont deux côtés [AB] et [AC] portés par la même droite et leur troisième sommet commun , alors le rapport de leurs aires est égal au rapport des longueurs AB et AC (Le troisième lemme en est un cas particulier).

D. Perrin donne comme premières applications la démonstration d'Euclide du théorème de Thalès et la concourance des médianes d'un triangle. Nous proposons ici d'autres situations, plus ou moins immédiates, qui peuvent être proposées aux élèves.

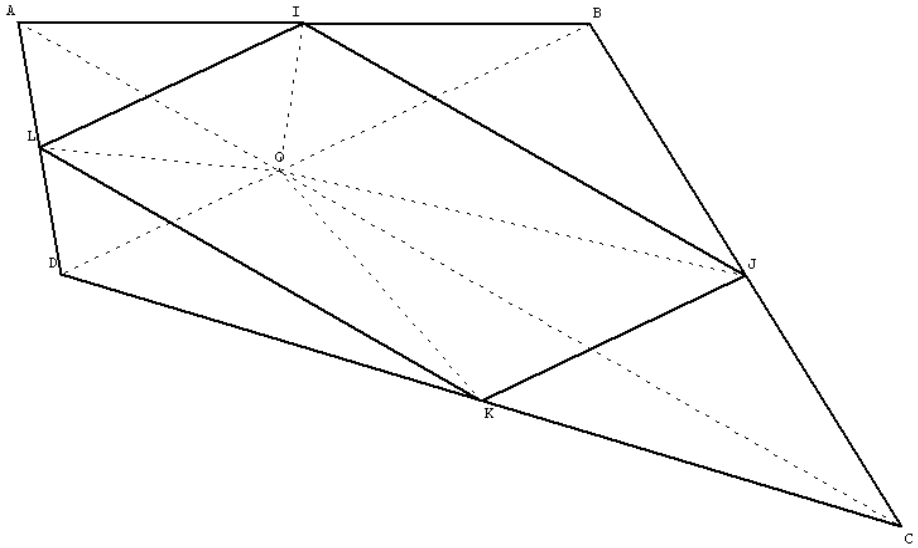
Situation 1

Situation bien connue sous le nom de théorème du papillon : si les droites (AB) et (CD) sont parallèles, alors les triangles (AED) et (EBC) ont la même aire.



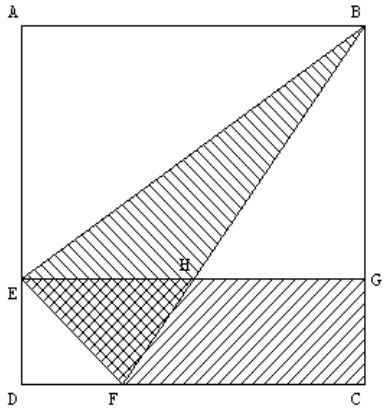
Situation 2

Si l'on fait souvent montrer aux élèves qu'il y a toujours un parallélogramme caché dans un quadrilatère, on attire moins souvent leur attention sur le fait que l'aire de ce parallélogramme est égale à la moitié de celle du quadrilatère, comme l'illustre la figure ci-dessous (dans laquelle I, J, K et L sont les milieux des côtés du quadrilatère).



Situation 3

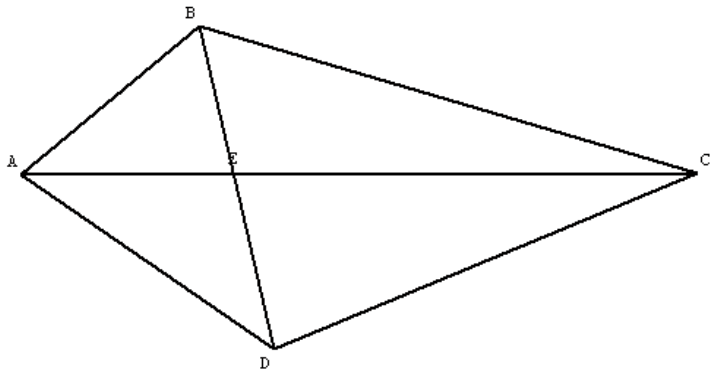
ABCD est un carré, E est un point du segment [AD], F est un point du segment [CD] tel que DE = DF. La parallèle à (CD) passant par E coupe le segment [BF] en H et le segment [BC] en G. Démontrer que le triangle BEF et le trapèze EGCF ont la même aire.



Solution :
Les triangles ABE et BGE ont la même aire, qui est égale à la moitié de l'aire du rectangle ABGE.
Les triangles ABE et BFC ont la même aire (comme triangles symétriques par rapport à (BD) ou directement triangles isométriques)
Donc, les triangles BGE et BFC ont la même aire.
En retirant à chacune de ces deux aires l'aire du triangle BHG et en leur ajoutant l'aire du triangle EFH, on obtient le résultat cherché.

Remarque : Une solution algébrique peut également être proposée pour cet exercice.
Posons AB = a et DE = x.
En considérant le triangle BDE comme obtenu à partir du carré ABCD auquel on a retiré les triangles EDF, ABE et BCF, l'aire du triangle DBE peut s'écrire : $a^2 - \frac{1}{2}x^2 - a(a - x)$, *soit* $ax - \frac{1}{2}x^2$.
Cette expression donne exactement l'aire du trapèze EGCF comme obtenu à partir du rectangle EGCD auquel on a retiré le triangle EDF.

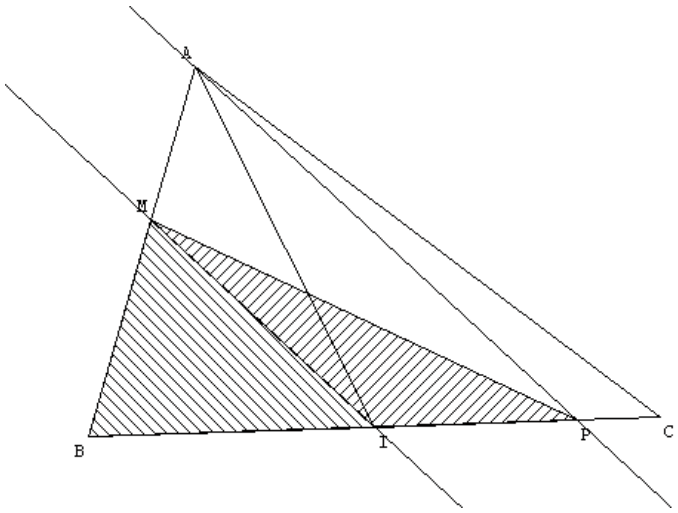
Situation 4
Sachant que l'aire du triangle AED mesure 6 m², que celle du triangle EDC mesure 15 m² et que celle du triangle BCE mesure 10 m², combien mesure l'aire du quadrilatère ABCD ?



Solution : le rapport $\frac{\text{aire}(BEC)}{\text{aire}(DEC)}$ est égal au rapport $\frac{EB}{ED}$, tout comme le rapport $\frac{\text{aire}(AEB)}{\text{aire}(AED)}$

Situation 5

On considère un triangle ABC, M un point de [AB] tel que $AM = \frac{1}{3}AB$. Une droite passant par M coupe [BC] en P. Déterminer la position du point P pour que la droite (MP) partage le triangle ABC en deux parties d'aires égales.
Attention : Les proportions n'ont pas été respectées sur la figure.



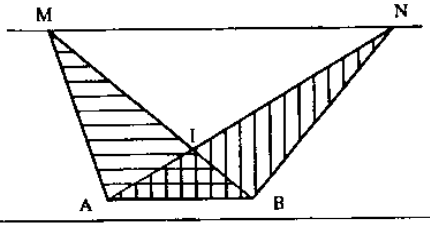
Solution : Plaçons nous dans un cas plus général. Soit (AI) la médiane du triangle ABC issue de A. Considérons la droite (MP) telle que les droites (MI) et (AP) soient parallèles.
On a : aire (BMP) = aire (BMI) + aire (IMP) et aire (IMP) = aire (IMA)
Donc : aire (BMP) = aire (BMI) + aire (IMA), soit aire (BMP) = aire (BIA), c'est-à-dire la moitié de l'aire du triangle ABC.
Pour M placé au tiers de [AB] à partir de A, on obtient alors aisément que P est situé aux trois quarts de [BC] à partir de B.

Problèmes d'aires

1

1°) Que dire des aires des triangles MAB et NBA ?

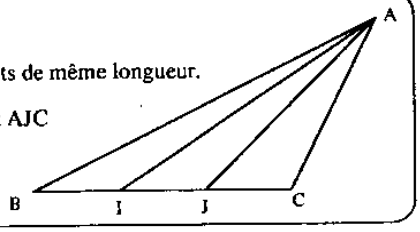
2°) Que dire des aires des triangles MAI et NBI ?



2

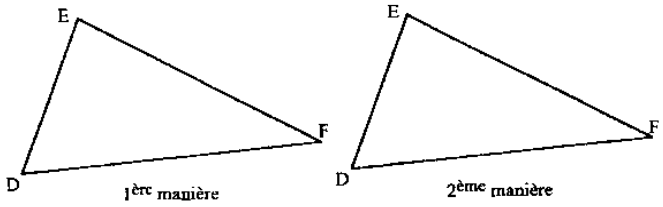
Le côté [BC] du triangle ABC a été partagé en trois segments de même longueur.

Pourquoi peut-on affirmer que les trois triangles ABI, AIJ et AJC ont la même aire ?



3

Partage le triangle EDF en quatre triangles de même aire, de deux manières différentes. (Justifie tes constructions)

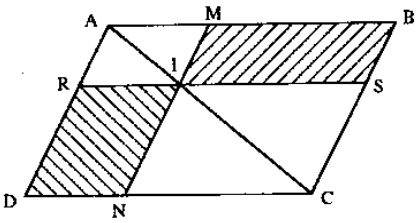


Peux-tu trouver d'autres manières de partager ce triangle en quatre triangles de même aire ?

4

ABCD est un parallélograme. I est un point de la diagonale [AC]. Par le point I, on trace les segments [MN] et [RS] respectivement parallèles aux côtés [AD] et [AB] du parallélogramme ABCD.

Montre que les deux parallélogrammes hachurés MBSI et NDRI ont la même aire.

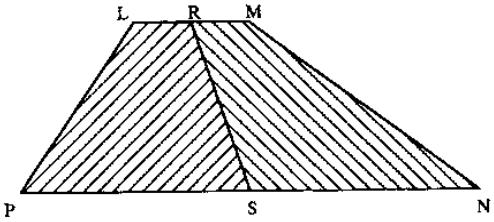


5

LMNP est un trapèze de bases [LM] et [NP].

R est le milieu de la base [LM] et S est le milieu de la base [NP].

Montre que les deux trapèzes hachurés LRSP et RMNS ont la même aire.

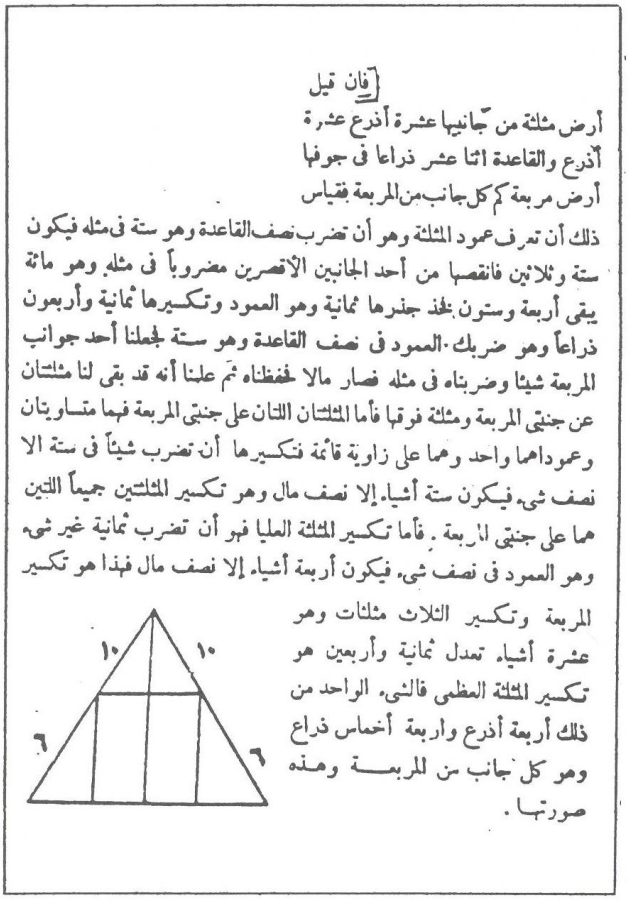


Extrait du bulletin n°445 de l'A.P.M.E.P. 2003, p160

<u>Remarque</u> : ces problèmes peuvent être abordés dès la cinquième

UTILISATION D'UN TEXTE HISTORIQUE EN CLASSE

(4ème – 3ème)



فإن قيل
أرض مثلثة من جانبيها عشرة أذرع عشرة
أذرع والقاعدة اثنا عشر ذراعا فى جوفها
أرض مربعة كم كل جانب من المربعة فقياس
ذلك أن تعرف عمود المثلثة وهو أن تضرب نصف القاعدة وهو ستة فى مثله فيكون
ستة وثلاثين فانقصها من أحد الجانبين الأقصرين مضروباً فى مثله وهو مائة
يبقى أربعة وستون فخذ جذرها ثمانية وهو العمود وتكسيرها ثمانية وأربعون
ذراعاً وهو ضربك العمود فى نصف القاعدة وهو ستة فجعلنا أحد جوانب
المربعة شيئا وضربناه فى مثله فصار مالا فحفظناه ثم علمنا أنه قد بقى لنا مثلثتان
عن جنبتى المربعة ومثلثة فوقها فأما المثلثتان اللتان على جنبتى المربعة فهما متساويتان
وعموداهما واحد وهما على زاوية قائمة فتكسيرها أن تضرب شيئاً فى ستة الا
نصف شىء فيكون ستة أشياء إلا نصف مال وهو تكسير المثلثتين جميعاً اللتين
هما على جنبتى المربعة . فأما تكسير المثلثة العليا فهو أن تضرب ثمانية غير شىء
وهو العمود فى نصف شىء فيكون أربعة أشياء إلا نصف مال فهذا هو تكسير
المربعة وتكسير الثلاث مثلثات وهو
عشرة أشياء تعدل ثمانية وأربعين هو
تكسير المثلثة العظمى فالشىء الواحد من
ذلك أربعة أذرع واربعة أخماس ذراع
وهو كل جانب من المربعة وهذه
صورتها .

Extrait de Kitāb al - Jabr wal - Muqābala.
Edition de A.M. Musharrafa et M. M. Ahmad
Le Caire 1968, pp 65 - 66

UN PROBLEME D'AL KHWARISMI

Un terrain triangulaire a deux côtés égaux à dix coudées et sa base égale à douze coudées. A l'intérieur se trouve inscrit un terrain carré. Quel est le côté du carré ?

La méthode pour cela consiste à connaître la hauteur de la terre triangulaire, et c'est en multipliant la moitié de la base – et c'est six – par lui-même ; il vient trente-six. Retranche-les de l'un des deux côtés courts multipliés par lui-même – et c'est cent. Il reste soixante-quatre. Prends sa racine, huit, et c'est sa hauteur. Son aire est quarante-huit et c'est la multiplication de la hauteur par la moitié de sa base, qui est six.

Nous considérons un des côtés du terrain carré égal à une chose et nous la multiplions par elle-même ; il vient un bien. Nous le conservons. Puis nous constatons qu'il nous reste deux triangles sur les deux flancs du terrain carré et un triangle au-dessus.

Quant aux deux triangles qui sont sur les flancs, ils sont égaux et leurs hauteurs sont les mêmes et ils sont sur un angle droit. Leur aire est que tu multiplies une chose par six moins un demi d'une chose, il vient six choses moins la moitié d'un bien. Et c'est l'aire des deux triangles ensemble qui sont sur les deux flancs du carré.

Quant à l'aire du triangle supérieur, c'est en multipliant huit moins une chose, et c'est la hauteur, par la moitié d'une chose ; il vient quatre choses moins la moitié d'un bien.

Ceci est l'aire du carré et des trois triangles, et c'est dix choses, qui égalent quarante-huit, et c'est l'aire du grand triangle.

De cela la chose est quatre coudées et quatre cinquièmes de coudée et c'est chacun des côtés de la terre carrée.

Extrait de Mnémosyne n°15, Mai 1999, IREM Paris VII

PAPPUS ET PYTHAGORE

Objectifs : Démontrer une propriété (propriété de Pappus) et partant de là, établir ce qu'il reste à faire pour démontrer le théorème de Pythagore.

Figure 1

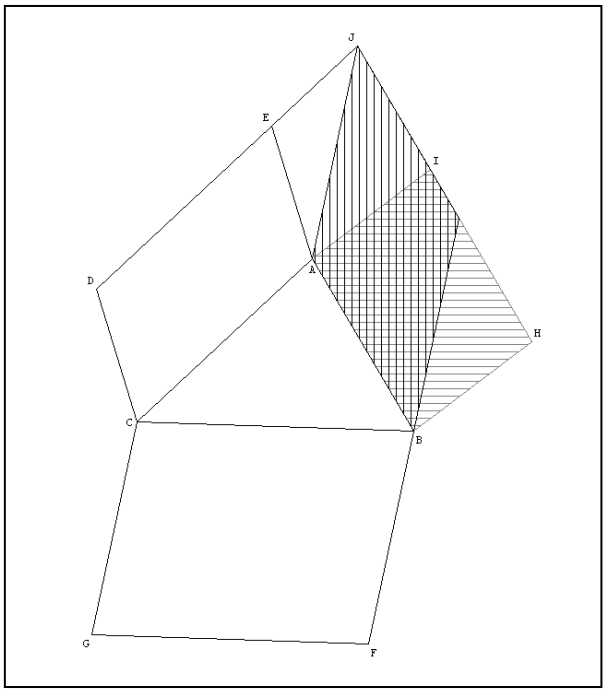
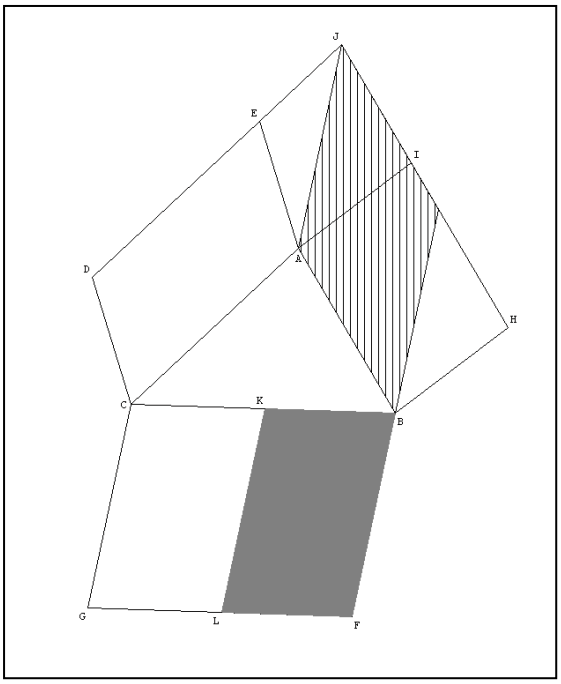


Figure 2



1.a. Justifier que les deux parallélogrammes hachurés de la figure 1 ont la même aire.

b. Sachant que les points J, A, K et L sont alignés et que JA = KL, justifier que le parallélogramme hachuré a la même aire que le parallélogramme grisé (figure 2).

c. Justifier la propriété suivante : « l'aire du parallélogramme BFGC est égale à la somme des aires des parallélogrammes ABHI et ACDE ».

2.a. Quel triangle et quels parallélogrammes particuliers faudrait-il choisir pour construire la figure pour que l'énoncé ci-dessus soit celui du théorème de Pythagore ? (*plus difficile)*

b. Que faudrait-il alors démontrer de plus pour démontrer le théorème de Pythagore ?

QUADRATURE D'UNE LUNULE

Figure 1

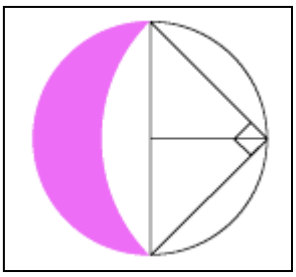


Figure 2

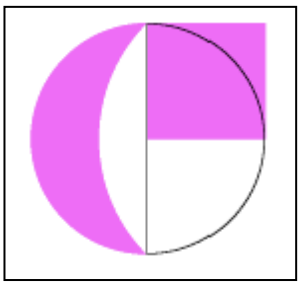


Figure 3

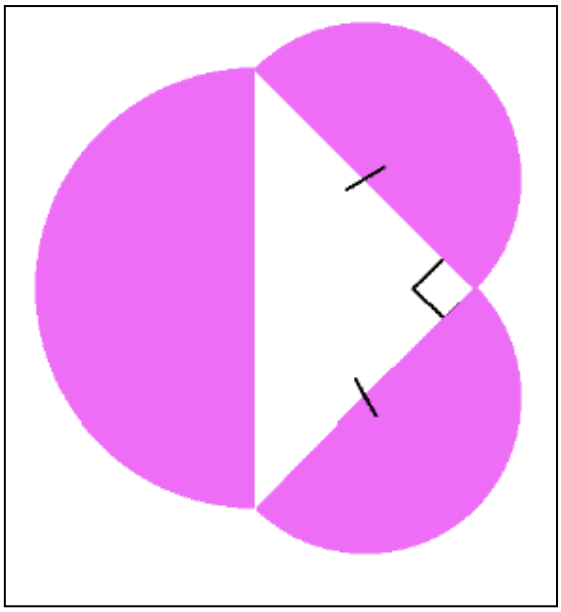


Figure 4

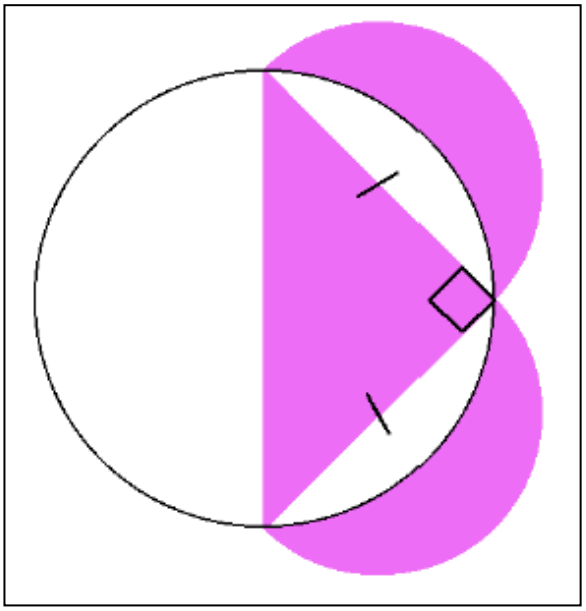
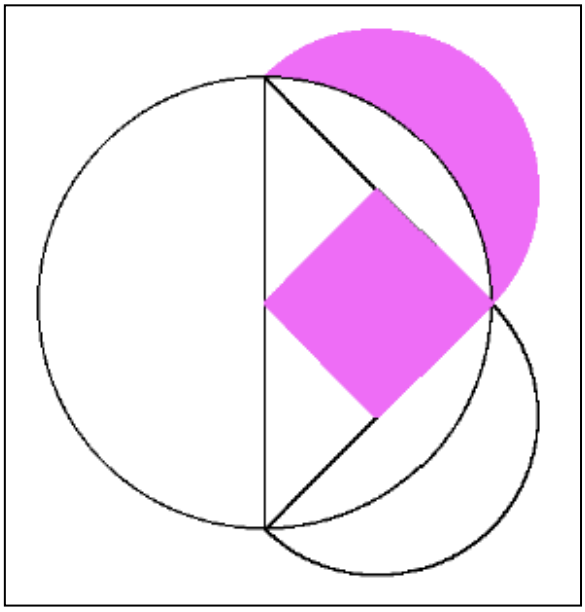


Figure 5



On considère la lunule (surface grisée) construite comme l'indique la Figure 1. On se propose de démontrer que son aire est égale à celle du carré construit Figure 2.

1. Sur la **Figure 3** démontrer que l'aire du demi-disque construit sur l'hypoténuse du triangle rectangle est égale à la somme des aires des deux demi-disque construits sur les côtés de l'angle droit.

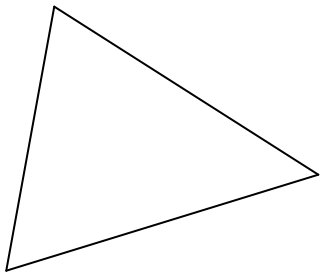
2. Sur la **Figure 4** démontrer que la somme des aires des deux lunules est égale à l'aire du triangle rectangle isocèle.

3. Sur la F**igure 5** démontrer que l'aire de la lunule grisée est égale à l'aire du carré grisé. Conclure

DES PROBLEMES OUVERTS

Niveau : certains exercices peuvent être résolus dès la sixième, voire en cycle 3, d'autres nécessitent des outils mis en place plus tard au collège.

Exercice 1

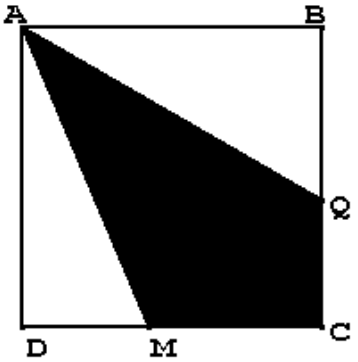


Tracer, sans utiliser une règle graduée, un carré de même périmètre que le triangle ci-contre

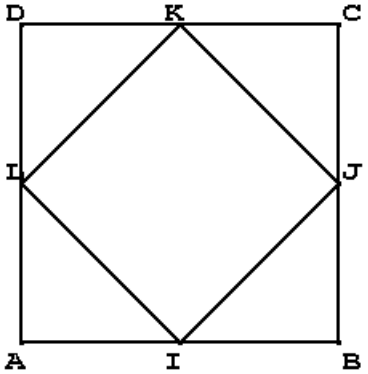
Commentaire : Suivant le niveau de classe (à l'école ou au collège) on pourra utiliser une règle non graduée, un guide-âne, une équerre, un compas.

Exercice 2

ABCD est un carré. M est un point du segment [DC] et Q est le point du segment [CB] tel que CQ = DM.
Démontrer que lorsque le point M varie sur le segment [DC] l'aire du quadrilatère AQCM est constante.



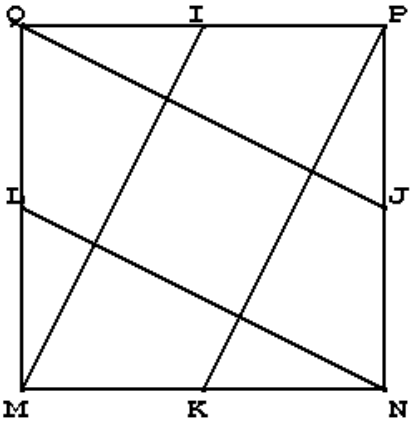
Exercice 3



ABCD est un carré ; I, J, K et L sont les milieux côtés.

1.a. Démontrer que IJKL est un carré et que ses diagonales sont parallèles deux à deux aux côtés du carré ABCD.
1.b. Comparer les aires des deux carrés.
2. Déduire de la question 1 la construction d'un carré ayant une aire égale au double de celle d'un carré donné.

Exercice 4

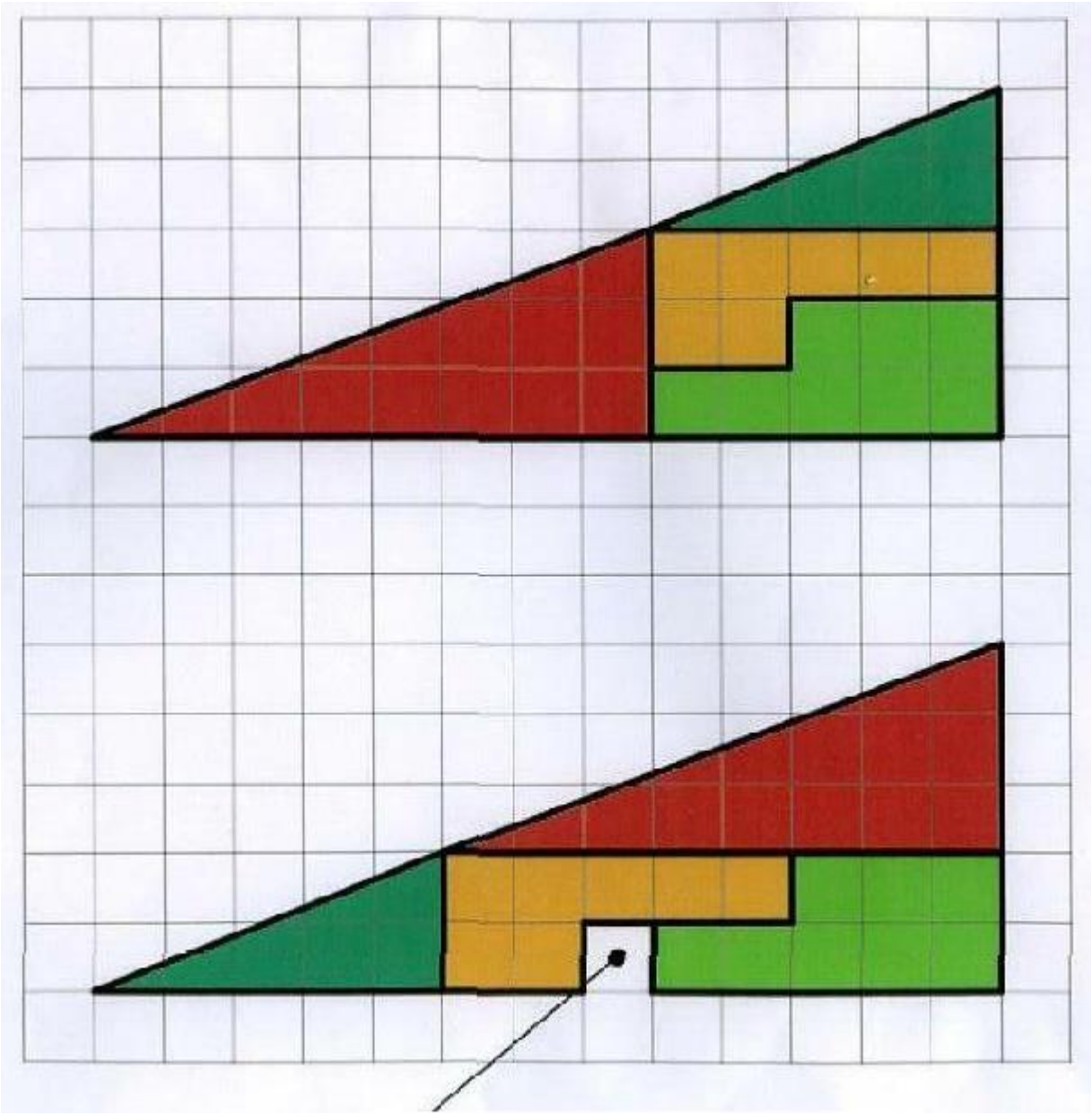


QPNM est un carré ; I, J, K et L sont les milieux côtés.

Démontrer que les différents segments tracés permettent de partager ce carré en cinq surfaces de même aire : un carré et quatre triangles rectangles.

Commentaire: exercice difficile lorsqu'on veut prouver rigoureusement qu'on a à faire à un carré et que les triangles rectangles ont même aire que lui.

COMMENT EST – CE POSSIBLE ?



D'où vient ce trou ?

On justifiera la réponse…….. rigoureusement !!!

DES RESSOURCES

La bibliographie qui suit reprend en partie la bibliographie ministérielle donnée dans la rubrique « Collège/Accompagnement/Mathématiques en classe relais » sur le cédérom *Mathématiques 2002* ou à l'adresse http://www.eduscol.education.fr/D0049/aire-perimetre.htm.

En effet, l'accompagnement des programmes officiels comporte plusieurs documents portant sur les notions d'aire et de périmètre. La richesse de ces textes, sur le plan mathématique, historique, épistémologique et didactique incite à une lecture attentive de tout enseignant de mathématiques.

Dans la partie « Collège », est présenté un dossier complet « Aire et périmètre », rédigé par le groupe national de réflexion sur l'enseignement des mathématiques en classe relais. Ce dossier comporte en particulier une bibliographie, des fiches d'activités (pour le professeur et pour les élèves) et 3 articles qui permettent d'accéder assez facilement aux difficultés sous-jacentes à l'enseignement de la notion d'aire.

Dans la partie « Lycée », figurent comme accompagnement du programme de seconde, plusieurs énoncés sur les aires. On pourra les trouver dans l'annexe 2 « A propos de géométrie plane », dans des problèmes définis explicitement comme des problèmes d'aire ainsi que dans des problèmes liés aux triangles semblables.

On pourra également lire les deux annexes au rapport de la commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques (dite commission « Kahane ») sur l'enseignement de la géométrie. La première, rédigée par D. Perrin, s'intitule « L'exemple de la géométrie affine » et cherche, sur le domaine qui nous intéresse ici, à expliciter les conceptions qui sous-tendent le travail présenté par la commission. A partir de la présentation du programme d'Erlangen, D Perrin insiste sur la notion d'invariant et développe ses implications actuelles dans l'enseignement de la géométrie.

Dans la liste de ressources données, et en perspective de l'application au collège des nouveaux programmes, ne figure aucune référence de manuels scolaires qui comporteront sans doute des activités à retenir. Les documents dont les références suivent sont majoritairement ceux que les différents membres du groupe ont eux-mêmes utilisés ou consultés.

Il ne s'agit pas de fournir ici une bibliographie complète sur la question, mais de proposer un certain nombre de références où le lecteur pourra :

- trouver matière pour illustrer ce thème par des situations pédagogiques
- alimenter sa curiosité personnelle.
- compléter sa formation d'un point de vue didactique

Des références diverses

A.P.M.E.P. , Bulletin n°402,Longueurs, aires et volumes,

A.P.M.E.P. , Bulletin n°444.2003, p72-75.
On y trouve notamment l'activité bien connue sur les puzzles « 64=65 »

A.P.M.E.P. , « Grandeur mesure », MOTS, TOME VI, Brochure n°46, 1982.
Cette brochure s'adresse aux enseignants du premier et du second degré. Elle s'intéresse à la place des grandeurs physiques dans l'enseignement des mathématiques, et en particulier de celle des longueurs, des aires et des volumes.

BOULE (F.), Questions sur la géométrie et son enseignement, Nathan, 2001.

CHAMONTIN (F.), en collaboration avec CAZIER (B.) et PICOT (M.), Des aires sans mesure à la mesure des aires, Repères IREM n°44, 2001, pp. 33-62.

CHARNAY (R.), COMBIER (G.), DUSSUC (M.-P.) « Cap maths » cycle 3, Hatier 2004. Deux ensembles de documents (manuel, fiches élèves à photocopier, dico, guide très détaillé pour l'enseignant) pour le CM1 et le CM2, très riches d'enseignements pour les professeurs de mathématiques de 6ème.

CLAPPONI (P.), "Activités géométriques au collège", Petit x, hors série, IREM de Grenoble, 1993.

COMBIER (G.) et PHILIPPON (M.), "Aire et périmètre", Le tour de l'aire en collège, IREM de Lyon, 1994.

DELEDICQ (A.) et RABA (R.), Le monde des pavages, ACL-Editions du kangourou, Paris, 1997.

DELEDICQ (A.), La gazette du COK Cadets n°1, ACL-Editions du kangourou, Paris, 2002.

FRIEDELMEYER (J. P.), Les aires : outil heuristique - outil démonstratif , Repères IREM n°31, 1998, p.39-62. Égalité d'aires sans passer par la mesure, utilisation des aires dans les démonstrations de géométrie, références historiques, activités pour les élèves de collège et de lycée.

Groupe Géométrie et arithmétique, Aires, IREM d'Aquitaine, Talence, 2000.

HARTSHORNE (R.) Geometry : Euclid and beyond, Springer, 2000. Ouvrage en anglais, faisant le point sur la question des aires : en repartant du point d'Euclide, l'auteur en met en évidence les prouesses et les défauts, et réussit à montrer comment Hilbert est parvenu à éliminer ces derniers. Le texte est facilement lisible au départ (pp. 40-45), et se complique un peu vers la fin (pp. 196-225). Contient toutes les démonstrations des résultats évoqués dans l'article de A. Pressiat.

KUZNIAK (A.), TAVEAU (C.) « l'aire en tant que grandeur », Travaux géométriques 6ème, Nathan Pédagogie, p. 106-109, cet ouvrage présente des activités pour la classe de 6ème, et à l'occasion de chacune, une réflexion approfondie, mais facile à lire, sur l'enseignement de la géométrie en début de collège ainsi que sur son articulation avec le cycle trois.

IREM de Limoges, Une année de sixième en mathématiques, CRDP du Limousin (1997, 1998)

STOLL (A.) Les lunules d'Hippocrate de Chio, Repères IREM n°31,1998, pp. 29-38.
Pistes d'activités pour la classe à partir de problèmes historiques. Utilisation de propriétés géométriques pour comparer des aires.

… et de nombreux numéros d'Hypercube ou de MATHS & malices, ACL-Editions, et de TANGENTE, Editions Archimède, sans oublier la revue REPERES-IREM, par exemple « quelques problèmes pour donner du sens » dans le n° 42, janvier 2001, « l'accès au littéral et à l'algébrique » dans le n° 34, janvier 1999, et les numéros PLOT de la nouvelle série, édités par l'A.P.M.E.P., comme le n°104, p17-20, « A propos du théorème de Pythagore », H. Plane, ou le n°105, p12-14, « Curvica », N. Toussaint et J. Fromentin.

Des résultats de recherche en didactique

DOUADY (R.), PERRIN-GLORIAN (M.-J.), «Mesure des longueurs et des aires », Brochure n°48, I.R.E.M. Université Paris 7, 1983

DOUADY (R.), PERRIN-GLORIAN (M.-J.), «Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane », Cahier de didactique des mathématiques n°37, I.R.E.M. Université Paris 7, 1987

PERRIN-GLORIAN (M.- J.), « L'aire et la mesure », Petit x, n° 24, 1989, p. 5 - 36.
Transposition didactique de la notion d'aire. Etude des programmes, des manuels, et des articles du bulletin de l'A.P.M.E.P. Choix didactiques pour une suite cohérente de situations d'enseignement.

MOREIRA-BALTAR (P.), « Difficultés rencontrées par des élèves de cinquième en ce qui concerne la dissociation aire - périmètre pour les rectangles », Petit x, n° 34, 1993, p. 5-29.
Les élèves développent de façon indépendante une conception géométrique et une conception numérique de l'aire sans les mettre en relation. Il y aurait deux niveaux dans la dissociation aire - périmètre : au premier niveau, l'élève accepte que des rectangles de même périmètre puissent avoir des aires différentes (et réciproquement) ; au deuxième niveau, l'élève accepte que l'aire et le périmètre peuvent varier dans des sens différents.

MOREIRA-BALTAR (P.), « A propos de l'apprentissage du concept d'aire », Petit x, n° 43, 1996, p. 43-68.
Article issu de la thèse de l'auteur. Etude des programmes de l'école et du collège, des évaluations nationales en début de 6ème et de l'APMEP en fin de 6ème et de 5ème. Les aires sont un point faible de chacune de ces évaluations, et l'évaluation de l'APMEP montre que ce thème discrimine les futurs redoublants (réussite divisée par 2). Revue des travaux antérieurs sur l'apprentissage de la notion d'aire, analysant les difficultés des élèves, et soulignant l'importance du travail dans le cadre géométrique, s'appuyant notamment sur le découpage - recollement et le pavage, qui sont des procédures disponibles en 6ème.

MOREIRA-BALTAR (P.), « Une étude de situations et d'invariants : outil pour l'analyse de la construction du concept d'aire au collège », Petit x n° 49, 1998, pp. 45 - 78.
Présentation d'un outil de classification des situations d'enseignement concernant le concept d'aire à partir de la prise en compte de trois cadres (géométrique, grandeurs, numérique) et des moyens de les mettre en relation. L'auteur met à profit des allers et retours entre l'analyse du concept du point de vue mathématique, des exercices tirés de manuels, des évaluations nationales, et des variables didactiques des différents types de situations.

PRESSIAT (A.), "Grandeurs et mesures : l'évolution des organisations mathématiques de référence, et problèmes de transposition", Actes de la XIe école d'été de didactique des mathématiques, 2001.
L'étude concerne la transposition des travaux mathématiques récents (XXe siècle) dans une perspective de formations des professeurs, sur les deux questions suivantes : aires et volumes d'une part, grandeurs dans le sens général (grandeurs - produits, grandeurs-quotients, …) d'autre part.

Quelques sites

Le site de l'APMEP : http://www.apmep.asso.fr
Site de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

Le site de l'ARDM : www.ardm.asso.fr/
Association pour la Recherche en Didactique des Mathématiques

Le site du CREAM : http://www.lille.iufm.fr/labo/cream/entree.html
Ce site est sur le portail de l'IUFM Nord-Pas-de-Calais et propose un certain nombre de situations d'enseignement, parmi lesquelles l'activité « 64 = 65 » qui est citée plus haut.

Le site Kangourou : http://www.mathkang.org (avec en particulier des animations)

Le site des Revues pédagogiques de la mission laïque Française (les aires comme outil de géométrie) : http://www.mission-laique.com/enseignants/pdf/math37/am37p25.pdf

Les aires en primaire : erreurs des élèves et proposition de progression :
http://www.instit.free.fr/pe1/maths/didaaire.htm

Utiliser un jeu avec les fractions (comparaison des fractions avec des aires) :
http://www.animath.fr/UE/fromentin99/Castelle-Cousin03.pdf