Jean Sauvy

Enseignement mathématique et psychologie de l'enfant

1. Les étapes de la formation de l'intelligence suivant Piaget et Wallon

Nous commençons dans le présent *Cahier* un exposé sur la psychologie de l'enfant qui se poursuivra sur plusieurs numéros.

Si les enseignants ne se refèrent pas plus souvent à cette discipline c'est, dans bien des cas, parce qu'ils n'ont pas eu l'occasion de prendre un contact un peu approfondi avec elle au cours de leurs propres études. C'est aussi parce qu'il n'y a pas *une* psychologie de l'enfant à laquelle tout le monde puisse se référer sans restriction comme on se refère, par exemple, à la physique ou à la mécanique.

Diverses écoles de psychologie de l'enfant se sont succédé depuis le début du siècle et on comprend l'embarras des non spécialistes face à des points de vue qui, parfois, divergent assez profondément.

Cette absence de consensus ne doit pas pourtant nous décourager. L'étude scientifique de la psychologie de l'enfant a en effet beaucoup progressé depuis la dernière guerre et les recherches faites ont conduit à un ensemble de résultats très largement reconnus comme solides et auxquels on peut se referer sans crainte.

En ce qui concerne l'enseignement des mathématiques, qui retient tout spécialement notre attention ici, c'est surtout le *problème du développement* de *l'intelligence* auquel il faut s'intéresser. Or, dans ce domaine, les recherches des deux grands maîtres de la psychologie contemporaine, Wallon et Piaget, n'aboutissent pas à des résultats très différents et il serait dommage de les ignorer.

Dans de précédentes publications, et notamment dans l'*Initiation à la mathématique de base*, nous nous sommes souvent référés aux travaux du Pr Jean Piaget. Dans la présente série nous voudrions reprendre de façon plus systématique la présentation de ces travaux en les complétant, ici et là, par les points de vue originaux propres à Wallon. Nous disposerons ainsi d'une sorte de tableau général du développement de l'intelligence de l'enfant, de sa naissance à l'adolescence, tableau qui devrait nous permettre de mieux situer les problèmes posés par l'enseignement de la mathématique aux jeunes enfants.

1. L'intelligence, qu'est-ce que c'est ?

Nous venons de parler d'intelligence. Le lecteur souhaiterait peut-être que nous précisions dès l'abord ce qu'il faut entendre par là. Nous ne le ferons pas car il y faudrait un livre et parce que ce n'est pas absolument nécessaire, le contenu du concept devant progressivement se préciser au cours des développements qui suivront.

Indiquons seulement, de façon très sommaire, que l'intelligence a pour fonction d'établir certaines catégories de relations entre l'individu, d'une part, et le monde extérieur, d'autre part. Ces relations, on peut les qualifier d'*objectives* pour les distinguer des relations *affectives* que le sujet établit avec ce même monde extérieur et notamment avec les autres personnes.

On qualifie aussi de « cognitives » les relations objectives parce qu'elles constituent la trame de la « connaissance » que l'individu acquiert du monde extérieur. La caractéristique principale de ces relations est de dépasser le vécu, de le capitaliser en quelque sorte après l'avoir dépouillé de l'inessentiel, le tenant prêt à être transposé aux situations du futur.

L'intelligence — dit Piaget — c'est ce qui nous permet de dépasser l'expérience en nous appuyant sur elle, c'est ce qui nous permet de nous *adapter* aux circonstances nouvelles.

2. *L'intelligence, quelque chose qui se fait*

L'intelligence n'est pas donnée à l'homme toute faite, prête à fonctionner.

Certes elle n'a d'existence que grâce à un support biologique adéquat propre à l'espèce humaine, mais cela ne suffit pas. L'intelligence se *construit* au fur et à mesure que l'enfant grandit. D'où l'intérêt d'aborder l'étude de l'intelligence de façon génétique.

C'est ce qu'a fait Piaget à partir de 1920 environ, aidé par la suite par un grand nombre de ses collaborateurs : B. Inhelder, A. Szeminska, P. Greco, A. Morf, B. Matalon, S. Papert, etc. C'est également ce qu'a fait Wallon entre les deux guerres.

L'étude génétique, basée sur l'observation attentive des enfants de tous âges depuis le nourrisson jusqu'à l'adolescent, montre que l'intelligence de l'enfant « se met en place » suivant un processus complexe au sein duquel on peut distinguer des *phases* ou *stades* assez bien caractérisés qu'on retrouve chez les différents sujets suivant un ordre et une chronologie suffisamment stables pour revêtir une valeur scientifique.

La pratique pédagogique des mathématiques élémentaires se doit de connaître ces phases et leurs caractéristiques pour pouvoir participer de la meilleure façon possible au développement intellectuel des enfants auxquels elle s'adresse.

Notre propos dans le présent article d'introduction est de présenter le tableau d'ensemble de ces phases, réservant à des articles particuliers ultérieurs le soin d'entrer quelque peu dans le détail des différentes phases.

3. *Le tableau général du développement de l'intelligence*

Si on se refère aux travaux de Piaget et de Wallon on peut découper la période pendant laquelle se construit l'intelligence de l'enfant en quatre grandes sous-périodes.

a) Une première sous-période qui s'étend de la naissance à deux ans environ se trouve un peu en marge de la construction même de l'intelligence. Elle nous retiendra peu étant donné qu'elle concerne les enfants qui ne fréquentent pas encore l'école.

b) La sous-période qui suit se prolonge jusqu'à 6-7 ans. La pensée de l'enfant commence progressivement à prendre corps, le langage se développe, le fonctionnement de l'intelligence devient perceptible. Il s'agit d'une *intelligence des situations*, essentiellement orientée vers le concret, mais qui porte déjà en elle les prémices de de l'intelligence pleinement développée de l'âge adulte.

L'étude de cette période nous retiendra un peu plus longuement car elle intéresse les enfants d'âges pré-scolaires et scolaires (maternelle et cours préparatoire).

c) La troisième sous-période s'étend de 6-7 ans à 11-13 ans et couvre sensiblement la période de la scolarité primaire. Elle voit, suivant Wallon, l'avènement de la *pensée catégorielle* et, suivant Piaget, l'apparition et le développement des *opérations concrètes réversibles.* Pendant cette période l'intelligence reste toujours orientée vers le concret, mais elle commence à pouvoir le dépasser et à pouvoir le transposer. Moins prisonnière des situations vécues et de leur perception, elle gagne en mobilité. C'est l'âge d'or des classifications, des mises en relation, des sériations, de la « construction du réel », dans ses aspects statiques et dynamiques.

L'enfant prend conscience qu'en dépit de diverses transformations, certaines propriétés des objets ou des ensembles d'objets demeurent invariantes. La définition des objets et leur classement logique deviennent possibles, ce qui inaugure la véritable connaissance.

Grâce à la mise en place des structures logiques de classes et de relations, l'enfant peut alors accéder aux nombres naturels — cardinaux et ordinaux — et aux opérations courantes auxquelles ils se prêtent. C'est donc à juste titre que sont introduits à ce moment-là l'enseignement du calcul et de l'arithmétique.

d) Vers 11 ou 12 ans, enfin, l'intelligence de l'enfant franchit une nouvelle et dernière étape. « L'outil intellectuel » a suffisamment acquis de mobilité et de liberté par rapport au réel pour devenir totalement opératoire. L'enfant commence à pouvoir raisonner sur des hypothèses (« si... alors »). C'est pourquoi Piaget donne à ce stade le nom d'*hypothético-déductif* ou stade des *opérations formelles.*

C'est aussi l'époque où l'enfant, en raison de sa maturation biologique et sociologique, est appelé à porter un intérêt croissant à son « monde intérieur » en même temps qu'il doit accroître la polyvalence de sa personnalité pour la rendre apte à la socialisation croissante que la vie exige de lui. Vue sous cet angle, cette période apparaît comme celle de la *formation de la personnalité.*

Tel est le tableau d'ensemble que nous avons tenu, malgré son schématisme, à présenter dans cette note introductive afin que par ce survol rapide le lecteur puisse découvrir l'ensemble du terrain qu'il sera invité à parcourir en petites étapes au cours des prochains mois.

(à suivre).

Actualité

Le nouveau film de François Truffaut, « L'enfant sauvage » intéressera les pédagogues pour qui le mouvement de réforme ne se limite pas à des changements de programmes. Ils trouveront aussi profit à lire le livre de Lucien Malson : « Les enfants sauvages », suivi de « Mémoire et rapport sur Victor de l'Aveyron » par Jean Itard. (Un livre de poche 10.18, n° 157).

Jean Sauvy

Enseignement mathématique et psychologie de l'enfant (suite)

2. Des premiers balbutiements de l'intelligence à l'intelligence pré-opératoire

Dans le présent article nous examinons les débuts du développement de l'intelligence de l'enfant en distinguant deux périodes, la première qui va jusqu'à 2/3 ans, la seconde qui se termine vers 6/7 ans.

1. Les premiers balbutiements de l'intelligence (jusqu'à 2/3 ans)

L'enfant ne dispose au cours de ses premiers mois d'existence que d'un embryon d'intelligence.

Piaget la qualifie d'*intelligence sensori-motrice* pour marquer qu'elle est dominée par la sensation et se manifeste par la motricité.

Il s'agit, pour le nourrisson, de s'adapter au monde qui l'entoure, un monde simplifié épuré, grâce aux interventions de son entourage.

Le nourrisson s'y adapte en mettant en place une série de schèmes sensori-moteurs qui sont enracinés dans le bagage de reflexes biologiques dont dispose l'espèce et qu'il exerce par des tatonnements indéfiniment répétés. Peu à peu ces schèmes sensori-moteurs s'articulent entre eux permettant progressivement à l'enfant de satisfaire par lui-même certains de ses besoins. C'est ainsi que l'enfant « apprend » à saisir, à porter à sa bouche, à écarter ce qui le gêne, à attirer l'attention sur lui en criant... Plus tard il s'exerce à ramper, à se dresser sur son séant puis sur ses pieds, enfin à marcher. Parallèlement, il se met à « reconnaître » les objets familiers, visage de la mère, biberon... Il élabore une première ébauche d'espace (ce qui est à portée de la main, ce qui n'y est pas), et de temps (avant, après) ; il apprécie ce qui, dans ses actions, est ou n'est pas efficace et, par là, commence à percevoir les relations de cause à effet.

C'est d'ailleurs dans les coordinations — encore sommaires — entre un « schème-but » et des « schèmes-moyens » que Piaget décèle les premières conduites pouvant être qualifiées d'intellectuelles. Ainsi l'enfant qui tire le tapis (schème-moyen) sur lequel se trouve un objet convoité qu'il ne peut saisir directement (schème-but), doit coordonner dans un ordre donné une série d'actes formant chaîne, dont chacun ne prend sens et efficacité qu'en raison de son appartenance à la chaîne entière.

On peut dire qu'il y a « conduite intelligente » à partir du moment où une coordination se met au service d'une intention qui ne pourrait être réalisée sans l'intervention d'une série d'actes coordonnés.

On trouve une conception analogue chez Wallon. Celui-ci parle des « constellations » de buts et de gestes associés que l'enfant déploie dans l'espace concret où il évolue. Il voit dans ces constellations les premières ébauches de « l'intelligence des situations » dont les conduites typiques à ce stade sont le *détour* (contourner l'obstacle) et la *conduite instrumentale* (se servir d'un objet en tant qu'intermédiaire pour atteindre un but).

La manipulation des objets et l'exploration de l'espace auxquelles se livre l'enfant se double d'une activité mentale spécifique à l'homme. Il s'agit de l'activité qui débouche sur la représentation (« image mentale »). Cette activité fournit vers 18 mois à l'enfant le matériau de sa pensée et permet le développement du langage.

Piaget, pour rendre compte du développement sommairement esquissé ci-dessus, fait intervenir un « modèle » explicatif auquel il attache la plus grande importance : le modèle dialectique assimilation/accomodation.

L'activité de l'enfant, estime Piaget, s'organise dans deux directions. Une première direction est celle de l'assimilation. Face au réel l'enfant s'efforce de faire entrer le réel dans les schèmes dont il dispose, quitte à le malmener quelque peu. Comme le réel résiste, l'enfant doit y adapter ses conduites, et par suite infléchir ses schèmes sensori-moteurs. C'est l'accomodation.

A ses débuts la pensée est essentiellement assimilatrice, et donc, déformante. L'accomodation à l'expérience reste superficielle. Elle est dominée par les apparences perceptives. En conquérant l'image, l'enfant fait un pas décisif dans son développement, mais il a, à ce stade, encore beaucoup de chemin à parcourir.

Il va y être considérablement aidé, dans la phase suivante, par sa maturation d'une part, et par les possibilités nouvelles que lui donnent sa mobilité (désormais il marche) et son langage (désormais il parle).

Retenons, avant d'aborder ce second stade, que, si on en croit les conclusions de la psychologie génétique, la pensée — d'apparition relativement tardive chez l'enfant — plonge ses racines dans l'activité corporelle des sujets.

C'est dire combien sont décisifs pour l'avenir de son intelligence les progrès qu'il accomplit à travers l'activité souvent débordante à laquelle il se livre alors. C'est dire aussi combien est important que lui soit donnée la possibilité de manipuler les objets les plus divers, de se déplacer, de ramper, de grimper, de se « frotter » au monde...

2. *La seconde enfance (2/3 - 6/7 ans) : l'intelligence pré-opératoire*

L'enfant, avons-nous vu, aborde cette phase de son développement avec une intelligence encore fruste mais qui dispose de deux atouts majeurs sous la forme d'un stock de schèmes sensori-moteurs bien garni et d'un matériau nouveau, souple et mobile, l'image mentale.

De plus, par le langage, qui progressivement va s'enrichissant dans le courant de la deuxième année d'existence de l'enfant, celui-ci dispose d'une sorte de « fixateur » d'images extrêmement précieux et d'un moyen pour communiquer avec autrui, ce qui lui ouvre l'accès à l'expérience accumulée par l'humanité.

L'enfant est ainsi prêt à accélérer son développement intellectuel.

Examinons succinctement sous quelle forme se fait ce développement intellectuel, en nous référant tour à tour à Piaget et à Wallon.

A. Piaget

Pour étudier ce problème du passage de l'intelligence sensori-motrice à l'intelligence conceptuelle, Piaget fait appel à son modèle explicatif habituel assimilation/accomodation.

Il suit pas à pas, dans les diverses manifestations actives et verbales de l'enfant, les modalités du processus d'assimilation et d'accomodation et examine comment ils se coordonnent entre eux et s'équilibrent.

Dans la phase actuelle Piaget constate que l'accomodation de l'enfant aux choses gagne progressivement du terrain, mais laisse subsister une large place à l'assimilation du réel au moi, assimilation qui se manifeste notamment à l'occasion des jeux d'imagination auxquels l'enfant se livre en abondance entre 3 et 6/7 ans.

a) L'assimilation du réel

Voyons d'abord l'assimilation du réel au moi.

Dans ce réel on peut distinguer, pour les besoins de l'exposé, différents niveaux. Il y a le niveau des *objets* eux-mêmes et de leurs représentations (images), c'est-à-dire le niveau des « choses » disposant, de par leurs propriétés, d'une individualité qui se conserve à travers le temps et l'espace.

Il y a le niveau des *ensembles d'objets* dont la représentation donne lieu à des sortes de constellations manifestant les relations spatiales existant entre les divers objets de l'ensemble.

Il y a le niveau des *actions,* c'est-à-dire des interventions qui ont pour conséquence de modifier les objets et, plus encore, les constellations d'objets.

A l'étage supérieur — si l'on peut dire — englobant les précédents, il y a le niveau des *lois d'organisation* du réel, lois immatérielles et invisibles mais toutes puissantes, car elles commandent à l'articulation des divers domaines du réel.

Ce réel, l'enfant le construit, le découvre, au fur et à mesure qu'il s'accommode à sa complexité. Mais pour y arriver il commence par l'assimiler.

Ainsi l'*objet,* au commencement de l'expérience enfantine, n'est pas considéré comme indépendant du sujet qui a affaire à lui. Il n'a d'existence que par rapport au sujet et les images auxquelles il donne naissance « dans le cerveau » de l'enfant ne sont pas totalement fixées ; elles restent floues et labiles.

Il en est de même, naturellement, pour les mots servant à les désigner. Ainsi un même mot peut-il être employé pour désigner l'objet visé ou pour évoquer un certain domaine de la réalité associé audit objet. Piaget cite le terme de « panana » employé par un jeune enfant pour désigner tantôt son grand-père, tantôt le désir de recevoir un cadeau (comme en fait le grand père en question).

Passons aux *ensembles d'objets* et aux constellations d'images qui leurs sont associées. Selon le point de vue des adultes, de tels ensembles sont caractérisés par un réseau de relations invariantes : par exemple telle table reste à l'intérieur de la pièce où je suis même quand je la déplace d'un coin à un autre, la chaise reste plus petite que la table même si je la place sur cette dernière, la porte reste porte qu'elle soit ouverte ou fermée...

Mais l'enfant ignore plus ou moins ces invariants. Les images successives d'une configuration changeante ne sont pas considérées comme les diverses représentations d'un ensemble doué d'une existence propre. Ce sont autant de tableaux indépendants dont chacun chasse l'autre et dont les caractéristiques évoluent en fonction de l'état d'esprit de l'enfant. Il n'est que de voir combien les dessins « représentatifs » exécutés par les jeunes enfants déforment la réalité pour comprendre comment joue dans ce cas le processus d'assimilation du réel au moi.

On rencontre une situation du même genre à propos des *actions,* ainsi que de *l'espace* et du *temps* où se déploient ces actions.

Les actions, comme les objets, sont vues par le jeune enfant à travers sa perception du moment et elles sont dominées par elle. Les schémas imagés auxquels elles donnent naissance « dans l'intelligence » de l'enfant ne sauraient donc s'articuler les uns aux autres pour former des unités englobantes cohérentes. L'espace n'est pas perçu comme un « contenant » universel doué de ses propriétés propres indépendantes du sujet. Il est perçu comme le lieu « ici et maintenant » où s'actualise tel ou tel schéma perceptif ou moteur.

Le temps, lui aussi, ne donne pas naissance à une représentation homogène. C'est un temps subjectif, lié aux actes et aux sentiments du sujet. L'image d'hier et l'image d'avant-hier ne sont pas forcément distinguées et aujourd'hui ça peut être déjà demain si demain des cadeaux doivent être distribués...

L'étude des *premiers raisonnements* de l'enfant nous apporte d'autres informations sur la façon dont le jeune enfant perçoit le réel.

Voici l'un d'eux qui parle de « la limace » pour désigner un animal semblable à un autre animal qu'il a rencontré quelques instants plus tôt dans un coin différent du jardin.

Est-ce le même animal que tout à l'heure, est-ce un animal de même espèce ? L'enfant ne sait le dire car il n'y a pas pour lui d'une part l'individu invariant (cette limace-ci), d'autre part une catégorie abstraite formée par tous les animaux semblables dont cette limace-ci serait un représentant.

C'est pourquoi Piaget parle de « préconcept » à ce propos, remarquant qu'à ce niveau d'âge — disons avant 5 ans — l'enfant ne parvient parfaitement ni à l'individualité vraie, ni à la généralité totale.

Il ne parvient pas non plus aux inférences qui procèdent du singulier au général (l'induction) ou aux inférences qui procèdent du général au singulier (déduction).

Il doit se contenter d'une coordination sommaire entre diverses images ressenties comme apparentées ou comme idoines à être mises en correspondance.

Piaget baptise le raisonnement fruste dont est capable l'enfant après qu'il a commencé à parler, de raisonnement par « *transduction* ». Celle-ci reste marquée par la prééminence de l'assimilation sur l'accommodation, marquée par la centration sur le sujet lui-même. En voici un exemple.

Une petite fille de 2 ans 6 mois, à laquelle on promet une grande bicyclette quand elle sera grande, répond « non, une petite, parce que moi, je suis pas grande ». L'enfant se sait petite et ramène les choses — même les choses imaginées, même les choses de l'avenir — à cette petitesse du moment dont elle ne peut se détacher.

C'est à cela que Piaget se réfère quand il parle de l'*égocentrisme de l'enfant,* voulant marquer par ce terme la tendance que manifeste l'enfant de 2 à 4 ans 6 mois de ramener l'univers à lui-même.

Cependant le primat de l'assimilation sur l'accommodation ne va pas sans soulever de difficultés dans les rapports que l'enfant noue ou cherche à nouer avec le monde réel et avec les adultes. C'est pourquoi, à cet âge, il se réfugie si volontiers dans la fiction, passant de nombreuses heures à jouer à des jeux d'imagination où il ne se heurte pas perpétuellement à la résistance des choses et des personnes. Mais, parallèlement, il se trouve contraint d'évoluer et on constate en l'observant que le processus d'accommodation au réel prend progressivement de l'importance.

b) L'accommodation au réel

Cette accommodation appelée par le besoin croissant d'intégration de l'enfant à des situations de plus en plus variées, est rendue possible par la maturation de l'individu, par l'accumulation d'expériences successives, par l'aide qu'apporte le langage.

A mesure que l'enfant prend de l'âge, et spécialement à partir de 4 ans/4 ans et demi, l'image de l'objet gagne en netteté et en permanence parce qu'elle échappe de plus en plus à l'emprise de la vie propre de l'enfant.

L'objet ainsi s'individualise et avec lui le nom propre servant à le désigner.

De même la « pré-classe » gagne en généralité et s'achemine vers le statut de classe, ce qui permet au nom commun de se fixer lui aussi. Par exemple, le « papa de Jacques » est bien distingué du « papa de Pierre ». Mais les deux sont considérés comme des « papas » et ceux-ci, à leur tour, sont distingués des « mamans » ou des « enfants ».

Ces premières classifications spontanées marquent un progrès considérable car elles manifestent le recul de la centration qui précédemment dominait. L'enfant de 4/5 ans arrive à changer rapidement de point de vue, sans perdre le souvenir du point de vue précédent. Il peut ainsi mettre en correspondance les images individuelles d'un ensemble donné et ces dernières avec l'image du tout et percevoir ainsi des relations qui, sans cela, ne se seraient point manifestées à lui.

Voici ce que Piaget dit à ce sujet :

« ...si tel est le point de départ de la pensée représentative, il est clair que ces processus initiaux ne trouveront leur équilibre que dans la direction de la décentration. Une pensée centrée sur un objet auquel elle assimile les autres ne saurait être en équilibre, tandis qu'en lui attribuant à tour de rôle une égale valeur, l'assimilation réciproque naissant de cette décentration aboutit à un équilibre stable entre les données actuelles et antérieures, l'accommodation à tous les éléments (actuels comme antérieurs) résultant de cette même décentration, maintient alors leur différenciation et l'assimilation réciproque qui les réunit conduit par conséquent à l'élaboration de schèmes à la fois généraux et abstraits, c'est-à-dire de concepts prenant la forme de classes ou de relations. La décentration a ainsi pour résultat un équilibre entre l'assimilation et l'accommodation » (1).

Le recul de l'égocentrisme de l'enfant se manifeste également au niveau de ses dessins. Dans ceux-ci, les « fantaisies » si fréquentes dans la période antérieure — et qui donnent souvent tant de « fraîcheur » aux œuvres des enfants d'âge pré-scolaire — s'estompent quelque peu : les dessins représentatifs se conforment de mieux en mieux aux modèles, les dispositions respectives des éléments entre eux et les proportions sont moins négligées.

Même préoccupation dans les jeux qui s'éloignent assez fréquemment de la fiction pure afin de mieux « coller à la réalité ». Tel bout de bois ne peut plus représenter aux yeux de l'enfant tel animal ou tel personnage de son choix comme

---

(1) Piaget : *La formation du symbole chez l'enfant*, Delachaux et Niestlé, 4e édition, p. 257.

c'était le cas quelques mois plus tôt. L'enfant apprécie les jouets qui ressemblent aux objets vrais : poupées, modèles réduits de voiture, etc... C'est l'époque des jeux de construction, des jeux de dinette, des jeux de poupées, des jeux de circulation qui s'efforcent d'imiter plus ou moins fidèlement la réalité du monde des grands.

De même encore pour le langage qui s'enrichit de nouveaux termes et qui surtout gagne en cohérence logique.

c) De l'intelligence sensori-motrice à la représentation cognitive

Le tableau succinct à deux volets qui vient d'être tracé fait apparaître une modification dans la part respective de l'assimilation et de l'accommodation au fur et à mesure que l'enfant prend de l'âge.

Cette modification étant très progressive et n'adoptant pas forcément exactement la même allure dans les divers domaines de la vie de l'enfant, se trouve mieux mise en évidence si on mesure le chemin parcouru entre le départ et l'arrivée de la phase sous revue.

On est alors conduit à mettre en évidence quatre différences fondamentales entre l'intelligence sensori-motrice du stade précédent et l'intelligence conceptuelle qui s'amorce à la fin du stade actuel.

1° Les connexions établies par l'intelligence sensori-motrice ne parviennent à relier que des perceptions et mouvements successifs *sans une représentation d'ensemble* qui domine les états successifs des actions ainsi organisées et qui les réfléchisse en un tableau total et simultané.

2° L'intelligence sensori-motrice tend à la réussite et non à la vérité : elle trouve sa satisfaction dans l'arrivée au but pratique et non dans l'explication. C'est une intelligence vécue et non pensée.

3° Cette intelligence travaille sur les réalités elles-mêmes et non pas sur les signes, symboles et schèmes représentatifs qui s'y rapportent.

4° Elle est donc essentiellement individuelle, par opposition aux enrichissements sociaux rendus possibles grâce à l'emploi des signes.

Ces différences étant marquées, on voit mieux en quoi consistent les acquisitions de l'intelligence de l'enfant entre 2 et 6 ans. On voit d'abord une accélération générale au sein d'un ensemble d'actions successives qui permet d'en transcender l'émiettement et de les faire apparaître comme un tout avec ses cohérences propres.

L'intelligence se trouve ainsi à même de « prendre conscience » qu'elle a affaire à un tout, dont elle peut parcourir les parties dans les deux sens, et qui fait apparaître des sériations et des classements hiérarchiques.

L'intelligence recourt d'autre part aux signes dont le système se surajoutant au système des actions, permet la construction des concepts généraux nécessaires aux classifications et aux sériations mentionnées à l'instant.

Enfin la socialisation qui accompagne l'emploi des signes donne à l'enfant la possibilité d'insérer sa pensée individuelle dans la réalité objective et commune.

Tels sont, selon Piaget, les voies et les moyens qu'emprunte l'enfant, entre 2 et 6 ans, pour faire passer son intelligence du niveau sensori-moteur au niveau pré-opératoire.

(*à suivre*)

Jean Sauvy

Enseignement mathématique et psychologie de l'enfant (*)

B. Wallon

Le psychologue Henri Wallon, se plaçant également dans une perspective génétique, a étudié le passage de l'intelligence sensori-motrice ou intelligence pratique en œuvre au cours des premières années d'existence à l'intelligence pré-opératoire qui se caractérise par la *pensée catégorielle* et qui apparaît vers l'âge de 6/7 ans.

Ce stade de 3 à 6 ans trouve ses caractères principaux au niveau global de la personnalité de l'enfant, selon Wallon, plus qu'au niveau de son intelligence. C'est qu'en effet, à ce moment-là, l'enfant prend progressivement conscience de l'existence de son corps en tant qu' « objet » distinct des autres objets de l'environnement, prend conscience qu'il est une personne parmi d'autres, affirme l'autonomie naissante de son « moi » en s'opposant aux « autres ».

Sur le plan intellectuel, il construit à partir de l'espace perceptif un *espace mental* où peuvent jouer et se consteller les représentations des choses (images mentales).

a) " Construction " des objets

Un objet déterminé n'apparaît pas sous forme d'élément isolé aux yeux du très jeune enfant mais comme élément participant à des tableaux d'ensemble, élément qui n'a d'intérêt — et donc de réalité — qu'en raison du rôle actuel qu'il joue dans le tableau dont il fait partie.

Un objet ne devient identifiable que par la réapparition, dans des tableaux divers, d'un faisceau de « qualités » qui semblent graviter autour d'un foyer commun : l'objet, et qui diffère d'autres faisceaux de « qualités » émanant d'autres foyers.

Pour identifier ainsi des faisceaux ou constellations de qualités, l'esprit doit procéder à une sorte de tri. Dans l'extraordinaire richesse des sensations associées à un objet, l'esprit ne porte attention que sur quelques-unes d'entre elles, concernant par exemple la forme, la couleur, la taille, ... et c'est avec elles qu'il construit l'image mentale associée à tel ou tel objet.

A propos de ces images, Wallon insiste sur le fait qu'elles n'existent, comme d'ailleurs les sensations, qu'en tant que parties d'un ensemble, en tant qu'éléments d'une structure qui les englobe. « Une couleur — écrit Wallon — est perçue par contraste sur un fond neutre; deux couleurs sont différenciées en raison du rapport

(*) Le début de cette étude a paru dans les *Cahiers* 9 et 10.

qui en fait une structure unique. D'abord tranché, grossier, le contraste s'affine progressivement, sous l'influence de la maturation fonctionnelle selon Koffka, et aussi de l'exercice, de l'expérience » (H. Wallon, *De l'acte à la pensée*, Flammarion 1942).

Dans l'ensemble des objets qui peuvent être ainsi dégagés du magma initialement indifférencié des perceptions de tous ordres, le corps propre de l'enfant occupe une place de choix et son individualisation s'amorce dès la seconde année d'existence de l'enfant.

Mais c'est seulement à partir de trois ans « que l'enfant commence à se conduire et à se connaître en sujet distinct d'autrui » (*Les origines du caractère chez l'enfant. Les préludes du sentiment de personnalité.* P.U.F. 1934).

Cette découverte merveilleuse une fois faite, l'enfant se met à l'explorer avidement au moyen d'expériences, d'exercices et de jeux d'imagination. Dans ces jeux, il s'attribue successivement le rôle de sujet et d'objet, s'amuse à alterner le « moi » et le « tu », approfondit la différence entre le « faire » et le « subir », entre l'actif et le passif.

b) Affirmation de l'autonomie du " moi "

Dans la vie réelle, c'est-à-dire dans les circonstances qui ne se laissent pas manipuler librement par l'imagination, la construction du jeune « moi » se heurte à de multiples résistances et cela d'autant plus que le désir d'autonomie ne peut encore s'appuyer sur des moyens adéquats. D'où les affrontements de l'enfant avec son entourage, si fréquents à cet âge, quand ce dernier refuse de se plier à toutes les « fantaisies » de l'enfant. Ces heurts sont essentiels pour que la personnalité naissante se délimite et pour que l'enfant trouve sa place dans la constellation des autres personnes, dans la famille de l'enfant tout spécialement.

c) Progrès intellectuels

La connaissance du réel, d'une part, qui s'appuie sur la « construction » mentale des objets, l'affirmation de la personne, d'autre part, qui s'actualise dans une multiplicité de liens sociaux, s'appuient l'une et l'autre sur le langage et s'expriment très largement grâce à lui.

Le rôle du langage, selon Wallon, ne doit pas être sous-estimé.

En effet, les images mentales mentionnées plus haut, pour devenir le matériau mobile et souple de la pensée, doivent se trouver prolongées, identifiées, par les mots que la langue maternelle met à la disposition de l'enfant.

Entre 3 et 6 ans se multiplient les appareillements deux à deux entre les « objets-images » qu'élabore l'enfant et les mots pouvant les désigner. Ces appareillements, l'enfant les établit par la pratique de la langue, utilisant d'abord les mots « au petit bonheur » mais ajustant progressivement ses choix pour finalement établir un réseau solide de correspondances signifiant-signifié.

Wallon a longuement étudié ce processus d'appareillement en interrogeant des enfants de 5 ans 1/2 à 9 ans. Les renseignements recueillis lui ont servi à élaborer son ouvrage de 1945 sur *les origines de la pensée chez l'enfant.*

C'est à cette occasion que Wallon a découvert l'importance du « couple » comme *structure élémentaire de la pensée*, structure qu'on peut déceler dès le stade (3-6 ans) que nous examinons actuellement.

Le couple, écrit Wallon « c'est une sorte de molécule intellectuelle où s'enferme l'acte de pensée sous sa forme la plus simple et la plus indifférenciée. Un seul et même objet ne saurait être pensé sinon par dédoublement. La tautologie A est A, qui n'ajoute rien à la connaissance de l'objet, est pourtant indispensable à sa prise de conscience comme objet. Sur le plan de la pensée, le couple est antérieur à l'objet isolé. Celui-ci ne peut exister qu'à travers celui-là ». (H. Wallon : *Les origines de la pensée chez l'enfant*, P.U.F. 1963, p. 115).

Les couples en acte dans la pensée du jeune enfant ont le double caractère de tout couple : le caractère d'*unité* propre à ce qui apparaît comme lié, comme formant un tout, le caractère de *diversité* résultant du dédoublement de cette unité en termes distingués.

C'est sans doute à ce double caractère que la pensée doit sa possibilité d'être. Elle peut en effet, grâce au couple, maintenir l'essentiel de l'unité que présente tout fragment de la réalité et, en même temps, elle peut concevoir et exprimer cette réalité en des *moments successifs distincts* comme l'exigent une pensée et un langage qui ont besoin de durée pour prendre corps et se dérouler.

Le couple se trouve ainsi au cœur même de la pensée relationnelle et des mises en correspondance terme à terme qui permettent à la pensée de « mettre de l'ordre » et de placer des points de repère dans un réel mouvant et indifférencié qui, sans cela, échapperait à toute connaissance.

Le couple notamment intervient dans le processus intellectuel qui conduit à la « construction » des catégories, catégories dont a besoin la pensée pour classer les fruits des expériences successives du sujet, les relier aux enseignements des expériences d'autrui, les rendre disponibles pour des utilisations ultérieures. Par le processus de l'appareillement deux objets distincts se trouvent rapprochés et identifiés comme se ressemblant sous l'angle de telle ou telle de leurs propriétés communes. De proche en proche, par « agrafages » successifs de couples, peuvent se constituer, des chaînes d'objets se ressemblant et se fondant en une catégorie unique alors même qu'ils conservent — sous-jacente — leur individualité.

Mais aux âges considérés, de tels agrafages systématiques ne sont encore guère possibles. La pensée se contente d'associer les couples en constellations très largement instables car elles restent sous la dominance des perceptions et des intérêts du moment.

Aussi l'activité intellectuelle correspondante se caractérise-t-elle par ce que Wallon appelle le *syncrétisme*, c'est-à-dire un mode de connaissance qui se contente d'approximation et agglutine en un tout confus aussi bien les divers aspects de la réalité que ce qu'y surajoute la sensibilité de l'enfant. Le syncrétisme, précise Wallon, traduit « l'impuissance de l'enfant à utiliser les catégories mentales qui permettent d'unir ou de distinguer, afin de les ordonner entre elles, les données de l'expérience, et par là de construire les choses pour les substituer à nos péripéties subjectives, d'où elles sortent ».

En conclusion, le « stade du personnalisme » apporte à l'enfant, au niveau de la pensée, un certain nombre de moyens lui permettant de dresser du réel un tableau schématique qui commence à être pensé et non seulement vécu. Ces moyens tiennent en puissance des possibilités considérables qui ne s'actualiseront pleinement que plus tard. En ce sens le stade sous-revue apparaît comme une étape relativement bien marquée, au niveau de l'affectivité comme à celui de l'intelligence.

C. Conclusion concernant le stade 2 /3-6 /7 ans.

Après avoir très sommairement résumé les caractéristiques du stade de l'intelligence intuitive (Piaget) ou de l'intelligence pré-catégorielle (Wallon), nous devons nous demander si les conceptions de ces deux auteurs sont compatibles et si elles permettent de tirer des enseignements pour la pratique de la pédagogie des mathématiques à ce niveau.

a) Les tranches d'âge correspondant aux stades considérés par Piaget et Wallon sont sensiblement les mêmes. La limite supérieure commune se situe vers 6 /7 ans, c'est-à-dire au début de la scolarité obligatoire dans la plupart des pays du monde.

Les descriptions du fonctionnement de l'intelligence à ces âges sont également très voisines chez les deux auteurs bien que les formulations ne coïncident pas toujours.

Par exemple, la parenté est évidente entre ce que vise Piaget qand il parle de raisonnement par « transduction » et ce à quoi fait allusion Wallon quand il décrit le fonctionnement de la pensée par « couples ».

De même les modes de pensée par « centration sur le moi et assimilation du réel au moi » décrits par Piaget trouvent un homologue fidèle dans les modes de pensée décrits par Wallon sous le nom de « pensée syncrétique ».

De même encore les deux auteurs insistent sur l'importance des jeux d'imitation et de fiction dans la vie intellectuelle de l'enfant au cours du stade considéré.

b) La concordance est donc grande en ce qui concerne le « contenu » même de ce stade de développement de l'intelligence. On ne saurait s'en étonner quand on connaît la rigueur scientifique et l'abondance des observations recueillies aussi bien par Wallon que par Piaget.

Si des divergences existent, elles apparaissent au niveau des interprétations que les deux auteurs ont été amenés à donner de leurs observations.

Piaget s'appuie sur un mécanisme très général d'accommodation/assimilation qui ne pouvait que séduire le biologiste qu'il était à l'origine.

Wallon, qui s'était intéressé particulièrement aux anormaux, quand il veut expliquer la genèse de l'intelligence, tient grand compte de l'évolution concomitante de l'affectivité et s'intéresse au « tout » de la personnalité. Il attribue un rôle essentiel, dans le développement de l'intelligence, à la maturation (croissance du corps, du système endocrinien et surtout du système nerveux) et au langage.

En outre Wallon insiste sur le caractère dialectique, contradictoire et parfois conflictuel du développement de l'intelligence de l'enfant comme de celui de son affectivité. Par exemple l'image mentale que vient de conquérir l'enfant se révèle rapidement impropre à traduire la complexité du réel en raison de sa fixité et de son schématisme; le premier bagage de mots et d'expressions verbales dont dispose l'enfant, si utile pour se faire entendre d'autrui, ne transmet souvent qu'un reflet appauvri de ce qu'il souhaiterait communiquer; les « couples élémentaires », s'ils jettent des ponts entre tels et tels aspects de la réalité, forment en même temps des îlots plus ou moins fermés sur eux-mêmes qui mettent en miettes cette réalité.

c) On ne saurait donc nier les différences de conception de nos deux auteurs. Il ne s'agit toutefois pas de divergences radicales. On sait d'ailleurs que les hommes s'en sont expliqué et qu'ils ont chacun tenu compte de ce que leur collègue apportait à la connaissance de la psychologie enfantine.

Notre propos n'est pas ici de revenir sur des controverses largement dépassées (*).

(*) Le lecteur intéressé en trouvera des échos dans l'ouvrage érudit de Tran-Thong « *Stades et concept de stade de développement de l'enfant dans la psychologie contemporaine* », Vrin, Paris 1967.

Il nous suffira de retenir que les deux psychologues réputés ont considéré comme possible et utile de délimiter dans le processus de développement affectif et intellectuel de l'enfant un stade entre 2/3 et 6/7 ans qui présente des caractéristiques propres.

L'enfant dispose alors de l'autonomie de déplacement, de la représentation et du langage, ce qui lui permet de multiplier les relations vécues avec les autres êtres et le monde et d'élaborer un modèle représentatif de la réalité encore fruste et inadéquat mais déjà très utile pour dépasser le vécu immédiat, prévoir les conséquences de certains actes et faire face à des situations non encore rencontrées.

Ce modèle intelligible de la réalité, il l'élabore à travers son expérience quotidienne, ses jeux d'imagination, de construction, d'imitation, à travers les exercices auxquels il se livre généreusement et à travers les questions qu'il ne se lasse de poser.

Vu sous un certain angle ce stade apparaît comme un stade d'apprentissage intense, le mot « apprentissage » étant pris dans son sens d' « essai », de « première expérience ». C'est un apprentissage de tous les moments. L'enfant a tout à découvrir. Son appétit d'apprendre est insatiable et il tend à le satisfaire par toutes les voies qui s'offrent à lui, si bien qu'il souhaite « aller à l'école » beaucoup plus ardemment qu'en toute autre période de sa vie. La dernière année de Maternelle, ainsi que la première année du Primaire, se situent précisément vers la fin du stade en question, en attendant que s'ouvre le stade suivant qui verra un nouvel épanouissement des capacités intellectuelles.

Nous nous proposons dans le chapitre suivant d'examiner, notamment à la lumière des travaux de Wallon et Piaget résumés ci-dessus, quel rôle peut jouer et quelles formes peut prendre l'enseignement des mathématiques au cours de ces premières années de fréquentation de l'école.

3. L'enseignement pré-mathématique au cours du stade pré-opératoire ou intuitif (2-3 à 6-7 ans).

A. — *Les principaux domaines d'intervention de la mathématique*

Pour déterminer le rôle de l'enseignement mathématique au cours des premières années de fréquentation de l'école (Maternelle et Cours Préparatoire) nous devons tenir le plus grand compte des *champs d'intérêt des enfants* et de leurs *possibilités intellectuelles* aux âges considérés, tels qu'ils nous sont apparus à travers les considérations développées précédemment.

a) Nous avons vu que le problème de la *représentation* (ou des images mentales) occupait une place centrale dans le processus de formation de l'intelligence des enfants de cette tranche d'âge. Or l'activité de représentation s'analyse à certains égards comme une *mise en correspondance terme à terme* entre ce qui doit être représenté et ce qui le représente, entre l'objet et son image mentale, entre le signifiant et le signifié correspondant, entre « la chose » et le mot.

Il s'agit là d'un processus *actif*, *dialectique* et *unitaire*.

Le processus est *actif* car il se développe comme une construction dans laquelle l'enfant s'applique tout entier.

Le processus est *dialectique* en ce sens que l'objet ne se constitue pas indépendamment de l'image et l'image indépendamment de l'objet : l'un et l'autre prennent corps, par ajustements successifs, en s'appuyant l'un sur l'autre comme les arguments d'un dialogue contradictoire. Pour le très jeune enfant, nous l'avons vu, telle « table » qui fait partie de son univers familier n'est pas, au début, un objet au sens où nous l'entendons. Il la découvre sous les aspects très particuliers qui retiennent son attention : en tant que « quelque-chose-de-dur » quand il la heurte, en tant que « quelque-chose-à-gravir » s'il s'exerce à grimper, etc. La table ne devient « objet » pouvant être identifié, reconnu, remémoré, qu'à partir du moment où, précisément, elle se trouve doublée d'une image mentale « abstraite » et stable que le besoin de communication incite à construire et que le langage contribue à fixer.

Ce processus est donc *unitaire*, au sens où l'on parle de l'*unité d'un couple*, alors même qu'on distingue en son sein la diversité de deux éléments isolément repérables.

b) Aux âges considérés, par ailleurs, l'enfant construit un réseau de relations avec les autres êtres et avec les choses, réseau dont il occupe le centre. Des relations binaires se construisent à cette occasion, mettant chaque fois en correspondance le sujet et quelque chose d'autre : telle personne — la mère, un frère, un camarade... — ou encore tel ou tel objet, poupée, balle, etc. qu'il s'agit de prendre, de donner, de lancer, etc.

Dès 3 ans on voit apparaître dans la conversation de l'enfant des expressions relationnelles conformes au modèle général « sujet - verbe - objet ». Autrement dit la « pensée par couple » dont Wallon a souligné l'importance aux âges considérés se prolonge en une « pensée de relation », c'est-à-dire en une pensée par triplet du type a - R - b.

Dans un tel triplet, entre les termes a et b formant couple — à l'état inerte en quelque sorte — s'insère un lien relationnel qui marque la façon dont les éléments du couple sont « rapprochés », « soudés », dans les faits ou dans l'action et, parallèlement, dans la pensée de l'enfant.

Ainsi, quand l'enfant de 3 ans, voyant son grand frère jouer au ballon, dit : « moi, moi », il manifeste par là, de façon elliptique, le désir de taper dans le ballon comme le fait son frère. Le réseau de relation mentionné à l'instant peut se schématiser comme suit :

Situation vue par l'enfant	frère	→	ballon
Situation souhaitée par l'enfant	enfant (sujet)	→	ballon
		R	

où R = « donne des coups de pied au ».

c) Parmi les relations que l'enfant établit avec son entourage et son milieu de vie, beaucoup se rattachent aux *relations spatiales* et concernent la façon dont l'*enfant se situe dans l'espace* par référence à tout ce qui « meuble » les lieux où il évolue.

Par la pratique quotidienne de ces mises en relation, l'enfant — comme l'ont admirablement montré Piaget et ses élèves — est amené à construire progressivement l'espace intelligible qui, avec le *temps* et la *causalité*, servent de toile de fond à sa vie intellectuelle.

B. *L'apport mathématique dans chacun de ces domaines*

Après ce qui vient d'être dit, on pressent quelles branches de la mathématique peuvent se trouver impliquées à ce stade de la formation de l'intelligence de l'enfant.

C'est, évidemment, d'une part, la « mathématique relationnelle », si on entend par cette expression aussi bien la *mathématique des relations* que la mathématique des *applications* et des *fonctions*.

C'est, d'autre part, la *géométrie élémentaire* à son niveau le plus général, la *topologie*.

Examinons ces deux grandes divisions tour à tour.

a) Formation de l'intelligence et mathématique relationnelle.

A la base de la mathématique relationnelle se trouvent la *correspondance terme à terme* et le *couple ordonné* (1) qui ouvrent la voie aux relations d'équivalence, d'une part, aux relations d'ordre, d'autre part.

La correspondance terme à terme permet notamment de faire apparaître l'*équipotence* de deux ensembles et la notion de nombre cardinal, alors que la relation d'ordre permet de dégager l'aspect *ordinal* des nombres naturels.

Connaissant ainsi toute l'importance de la correspondance terme à terme et du couple ordonné pour le développement du raisonnement et des concepts mathématiques de base susceptibles d'être explicités plus tard, sachant d'autre part qu'au stade pré-conceptuel l'enfant fait spontanément usage des couples ordonnés et des correspondances terme à terme, on comprend qu'il soit dans la vocation de l'école à ces âges de renforcer l'apprentissage occasionnel auquel la vie de tous les jours ouvre la voie dans ces domaines.

Il n'est naturellement pas question que cela se fasse sous la forme de « leçons de mathématique ». La mathématique proprement dite, branche particulière bien identifiée de la connaissance, viendra plus tard. Pour le moment il s'agit de donner à l'enfant l'occasion de se livrer à des *activités* qu'on peut qualifier de « mathématisantes » dans la mesure où l'observateur, en les analysant, y constate la présence de certains des concepts et des opérations du domaine de la mathématique.

Voici quelques exemples d'activités mathématisantes auxquelles peuvent se livrer les enfants de la Maternelle et du Cours Préparatoire.

On donne à l'élève des bouchons et des bouteilles diverses, choisis de telle façon que chaque bouteille puisse recevoir un bouchon et un seul. L'enfant doit former tous les couples « bouchon-bouteille » possibles. L'exercice peut être répété avec des vis et des écrous, par exemple, et, d'une façon générale, avec deux ensembles d'objets « se convenant » mutuellement, pouvant être appareillés deux à deux. Dans la même catégorie d'exercices se rangent les appareillements « objet-empreinte » où il s'agit, à partir d'un double jeu d'objets et d'empreintes, de poser sur chaque empreinte l'objet lui convenant (*).

Quand les enfants commencent à savoir lire, on peut leur faire appareiller des objets et des étiquettes sur lesquelles sont inscrits les noms de ces objets.

Très jeunes, les enfants sont capables de reconstituer des figurines préalablement sectionnées en deux parties (recherche de la partie complémentaire d'un élément).

Assez vite on peut les faire participer à des activités d'échange du type « un-un » (je te donne une bille, tu me donnes un bouton).

---

(1) Nous employons cette expression, bien que le qualificatif « ordonné » ne soit pas indispensable, afin de marquer l'importance de l'*ordre* dans lequel on considère les éléments du couple.

(*) Dans le film de Truffaut, *L'enfant sauvage*, le D[r] Itard demande à son élève de ranger des outils à des emplacements marqués.

Ces activités de mise en relation entraînent *ipso facto* la mise en évidence d'*ensembles d'objets :* par exemple l'ensemble des bouteilles d'une part, l'ensemble des bouchons de l'autre, ou encore l'ensemble des objets et l'ensemble des empreintes.

Ainsi se trouvent préparées les activités de classement qui commencent à pouvoir être inaugurées à partir de matériel divers puisé dans la vie quotidienne des enfants ou dans les jeux pédagogiques (jetons, blocs logiques, etc.). On notera toutefois qu'il est un peu tôt avant 6 ans pour demander aux enfants des classements systématiques. Les expériences de Genève ont montré en effet que la période des classements s'épanouit un peu plus tard quand l'enfant est non seulement capable de distinguer dans un ensemble d'éléments certains qui sont équivalents à un titre quelconque (même couleur, par exemple) mais quand il sait identifier *tous* les éléments équivalents sans en omettre *aucun.*

Nous reviendrons sur cette question à propos du prochain stade de développement de l'intelligence. Pour le moment, retenons que la pensée par couple porte en puissance la notion de classe d'équivalence sans encore déboucher sur elle, faute de pouvoir s'appuyer sur la transivité et sur la symétrie.

b) Formation de l'intelligence et « topologie ».

L'activité des personnes se développe dans l'espace et dans le temps. Le jeune enfant s'intéresse très tôt à l'espace; dès le 2^{e} ou le 3^{e} mois le bébé coordonne vision et préhension et fait parcourir à ses membres comme à ses regards des portions d'espace.

Dès qu'il peut marcher l'enfant explore encore plus activement l'espace par ses allées et venues, apprend à distinguer ce qui est près de ce qui est loin, etc. Il explore par le toucher et par la vue la forme des objets. Il commence à distinguer ce qui est grand de ce qui est petit.

En bref, au cours des deux premières années de son existence, l'enfant « construit » ce que Piaget appelle l'*espace sensori-moteur,* cette expression indiquant que l'espace en question n'est point la représentation que les adultes se font de l'espace mais quelque chose lié aux *sens* du sujet (la perception) et à ses *activités motrices.*

C'est un espace vécu et pratique qui va servir de base de départ à la constitution ultérieure de l'espace représenté. Cette constitution prendra de nombreuses années et ne s'achèvera qu'aux approches de l'adolescence lorsque l'intelligence accédera au niveau hypothético-déductif.

Au niveau d'âge auquel nous nous intéressons actuellement (2/3 à 5/6 ans) la représentation de l'espace est encore sommaire. Les représentations spatiales de l'enfant, c'est-à-dire les transpositions au niveau de la pensée des activités spatiales vécues, ne sont que des ébauches grossières. Elles sont, comme toutes les représentations à ce niveau d'âge, « assujetties aux déformations engendrées par le caractère irréversible et statique de la pensée intuitive ou préopératoire » (1).

Ce caractère d'ébauche se manifeste par exemple quand il s'agit de *formes,* notamment de la forme des contours linéaires des objets auxquels l'enfant a affaire.

---

(1) M. Laurendeau et A. Pinard : *Les premières notions spatiales de l'enfant,* Delachaux et Niestlé, 1968, p. 14.

La forme d'un contour linéaire dépend de la manière dont les points successifs de ce contour se disposent les uns par rapport aux autres. Les exemples de dispositions fournis par le vécu de l'enfant sont très variés. Mais beaucoup se ressemblent et l'enfant ressent assez vite certaines de ces ressemblances. Il ressent notamment très tôt le fait que certains contours se ferment sur eux-mêmes alors que d'autres restent ouverts ou encore qu'il a affaire à une ligne régulière (portions de cercle ou d'ellipse) et non pas à une ligne accidentée (contour en étoile, contour en triangle, etc.) présentant des creux, des pointes, des dents... Vers 5/6 ans il commence à faire la distinction entre les contours rectilignes et les contours curvilignes.

Concernant les surfaces et les volumes, le jeune enfant distingue de même les surfaces fermées (paroi d'un ballon, ...) qui enveloppent quelque chose de clos et les surfaces ouvertes (paroi d'un verre) qui délimitent un « creux ».

Les frontières séparatrices, lignes ou surfaces, sont parmi les premières acquisitions spatiales de l'enfant et contribuent aussi bien à la « construction » de l'image des objets (en facilitant leur recognition) qu'à la construction de l'image de l'espace par la mise en place de repères (se trouver dans une pièce ou à l'extérieur, d'un côté d'un ruisseau ou de l'autre côté, etc.).

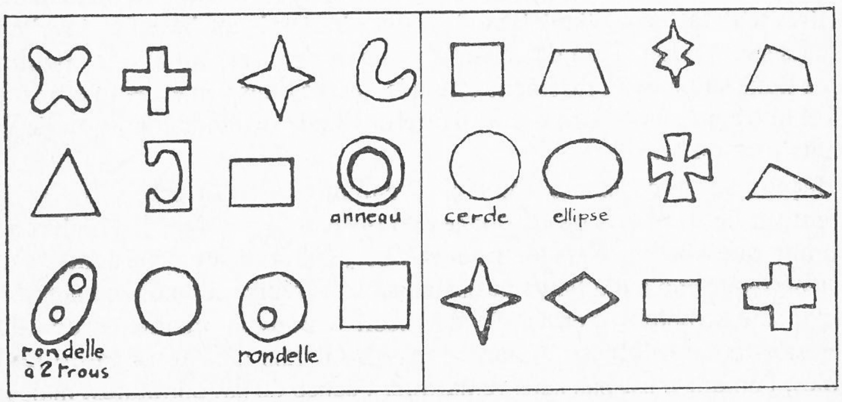
Par contre le jeune enfant n'est pas encore capable de distinguer systématiquement les rapports *projectifs* et les rapports *euclidiens*, c'est-à-dire les rapports qui font intervenir les perspectives, les orientations et les distances.

Sur ce point les travaux de J. Piaget et P. Inhelder qui ont été repris systématiquement à l'Université de Montréal par Monique Laurendeau et Adrien Pinard, apportent des vues intéressantes sur lesquelles il y a lieu de s'attarder quelque peu.

Faisons tout d'abord référence à une série de tests que les deux derniers auteurs cités ont fait passer à Montréal à quelque 700 enfants dont les âges s'échelonnaient entre 2 ans 1/2 et 12 ans.

Le matériel utilisé comportait 12 figurines type découpées dans un fort carton et présentant les formes suivantes : carré, rondelle percée d'un trou, anneau fermé, croix irrégulière, triangle, anneau ouvert, rectangle, croix grecque, cercle, rectangle ouvert, étoile à 4 branches, rondelle percée de deux trous. Le test consiste à identifier ces formes sans les voir. L'enfant les touche à tour de rôle et il doit chaque fois désigner sur une carte qui les représente toutes, celle qu'il vient de palper (reconnaissance stéréognosique).

Une seconde épreuve de même nature porte sur 12 figurines dont certaines



Première série　　　Deuxième série

sont pareilles aux précédentes et d'autres différentes. Les formes utilisées sont les suivantes : cercle, croix de Malte, carré, ellipse, étoile à 4 branches, rectangle, triangle, quadrilatère, croix grecque, trapèze, étoile à 6 branches, losange.

Les réponses données par les enfants sont notées, puis analysées. Il apparaît que les erreurs d'identification sont d'autant plus nombreuses que les enfants sont plus jeunes. D'autre part les erreurs ne se distribuent pas au hasard. Par exemple les jeunes enfants se trompent plus fréquemment en faveur de l'étoile qu'en faveur du cercle quand la figure palpée est le triangle, le carré est pris plus fréquemment pour le rectangle que pour l'anneau ouvert, etc.

L'analyse statistique des réponses exactes et des erreurs regroupées «par familles» conduit les auteurs aux conclusions suivantes (p. 63) : la prise en compte de certains rapports topologiques intervient tôt et conduit les enfants à distinguer les figures pleines des figures trouées, les figures ouvertes des figures fermées. La différenciation des figures rectilignes et curvilignes suit de près. Les rapports purement métriques (dimensions, inclinaisons, étendues des angles, nombre d'éléments, etc.) n'interviennent qu'en dernier lieu.

Par exemple entre 4 et 6 ans, « les croix sont confondues entre elles, à cause de leur caractère commun de figures ouvertes; sont également confondus le triangle, le carré, le rectangle et tous les autres quadrilatères, à cause de leur caractère commun de figures fermées et rectilignes (p. 87).

Une autre série de tests administrée par l'équipe de Genève et reprise récemment par les professeurs de Montréal confirme la primauté génétique des rapports topologiques sur les rapports projectifs et euclidiens.

Il s'agit, suivant la technique utilisée par Laurendeau et Pinard, d'aligner 8 réverbères miniatures sur une table entre deux maisons également miniatures qui peuvent être disposées soit parallèlement à l'un des côtés de la table d'expérience, soit en biais par rapport à ceux-ci.

Les expérimentateurs notent non seulement les configurations obtenues en fin d'exercice mais également les procédés mis en œuvre par les enfants.

Commentant ces procédés, nos auteurs écrivent (p. 93) « avant 6 ou 7 ans le caractère pré-opératoire des procédés employés par l'enfant se traduit par la prépondérance qu'il accorde aux relations topologiques de simple voisinage et par la difficulté qu'il éprouve à s'affranchir des suggestions perceptives offertes par certains éléments de la situation comme, en particulier, les contours de la table sur laquelle il travaille. Tel enfant, par exemple, mettra beaucoup de minutie à juxtaposer les éléments (réverbères) en veillant bien à ce que toutes leurs bases se touchent deux à deux, mais sans aucun souci de conserver une même direction, pour aboutir finalement à une ligne sinueuse et rarement orientée, même dans son ensemble, vers l'objectif fixé. Tel autre pourra réussir à construire une ligne droite à condition de disposer les éléments près du bord... ».

Ces façons de procéder montrent que l'enfant de niveau préopératoire s'appuie uniquement sur des rapports de voisinage et d'ordre. « Il procède de proche en proche en s'assurant que chaque élément nouveau se juxtapose au précédent; mais il ne voit pas la nécessité et n'a d'ailleurs pas la capacité de réunir ces mouvements successifs dans une même structure d'ensemble de façon à pouvoir maintenir une direction constante et atteindre l'objectif. Étant donné qu'il sait déjà reconnaître les droites perceptibles, l'enfant n'est pas sans remarquer l'échec de ses conduites; mais faute de pouvoir se représenter ces droites, et donc de les anticiper ou de les reconstruire en pensée, il se trouve privé des structures internes dont il aurait besoin pour diriger ses constructions et résister à la suggestion des droites perceptives déjà toutes constituées dans son champ visuel » (p. 94).

On trouve dans ces expériences une nouvelle illustration du fonctionnement de la pensée par couple aux âges considérés. Ici, il s'agit de couples de points disposés spatialement et dont la nature de couple résulte de leur proximité. Les divers couples sont considérés isolément et ne s'intègrent pas encore en chaînes transitives.

Quand on compare les résultats obtenus par un enfant donné aux deux séries de tests on constate un étroit parallélisme entre les performances réalisées. Cela tend à montrer qu'il n'y a pas une intelligence pour ceci et une intelligence pour cela mais une intelligence qui, au stade de développement où elle se trouve, se met au service des situations les plus diverses.

Ayant présents à l'esprit les résultats d'expériences précises conduites sur les enfants, nous sommes mieux à même de comprendre en quoi consiste l'image mentale de l'espace telle qu'elle peut se former chez les enfants de l'âge considéré. Ce n'est pas une image unique, mais plutôt une mosaïque d'images dont chacune est fragmentaire, distincte des autres et sous la dépendance des perceptions dominantes fournies par le vécu.

Piaget et son école parlent à ce propos d'espace topologique, le qualificatif « topologique » étant utilisé par référence à la mathématique pour indiquer qu'à ce niveau seules comptent des relations d'un certain type : relations de voisinage ou de proximité, d'entourage (2 dimensions), d'enveloppement (3 dimensions), de continuité, de séparation, d'ordre. Ces relations ne permettent pas de conférer à tel ou tel objet le statut d'objet géométrique euclidien, c'est-à-dire d'objet dont les points sont à des distances invariantes les uns des autres. Elles ne permettent pas davantage de situer un objet de façon précise au sein d'un cadre de référence.

Toutefois, d'autres expériences réalisées sous l'égide de Piaget ou par l'équipe de Montréal, portant notamment sur la manière dont les enfants s'orientent et sur la distinction qu'ils font entre la gauche et la droite, montrent que dès l'âge de 4/5 ans l'espace projectif et l'espace euclidien commencent à s'ébaucher sur la toile de fond de l'espace topologique. Mais les représentations correspondantes portent toujours la marque de la prééminence de l'intuitif sur l'opératoire et de l'égocentrisme sur la pluralité des points de vue, comme on doit s'y attendre étant donné les caractéristiques générales du stade atteint par l'intelligence des enfants de moins de 6/7 ans. Par exemple, tel jeune enfant qui sait parfaitement distinguer sa gauche et sa droite est incapable d'indiquer correctement la gauche et la droite d'une personne lui faisant face et cela parce que sa pensée — encore au stade intuitif — centre son attention sur « des aspects partiels et successifs d'une même situation d'ensemble sans pouvoir encore s'adonner aux activités d'intégration et de compensation nécessaires à l'objectivité et à la réversibilité opératoire » (*op. cit.*, p. 162).

Concernant l'évaluation des distances l'enfant de moins de 6 ans sait en général distinguer ce qui est loin de ce qui est près mais, faute de pouvoir mesurer les distances, il doit se limiter à des comparaisons approximatives.

En résumé si, après 2/3 ans, l'enfant dépasse l'espace sensori-moteur en direction d'un espace représenté, ce dernier a un caractère essentiellement topologique; le projectif (ligne droite, système de perspective) et l'euclidien (métrique) n'y sont encore présents qu'à l'état d'ébauche imparfaite.

Ainsi se trouve assez clairement circonscrit le domaine où peut intervenir la géométrie aux niveaux d'âge considérés. Pour l'essentiel ce domaine apparaît bien devoir être la *topologie élémentaire*.

Les jeux et les exercices correspondants s'organiseront autour des thèmes de domaine fermé, de cheminement, de franchissement de frontière, d'opposition intérieur/extérieur.

Des repérages pourront être proposés à condition qu'ils puissent être réalisés à l'aide principalement de rapports de voisinage (« l'arbre qui se trouve entre la route et la rivière », etc.).

Les jeux de labyrinthe permettent aux enfants de découvrir de nombreuses particularités de l'espace topologique. Avec les enfants très jeunes il est indiqué de tracer le parcours des labyrinthes à même le sol, de façon à permettre à un enfant de circuler à l'intérieur. Si une frontière de craie ne suffit pas à interdire le franchissement des lignes proscrites on pourra utiliser des obstacles réels : bancs, ficelles tendues entre des chaises ou des poteaux, etc.

Entre 4 et 6/7 ans les garçons aiment beaucoup jouer avec des petites voitures. On pourra profiter de ce goût pour organiser des « jeux de circulation » faisant appel à des relations spatiales et notamment des relations d'ordre. Par exemple, sur un tracé marqué sur le sol à la craie et présentant un réseau de cheminements (embranchements, croisements, boucles, etc.), le maître disposera des points de repère : A (une station-service, par exemple), B (une maison), C (un arbre). L'élève sera invité à trouver le ou les chemins que devra suivre l'auto pour passer successivement devant C, B, A, par exemple.

Afin de ne pas donner une primauté absolue aux surfaces planes on devra le plus possible proposer aux élèves des tracés sur des surfaces courbes, parois de ballons ou de chambre à air par exemple. L'emploi de la pâte à modeler est vivement recommandé.

Concernant l'identification des formes qui met en jeu aussi bien des activités de reconnaissance de rapports topologiques que des activités de classement on pourra s'inspirer de la technique utilisée à Genève et à Montréal et l'adapter aux possibilités de la classe. On pourra, par exemple, présenter aux enfants une série d'objets du type de ceux mentionnés plus haut (anneaux, croix, etc.) ainsi que leurs dessins reproduits sur un carton; l'exercice consistera à placer chaque objet sur le dessin qui le représente.

Pour préparer le terrain à l'acquisition ultérieure de l'espace projectif, on pourra également faire jouer les élèves à des jeux mettant en œuvre les rapports projectifs de devant-derrière, gauche-droite, dessus-dessous, ainsi que les alignements.

Voici quelques exemples.

Avec des « blocs logiques » : on sait que chaque élément de petite taille possède un « double » de plus grande taille présentant les mêmes caractéristiques de couleur, de forme et d'épaisseur. On pourra convenir que ces blocs représentent respectivement un cavalier et son cheval ou une tasse et sa sous-tasse. Ce jeu consiste à appareiller chaque petit élément avec le grand élément correspondant et à disposer les éléments des couples correspondants l'un sur l'autre, le grand élément étant posé dessous, le petit élément dessus. Il sera facile au maître de vérifier si l'exercice a été correctement exécuté.

Un exercice du même genre portant sur l'opposition droite/gauche consiste à disposer les éléments des couples ci-dessus non pas l'un au-dessus de l'autre mais l'un à la droite de l'autre en s'aidant par exemple comme ligne de référence du rebord de la table ou des lames du parquet.

Pour préparer la voie aux alignements, de multiples exercices sont possibles, notamment ceux qui font appel à des jetons que le maître demandera aux enfants de placer « comme des poteaux télégraphiques » le long d'une route droite d'abord matérialisée par un repère (bord de table, fil tendu) puis dont les extrémités seront seules indiquées. Le matériel pédagogique courant (planchettes à trous, damier à alvéoles de l'O.C.D.L.) se prête à ce genre d'exercice dans la mesure où il facilite les repérages perceptifs.

Dans tous ces exercices et jeux il conviendra de se souvenir qu'ils n'ont pas pour objet de faire acquérir à l'élève une quelconque « technique ». Leur but est de lui donner l'occasion de s'exercer, de « tenter des choses pour voir ce que ça donne », de faire des découvertes à sa portée.

En cette matière les enseignements des travaux de Piaget et de ses disciples ou continuateurs nous paraissent décisifs.

Parlant des tâtonnements auxquels se livre l'enfant au cours d'un exercice portant sur des angles, Piaget note (1) que dans l'expérience décrite « l'objet intervient essentiellement à titre d'aliment ou de support de l'activité, c'est-à-dire qu'il est assimilé au schéma de l'action et ne résiste, en imposant de nouvelles accommodations, que dans la mesure où les actions successives portant sur lui ont été mal coordonnées entre elles ».

Quand on a présent à l'esprit ce schéma de base « assimilation/accommodation », on comprend en quoi l'erreur peut être, dans certains cas, source de dépassement, de recherche d'un meilleur ajustement au réel. On comprend aussi qu'on ne puisse faire faire l'économie de telles erreurs et tâtonnements à l'enfant en situation d'apprentissage.

« L'exemple ne sert de rien — peut-on lire encore dans le même ouvrage (p. 409) — tant qu'il ne s'accompagne pas d'initiative véritable. »

C'est dire qu'une bonne partie de l'art de la pédagogie est de savoir susciter des initiatives.

(*A suivre*).

---

(1) Piaget, Inhelder, Szeminska : « *La géométrie spontanée de l'enfant* », P.U.F., 1948, p. 269.

Jean Sauvy

Enseignement mathématique et psychologie de l'enfant (*)

4. Le stade des opérations concrètes (Piaget) ou de la pensée catégorielle (Wallon) : 6/7-11/13 ans.

Au terme du stade pendant lequel s'épanouit la pensée intuitive (Piaget) ou pré-catégorielle (Wallon), on peut considérer que commence un nouveau stade du développement de l'intelligence.

Nous nous proposons d'en décrire les principales caractéristiques, comme nous l'avons fait pour le stade précédent, avant d'envisager le rôle que peut jouer l'enseignement de la mathématique au cours de cette période.

4.1. Les caractéristiques du stade des opérations concrètes.

A. — Quelques conduites typiques.

Envisageons tout d'abord quelques conduites intellectuelles d'enfants ayant des âges compris entre 6-7 ans et 11-13 ans. Nous examinerons ensuite les caractéristiques communes de ces conduites.

a) Le problème de la distance.

Considérons une épreuve imaginée par Piaget pour étudier la géométrie spontanée des enfants. Deux poupées sont placées sur une table se faisant face à quelque 50 centimètres l'une de l'autre, l'une d'elle occupant une position B surélevée par rapport à la position A de la première (**). Des enfants d'âges divers sont mis en présence de ce dispositif. On leur montre de la main la distance qui sépare A de B, puis B de A, et on leur demande si c'est « la même chose loin? »

On constate alors que jusque vers 6-7 ans la distance évaluée en montant (de A vers B) est déclarée plus grande que la distance évaluée de B vers A. Autrement dit, à cet âge-là, la distance n'est pas encore conçue comme symétrique, elle dépend de l'effort que l'enfant ressent comme nécessaire pour la parcourir.

Par contre les enfants légèrement plus âgés indiquent que la distance est la même. L'un d'eux (6 ans 8 mois) explique pourquoi il le pense. Il dit : « C'est la

---

(*) Les précédents chapitres ont été publiés dans les cahiers nos 9, 10 et 11-12.
(**) J. Piaget : La géométrie spontanée de l'enfant, p. 98 et suivantes.

même chose parce que ça fera le contraire », faisant allusion, dans son langage peu précis, à un chemin contraire (inversé) possible.

Il s'agit là d'un progrès capital. Alors qu'au niveau précédent l'enfant « mêle son propre point de vue à celui des objets », dès qu'il se libère de cet égocentrisme « il découvre la possibilité de se placer alternativement par la pensée au point de vue de A (vers B) et de B (vers A) ».

b) Partage d'un gâteau.

Considérons une autre épreuve également pratiquée par Piaget (ouvrage cité, p. 382 et suivantes).

On présente à des enfants un disque de pâte à modeler, figurant un gâteau, et trois petites poupées. Celles-ci, explique-t-on aux enfants, « vont manger le gâteau tout entier, mais chacune doit avoir la même chose que l'autre. Que faut-il faire? » On offre un petit couteau de bois à l'enfant pour qu'il puisse effectivement procéder au partage.

Une fois celui-ci accompli l'expérimentateur demande si les morceaux réunis équivalent à la totalité primitive. La plupart des enfants de 5-6 ans considèrent que la galette découpée en morceaux peut être reconstituée au moyen de ces derniers. Mais, en même temps, ils affirment que la somme des morceaux coupés (leur réunion) n'équivaut pas au tout primitif.

Pour ces enfants il n'y a donc pas *conservation* de la grandeur dans un processus de partage de ce type.

Avec les enfants plus âgés on obtient des réponses différentes. L'un d'eux, âgé de 6 ans 2 mois, indique : « c'est la même chose à manger, parce que c'est le même gâteau c'est la même grandeur. Là il y a trois morceaux et là il n'y a en qu'un. Seulement l'autre on l'a mis en morceaux et on a un peu écarté. Mais c'est le même gâteau. C'est la même chose si on le réunit ».

Cette fois il y a conservation de la grandeur malgré le partage.

c) Classements (inclusion).

Abandonnons les conduites intellectuelles liées à l'espace (distances et grandeurs) pour envisager des conduites de classement. Piaget et B. Inhelder ont également étudié ces conduites et en ont rendu compte dans leur ouvrage « genèse des structures logiques élémentaires » (Delachaux, 2^{e} édition 1967).

Considérons par exemple une épreuve mettant en œuvre un jeu de 20 cartes dont 4 représentent des objets coloriés et 16 des fleurs, celles-ci comprenant 8 primevères (dont 4 jaunes et les autres de couleurs diverses).

Ce matériel était conçu pour étudier notamment les emboîtements inclusifs (p. 104 et suivantes), la série des emboîtements étant

$$\left.\begin{array}{ll} A & \text{primevères jaunes} \\ A' & \text{primevères non jaunes} \end{array}\right\} \subset B \text{ primevères } (*)$$

$$\left.\begin{array}{ll} B & \text{primevères} \\ B' & \text{fleurs non primevères} \end{array}\right\} \subset C \text{ fleurs}$$

$$\left.\begin{array}{ll} C & \text{fleurs} \\ C' & \text{objets non fleurs} \end{array}\right\} \subset D \text{ fleurs, objets}$$

(*) Rappelons que le signe $\subset$ se lit « est inclus dans ».

En présence de ce matériel les enfants participant à l'épreuve étaient conviés à opérer des classements et devaient répondre à des questions telles que : « Y a-t-il plus de primevères que de fleurs? », ou encore : « Si tu cueilles toutes les fleurs restera-t-il des primevères? »

Dans ces expériences les réponses recueillies sont de types différents suivant l'âge des enfants mis à l'épreuve.

Ainsi, un enfant de 5 ans 8 mois estime qu'il y a plus de primevères jaunes que de primevères; un enfant de 6 ans 4 mois pense qu'il y a autant de primevères jaunes que de primevères.

Ces réponses tendent à montrer que les enfants interrogés n'arrivent pas à considérer que la partie (les primevères jaunes) est incluse dans le tout (l'ensemble des primevères) et le second des enfants mentionnés à l'instant compare les deux parties — primevères jaunes et primevères non jaunes — mais ne « voit » pas la catégorie emboîtante (les primevères)!

Les enfants plus âgés répondent par contre correctement, et pour eux cela paraît aller de soi. Voici, par exemple, le compte rendu d'un dialogue entre l'expérimentateur et un sujet de 8 ans 2 mois :

« Peut-on mettre une (A) dans les (C)? Bien sûr, c'est une fleur. — Et une (A') dans le (A)? Non, elle n'est pas jaune. — Et une (B') dans les (B)? — Non, ce n'est pas la même sorte de fleur. — Et une (B) dans les (C)? — Oui, la primevère est aussi une fleur! — Y a-t-il plus de primevères ou plus de fleurs? — Il y a plus de fleurs. — Plus de primevères ou plus de primevères jaunes? — Plus de primevères » (p. 111).

B. — Analyse de ces conduites.

A partir des exemples donnés ci-dessus (qui ne constituent qu'un petit échantillon des expériences rapportées par Piaget dans ses ouvrages), on aperçoit nettement la différence entre les conduites des enfants du stade précédemment étudié (moins de 5-6 ans) et celle des enfants plus âgés.

Ainsi se trouve légitimée la coupure à 5-6 ans indiquée aussi bien par Wallon que par Piaget pour distinguer deux phases du développement de l'intelligence enfantine.

Ceci étant, il convient de préciser la nature des changements qui interviennent entre l'une et l'autre de ces périodes.

Dans l'exemple du problème des distances nous avons vu que les progrès accomplis résultaient de la possibilité nouvelle de décentration acquise par l'enfant, d'une plus grande mobilité des images mentales et de la possibilité d'une démarche intellectuelle empruntant le chemin *inverse* du chemin initial.

C'est également grâce à l'évocation d'un *retour* possible à la situation antérieure que l'enfant de 6 ans 2 mois cité précédemment peut déclarer que l'ensemble des parties du gâteau égale le tout. « C'est la même chose *si* on le remet » dit-il. Le « *si* » auquel il fait appel marque bien qu'il imagine « dans sa tête » un processus inverse du processus effectivement réalisé.

Cette réversibilité est capitale car elle conduit l'enfant à découvrir que quelque chose (la quantité) se conserve à travers des changements d'apparence, qu'il s'agisse d'un gâteau qu'on partage ou d'un ruban que l'on découpe en segments, par exemple.

Ce « retour à l'identique », que Piaget appelle identité opératoire, s'ajoute ainsi aux nouveaux outils intellectuels dont dispose désormais l'enfant pour ses raisonnements.

L'observation des exercices de classement nous met d'autre part sur la voie d'un autre type de conduite lui aussi nouveau.

Il s'agit de la mise en œuvre par l'enfant de plus de 6-7 ans de schémas anticipateurs intellectuels, de la même façon que les jeunes enfants d'âge pré-scolaire mettaient en œuvre des schèmes anticipateurs sensori-moteurs dans leurs conduites de détour et leurs conduites instrumentales.

Quand on observe des enfants de 7-8 ans en train de regrouper des objets variés suivant une consigne imposée de façon à les partager en un nombre prédéterminé de classes d'équivalence, on note le recours à un processus « de proche en proche » comportant des tâtonnements et des remaniements. Telle partition qui semblait pouvoir « coller » ne donnant pas le résultat escompté, l'enfant s'y prend d'une autre manière. Mais, après quelques tâtonnements, on le voit souvent s'emparer d'une sorte de fil conducteur — proprement intellectuel — qu'il suit sans s'en apercevoir. Aux rétroactions adaptatives du début a donc succédé quelque chose d'autre, à caractère anticipateur, qui permet de faire l'économie de beaucoup de tâtonnements.

Un processus analogue est en œuvre quand il s'agit d'aligner des réverbères miniatures entre un point A et un point B. L'enfant de 7-8 ans ou davantage, contrairement à l'enfant plus jeune, semble tracer « par la pensée » une ligne idéale entre A et B qui anticipe sur le résultat du placement et le long duquel il dispose successivement les réverbères mobiles. La vérification qu'il fait après coup lui permet éventuellement de parfaire la rectitude de sa ligne. Sa main n'en a pas moins été initialement guidée par un schéma anticipateur.

C. — « L'opération » suivant Piaget.

Ainsi réversibilité, identité opératoire et schème anticipateur apparaissent-ils comme les trois piliers servant à supporter la pensée au stade intellectuel actuellement sous revue. Ces nouveaux venus ne sont pas indépendants les uns des autres. Ils se conditionnent mutuellement et s'articulent les uns aux autres contribuant à constituer ce que Piaget appelle *l'opération.*

Cette terminologie étant propre à l'école de Genève et donnant parfois lieu à des malentendus il convient de bien la préciser.

Il suffit pour cela de noter qu'il s'agit *d'opération intellectuelle* et non d'opération au sens physique du terme, par exemple de manipulation ou de façonnage.

Considérons par exemple le partage des gâteaux dont il a été question plus haut. Parallèlement au partage qui, lui, est exécuté réellement grâce à une manipulation appropriée, s'établit une opération intellectuelle consistant à *imaginer le partage* du gâteau sans réellement l'effectuer.

Le propre de l'opération est d'être plus libre, en quelque sorte, que l'action réelle correspondante. Elle peut être faite par quelqu'un de très maladroit ou par quelqu'un qui ne dispose pas de couteau. Elle est réversible comme l'est un film qu'on peut repasser à l'envers, alors que l'action réelle ne l'est pas. Elle est synthétique, globale. La pensée en effet peut se permettre de découper les trois parts simultanément alors que le couteau le ferait successivement, l'enfant risquant alors d'oublier en chemin la consigne de départ. C'est en ce sens qu'il faut comprendre le terme de « schème » employé dans l'expression utilisée plus haut de « schème anticipateur ».

Le second caractère de l'opération est d'être *issue de l'action,* même si l'action en cause n'est pas effectivement présente.

Pour bien faire comprendre cet aspect de l'opération Piaget convie ses lecteurs (cf. J. Piaget, la psychologie de l'intelligence, A. Colin 67, p. 40) à méditer sur les opérations mathématiques en œuvre dans l'expression

$$x^2 + y = z - u$$

Chaque terme de cette expression, explique Piaget, désigne en définitive une action « le signe (=) exprime la possibilité d'une substitution, le signe (+) une réunion, le signe (—) une séparation, le carré (x^2) l'action de reproduire x fois x et chacune des valeurs u, x, y, z l'action de reproduire un certain nombre de fois l'unité. Chacun de ces symboles se réfère donc à une action qui pourrait être réelle, mais que le langage mathématique se borne à désigner abstraitement, sous la forme d'actions intériorisées, c'est-à-dire d'opérations de la pensée ».

Une troisième caractéristique des opérations apparaît quand on considère conjointement plusieurs d'entre-elles, comme c'est le cas dans l'exemple ci-dessus. On constate alors que les opérations se prêtent à des associations ou, mieux, à des compositions, ce qui permet d'en intégrer plusieurs pour former des systèmes plus ou moins complexes. Par exemple, dans certains cas, deux opérations successives peuvent être remplacées par une opération unique d'effet équivalent, ou bien on peut trouver une opération inverse qui, composée à l'opération directe correspondante, annule l'effet de celle-ci, etc... C'est ce qui permet à la pensée de procéder par « raccourcis », « retour en arrière », lui conférant une mobilité et une efficacité nouvelles.

Il y aurait beaucoup d'autres choses à dire concernant la notion piagetienne d'opération. Il nous faut cependant abréger et, pour l'instant, nous contenter de signaler que les opérations en œuvre aux âges du stade sous revue sont ce que Piaget appelle des *opérations concrètes*, voulant marquer par là qu'elles sont issues d'actions — réelles ou virtuelles — portant sur des objets.

Ces « opérations concrètes » se distinguent des opérations que l'on rencontrera au stade suivant qui, elles, ne seront plus forcément concrètes puisqu'elles pourront alors s'appliquer au matériel symbolique (abstrait) que fournissent, par exemple, les systèmes de signes conventionnels propres au langage et à la mathématique.

Cette remarque est capitale au point de vue pédagogique puisqu'elle indique la voie dans laquelle une pédagogie doit s'engager aux âges considérés et qui consiste à donner la parole aux faits, qui consiste à partir des actions, avant d'introduire les « concepts ».

Elle met notamment en garde contre l'introduction prématurée du symbolisme mathématique, du raisonnement hypothétique-déductif, de l'usage des x et des y pour désigner des variables pouvant prendre des valeurs quelconques.

(A suivre).

Le bloc-notes de la Régionale

où nous réunissons des échos variés sur l'actualité pédagogique et sur les activités propres de notre Régionale.

Les nécessités de la mise en page (et même de la mise en 32 pages) nous conduisent à remettre au Cahier 15 des textes concernant les programmes de Quatrième et, plus généralement, la réforme à ce niveau.

Jean Sauvy

Enseignement mathématique et psychologie de l'enfant (*)

4.2. L'enseignement mathématique au stade des opérations concrètes.

Au cours du stade précédent, le développement atteint par l'intelligence de l'enfant ne permettait à celui-ci qu'un contact partiel et naïf avec la mathématique. Par contre, au cours du stade sous-revue (6-7 à 12-13 ans), le champ d'intervention de la mathématique peut s'élargir considérablement car, à condition de rester proche du concret, on peut placer de nombreux jalons préparant la voie à la plupart des développements proprement mathématiques — c'est-à-dire abstraits — qui s'épanouiront au stade hypothético-déductif.

Passons en revue les principaux chemins sur lesquels on pourra s'engager au cours de cette période préparatoire.

A. — Relations et ensembles.

En premier lieu l'enfant qui, progressivement, maîtrise l'opération, au sens piagetien du terme (avec ses caractéristiques de réversibilité et de transivité), devient capable d'affronter les deux grands types de relations qui sous-tendent l'édifice de la mathématique relationnelle : les *relations d'ordre* et les *relations d'équivalence*.

La mise en œuvre des relations d'équivalence permet de « construire » les classes d'équivalence (les « catégories » de Wallon), tandis que la mise en œuvre des relations d'ordre, dont le prototype est la *relation d'inclusion* entre parties d'un même ensemble, permet de constituer des « groupements » de classes et sous-classes hiérarchiquement ordonnées.

Ceci est à la base de « l'organisation de l'univers » à laquelle doit se livrer l'enfant pour rendre cet univers intelligible. C'est en effet par ces moyens que l'enfant rapproche ce qui est par quelque côté semblable (équivalence), pouvant ainsi raisonner par analogie, et qu'au sein de ce qui est différent il ordonne, maîtrisant ainsi dans une certaine mesure, les dissemblances.

Les 6e, 7e et 8e années de l'enfant sont l'âge par excellence des *classements* et des *rangements* (ou sériations) dans tous les domaines. L'apport de la « mathématique

(*) Les précédents chapitres de cette étude ont été publiés dans les cahiers nos 9, 10, 11-12 et 14.

des relations et des ensembles » sera d'ajouter aux expériences dispersées et confuses que la vie quotidienne propose à l'enfant un corps d'exercices et de jeux permettant une pratique systématique et féconde de la mathématique qui se trouve être sous-jacente à ces classements et à ces rangements spontanés.

A l'occasion de ces exercices et jeux l'enfant sera progressivement conduit à découvrir l'usage de schémas et modèles de caractère général (arbres, tableaux croisés, cercles de Venn, etc...) qu'il incorporera tout naturellement en tant qu'instruments commodes et efficaces à son outillage intellectuel.

Quand on parle, comme cela vient dêtre fait, des 6e, 7e et 8e années de l'enfant, il faut comprendre que c'est au cours de cette période que deviennent possibles les classements et les rangements *systématiques*, avec un certain échelonnement des acquisitions dans le temps, et avec des décalages suivant les sujets, décalages pouvant atteindre plusieurs mois.

Ainsi les *classements* simples, c'est-à-dire suivant un seul critère (par exemple classer un ensemble d'objets en deux parties suivant qu'ils sont rouges ou non) sont réalisés sans difficulté par une majorité d'enfants dès l'âge de 6 ans. Par contre les *classements croisés*, c'est-à-dire les classements pour lesquels l'enfants doit tenir compte de deux ou plus de deux critères, ne deviennent courants qu'un peu plus tard, vers 7-8 ans.

C'est d'ailleurs à ce moment-là que la maîtrise de *l'inclusion* apparaît. Les enfants plus jeunes, face à un ensemble d'éléments dont tous présentent une certaine caractéristique (être fleur) alors que seulement quelques-uns présentent une autre caractéristique (être primevère) ont du mal à « comprendre » que le deuxième ensemble (les primevères) est inclus dans le premier (les fleurs).

Pour y parvenir il faut que l'enfant puisse simultanément considérer un même élément en tant que fleur *et* en tant que primevère. C'est là le processus même de l'opération de *multiplication logique* qui correspond, au niveau des opérations sur les parties d'un ensemble, à l'opération d'*intersection* et, au niveau de l'arithmétique, à la *multiplication* des nombres naturels.

Concernant le langage c'est également à cette époque que l'on verra apparaître l'utilisation souvent correcte des mots « tous », « quelques-uns » (ou « certains »), « aucun », « au moins un », etc...

Avant 8 ans, on relève encore dans ce domaine beaucoup d'imprécision.

PIAGET, dans son ouvrage « Genèse des structures logiques élémentaires » (p. 95) rapporte les réponses suivantes données par des enfants âgés de 6 et 7 ans. L'un d'eux (6 ans 1 mois) que l'on interroge à propos d'un ensemble de jetons répond qu'il y en a « quelques-uns » quand il y en a moins de cinq. A partir de cinq on ne peut plus dire « quelques » estime-t-il car alors « c'est beaucoup ».

Un second (6 ans 10 mois) indique que pour lui « quelques » c'est « plusieurs » : un et deux ne sont pas quelques. Quelques, c'est de 3 à 100.

Un troisième, un peu plus âgé (7 ans 4 mois), quand on lui demande de donner quelques jetons en donne 7 puis 4. Mais il estime que 8 et au-delà ce n'est plus « quelques ».

PIAGET tire de ces observations que, pour les enfants de ce stade (début des opérations concrètes), « quelques » a pour les sujets interrogés « un sens absolu, lié au nombre des éléments, et non pas un sens relatif de partie ou de sous-classe mise en rapport avec un tout » (*id.* p. 96).

Le problème de la *classe* vide ou de l'*ensemble* vide, lié à la notion de « aucun » ou « rien », mérite également de retenir l'attention car c'est un point sur lequel bute souvent l'enseignement de la mathématique moderne quand il est hâtif.

Ici encore il convient de se reporter aux travaux de PIAGET. Ayant rappelé dans son ouvrage sur la genèse des structures logiques que les opérations de classification se constituent au niveau des opérations concrètes (p. 149), il indique que la question de la classe vide ou nulle se pose en relation avec le problème des frontières entre stade des opérations concrètes et celui des opérations formelles (stade hypothético-déductif).

Les « groupements » élémentaires de classes — écrit-il — impliquent bien une telle notion, en ce sens que si l'on a

$$A = B - A' \; (*)$$

on a

$$B - A - A' = 0$$

et

$$A \times A' = 0 \; (**)$$

C'est-à-dire qu'en excluant une classe d'elle-même on la « vide » et que la partie commune à deux classes disjointes est « nulle ». Mais — ajoute PIAGET — puisque les opérations concrètes portent sur des objets et qu'une classe nulle est une classe sans objets, l'enfant de 7-8 ans saura-t-il situer en pensée la classe nulle sur le même plan que les autres?

Les expériences faites à l'aide d'un jeu de cartons de formes différentes dont certains portaient des images (animaux, maisons...) et d'autres rien et qu'il fallait partager en deux classes seulement ont montré qu'avant 10-11 ans les enfants ne considéraient pas la classe vide comme une classe comme les autres.

Les enfants plus jeunes, très embarrassés par les cartons ne portant aucune image, les ont soit ignorés, soit escamotés. En aucun cas ils n'en ont fait spontanément un tas à part, face au tas des cartons portant une figurine.

Ces observations permettent à PIAGET de conclure que c'est vers 10-11 ans que commence à se préparer la phase hypothético-déductive au cours de laquelle la pensée s'affranchira de toute référence au concret et sera capable de « manier les structures indépendamment de leur contenu ».

Pour les *sériations* (ou rangements, ou ordinations), on note une progression du même ordre que pour les classements.

Mis en présence d'un jeu de réglettes de tailles différentes qu'on leur demande de ranger par tailles croissantes, les enfants réagissent différemment suivant leur âge.

Ceux de 5-6 ans arrivent à ordonner correctement les réglettes mais par « tâtonnement empirique ». Ils ne parviennent à intercaler de nouveaux éléments que moyennant de nouveaux tâtonnements et souvent au prix d'un remaniement général. Par contre, à partir de 7-8 ans, beaucoup de sujets utilisent une méthode systématique consistant à chercher d'abord le plus petit élément de tous, puis le plus petit de tous ceux qui restent, et ainsi de suite.

PIAGET (*op. cit.* p. 251) estime que « seule cette méthode est à considérer comme opératoire, puisqu'elle témoigne du fait qu'un élément quelconque E est à la fois plus grand que les précédents et plus petit que les suivants ».

(*) En termes d'ensemble, A est la partie complémentaire de A′ dans l'ensemble B.
(**) En terme d'ensemble, $A \cap A' = \varnothing$.

Sur 134 enfants de 4 à 8 ans ayant subi l'épreuve, aucun des 15 enfants de 4 ans ne procède ainsi, 9 p. 100 seulement des 34 enfants de 5 ans recourent au procédé opératoire. Le pourcentage passe à 34 p. 100 pour les 32 enfants de 6 ans, à 63 p. 100 pour les 32 enfants de 7 ans, atteignant enfin 95 p. 100 pour les 21 enfants de 8 ans. Ce n'est donc qu'au-delà de 6 ans que l'opération est maîtrisée par *plus de la moitié* des enfants ayant participé aux épreuves en question.

B. — Logique des attributs.

Dans ce qui précède nous avons utilisé le terme « logique », notamment pour qualifier les opérations qui mettent en jeu deux ou plusieurs critères de classement.

La logique en cause est une logique portant sur des attributs ou des caractéristiques. Elle ne doit pas être confondue avec la logique proprement dite qui, elle, ne pourra intervenir qu'au stade de la pensée formelle car elle portera sur des propositions ou sur des énoncés de caractère abstrait.

La « logique des attributs » trouve naturellement sa place au niveau des opérations concrètes car elle constitue, dans une large mesure, une autre façon de traiter les problèmes des opérations sur les parties d'ensemble.

Par exemple, le fait de dire, en présence d'un élément d'un certain ensemble :

« cet objet est rond *et* bleu »

correspond au fait que ledit élément se trouve classé *à la fois* dans le sous-ensemble (ou partie) des éléments ronds et dans le sous-ensemble des éléments bleus, c'est-à-dire dans le sous-ensemble *intersection* des ronds et des bleus.

La logique des attributs met en jeu principalement :

— la *négation* d'un attribut (« *non*-rouge » opposé à « rouge », « *non*-humain » opposé à « humain », etc...) qui correspond à l'opération de complémentarité d'un sous-ensemble;

— la *disjonction* de deux attributs (« rouge *ou* triangle », « riche *ou* célèbre », etc...) qui correspond à l'opération de *réunion* de sous-ensemble;

— la *conjonction* de deux attributs (« froid *et* sec », « ambitieux *et* prudent », etc...) qui correspond à l'opération d'*intersection* de sous-ensembles;

— l'*implication* de deux attributs, dont la forme la plus accessible aux jeunes enfants est bâtie sur le modèle suivant

« *non* ambitieux *ou* prudent »

ce qui apprend que *si* le sujet considéré est « ambitieux » c'est l'autre terme de l'alternative et lui seul qui reste, autrement dit on est assuré que, *alors*, le sujet est « prudent », ce qui se résume sous la forme

« *si* ambitieux *alors* prudent »

Les très brefs développements qui précèdent ont pour objet de mettre en évidence un parallélisme entre deux types de langage et d'autre part de montrer le rôle d'infrastructure que joue la logique des attributs dans le raisonnement des enfants des âges considérés.

On ne devrait pas considérer cette « logique » comme une discipline à part. Elle devrait être au contraire entièrement mêlée aussi bien aux exercices et aux jeux de caractère mathématique qu'aux exercices et aux jeux relatifs à l'apprentissage de la langue maternelle.

C. — Nombres naturels et systèmes de numération.

En acquérant la possibilité de manier les relations d'ordre et d'équivalence, l'enfant se trouve vers 6-7 ans en mesure d'affronter de façon un peu systématique l'ensemble des naturels qu'il a commencé à utiliser avec plus ou moins de bonheur à l'âge de 4-5 ans.

Le nombre, comme l'ont montré les travaux de PIAGET et de ses collaborateurs, peut en effet être considéré comme le fruit d'une sorte de mariage entre la classe (nombre cardinal) et l'ordre (nombre ordinal).

Il se prête ainsi particulièrement bien aussi bien aux exercices de type ensembliste (multiples de 2 *et* multiples de 3, etc...) ou sériel (7 plus grand que 5 plus grand que 1) qu'aux opérations (les opérations arithmétiques).

C'est donc à juste titre que l'enseignement traditionnel lui faisait dans le passé une large place. Étant donné son intérêt pour la vie pratique (où, plus que jamais, tout tend à devenir nombre) il ne serait pas judicieux de réduire trop son rôle. Par contre il apparaît recommandable de développer les exercices de calcul avec le souci de ne pas enseigner seulement des recettes mais de faire acquérir une véritable maîtrise du calcul, ce qui exige une compréhension en profondeur.

Le recours à la numération non décimale, parallèlement à la numération décimale, empêchera l'élève de se contenter d'automatismes en matière de calcul et lui permettra de sentir, sous la diversité des numérations en différentes bases, l'existence de modes opératoires communs dont il comprendra dès lors mieux la raison d'être et les mécanismes.

J. S. *(A suivre.)*

La réforme en Quatrième

L'agitation qui s'est manifestée à propos de la réforme au niveau de la Quatrième est trop significative pour que nous ne nous efforcions pas d'y voir clair.

Des faits

La réforme en Sixième et en Cinquième a été mise en application à partir de septembre 1969 et 1970 respectivement sur des programmes publiés le 29 juillet 1968 et rédigés par la Commission ministérielle dite Commission Lichnerowicz (C.L.) de nombreux mois auparavant. Une autre vague de la réforme était également mise en application en Seconde, puis en Première. Il paraît donc logique et pédagogiquement nécessaire qu'une réforme prolongeant celle de Cinquième et préparant aux nouvelles Secondes soit mise en place en septembre 1971. Or, le 15 février 1971, rien n'est encore officiellement décidé (non plus d'ailleurs que pour les Terminales atteintes en 1971 par la vague du second cycle). Pourquoi?

Jean Sauvy

Enseignement mathématique et psychologie de l'enfant (*)

D. — Espace et géométrie (formes, orientation, repérage, mesure)

Un autre vaste domaine d'investigation qui s'offre aux élèves âgés de 6 à 13 ans est celui de l'espace et des relations qui s'y enracinent.

A partir de 6-7 ans l'enfant, en utilisant la capacité d'opérer qu'il est en train d'acquérir (1), devient apte à dégager les notions capitales de ligne droite, de gauche-droite et de figures géométriques aux dimensions invariantes. Grâce à ces notions, l'espace peut sortir de son état topologique encore « mou » et « flottant » pour se « solidifier », se « stabiliser » et se « géométriser ». Les travaux de PIAGET, repris et développés récemment par LAURENDEAU et PINARD dans des expériences auxquelles nous avons déjà fait allusion, éclairent remarquablement les nouvelles possibilités qui sont offertes à l'enfant dans le domaine des *relations spatiales*. Le triple processus de « solidification », de « stabilisation » et de « géométrisation » évoqué à l'instant se développe solidairement au cours de l'étape sous revue, avec cependant des décalages sur lesquels nous n'avons pas la place de nous étendre ici.

Très schématiquement on peut dire que la « solidification » s'apparente à une sorte de blocage des dimensions repérables des objets de telle façon que ceux-ci, avec leurs points remarquables, leurs arêtes et leurs surfaces caractéristiques, deviennent pour l'enfant quelque chose qui ne se modifie pas quand l'observateur se déplace par rapport aux objets ou quand les objets se déplacent par rapport à l'observateur. Cette *invariance* de l'ensemble des distances repérables sur une figure indéformable est elle-même liée à la notion de *conservation* que la *reversibilité opératoire* rend possible.

La « stabilisation », très proche de la « solidification », peut être approximativement décrite comme la mise en place d'un système de référence auquel l'enfant peut accrocher les positions que les objets et lui-même occupent les uns par rapport aux autres. Il faut pour cela qu'il puisse faire appel à la ligne droite et aux notions projectives que la ligne droite rend accessible : *rapports projectifs* devant-derrière, gauche-droite, dessus-dessous. A partir de là s'organise une représentation de l'espace plus élaborée que la représentation topologique du stade précédent. Elle permet

---

(*) Les précédents chapitres de cette étude ont été publiés dans les cahiers n^{os} 9, 10, 11-12, 14 et 15.

(1) Rappelons que nous utilisons le terme « opération » comme le fait PIAGET (voir chapitre précédent).

à l'enfant de se repérer et de mettre en perspective les uns par rapport aux autres les objets, sans référence exclusive à son point de vue propre.

Quant à la « géométrisation », nous entendons par là le processus qui débouche sur les notions de la géométrie euclidienne telles que nous les connaissons et qui se caractérisent par la mesure : mesure des longueurs, des surfaces, des volumes et des angles. Au « qualitatif » initial vient désormais s'ajouter le quantitatif que rendent possibles, par ailleurs, la conquête du nombre et les premières acquisitions de nature arithmétique : addition, multiplication, division.

Les étapes des acquisitions spatiales, avons-nous dit, s'échelonnent de 6-7 ans à 13-14 ans.

La capacité de construire une droite, en tant que ligne abstraite pouvant servir de guide à un alignement d'objets, est acquise vers 6 ans (LAURENDEAU et PINARD, ouvrage cité, p. 114).

En ce qui concerne le rapport projectif gauche-droite, les expériences de Montréal montrent que si 75 p. 100 des enfants de 7 ans distinguent correctement la gauche et la droite de leur propre corps, il faut attendre 10 ans pour que les 3/4 des enfants testés désignent sans erreur la gauche et la droite d'une personne qui leur font face. Ce n'est que vers 11 ans que 75 p. 100 des sujets placés devant trois objets alignés sont capables de dire sans se tromper comment ceux-ci sont situés les uns par rapport aux autres.

Pour les rapports euclidiens il convient de distinguer entre la capacité qu'a l'enfant d'identifier des figures présentant des rapports euclidiens de même nature et la capacité de mesurer. Dans les épreuves administrées à Montréal portant sur 12 figurines devant être classées (et dont nous avons donné précédemment la description), la reconnaissance des rapports euclidiens qui permettent de distinguer le carré du losange et du rectangle, ou le cercle de l'ellipse, intervenait dès 6 ans et se révélait à peu près acquise vers 8 ans.

Par contre, suivant les travaux de PIAGET (1), la mesure d'une longueur n'est guère acquise sous sa forme opératoire (c'est-à-dire, précise PIAGET, sans tâtonnement et avec compréhension immédiate) que vers 8 ans-8 ans et demi. Pour les surfaces et les volumes, dont la mesure nécessite des opérations de multiplication logique (croisement de 2 ou 3 points de vue), des résultats systématiquement corrects sont obtenus nettement plus tard. De même le problème du repérage d'un point marqué sur une feuille de papier blanc dans le but de pouvoir reporter sa position sur une autre feuille n'était résolu, chez les enfants étudiés par PIAGET, que vers 9 ans-9 ans et demi.

Il est essentiel de ne pas perdre de vue ce calendrier approximatif des âges d'acquisition des diverses notions examinées ici quand on élabore le programme d'activités mathématisantes d'une classe.

Ces activités mathématisantes en matière d'espace et de géométrie, en quoi peuvent-elles consister? Essayons de répondre brièvement à cette question.

L'objectif est toujours le même : proposer à l'élève des situations qui retiennent son attention et l'incitent à faire fonctionner son intelligence. L'espace, son exploration et l'exploration des figures et des objets qui le peuplent, fournissent un réservoir illimité de telles situations. Nous ne pouvons donner ici qu'un très sommaire aperçu de leur variété et de leur richesse.

---

(1) J. PIAGET, B. INHELDER, A. SZEMMISKA : La géométrie spontanée de l'enfant, pp. 168 et suivantes.

Dans la première moitié du stade des opérations concrètes, c'est-à-dire aux âges de 6, 7 et 8 ans qui correspondent, en France, au Cours Préparatoire et aux Cours Élémentaires, une large place devrait encore être faite aux exercices relevant de la *topologie intuitive* qui ont pu être commencés dès la Maternelle (1). Les relations à mettre en œuvre et les notions à découvrir à l'occasion d'exercices et de jeux sont les relations de *continuité* et de *frontière continue*, les notions d'espace *clos* et d'espace *ouvert*, de *cheminement* entre deux points (« arcs » ou « arêtes »), de *circuits* le long d'arcs successifs permettant de revenir au point de départ, de *domaines* (ou régions) séparés ou contigus, de *graphes planaires topologiques* (arborescences notamment).

On peut, dès ce stade, faire établir par les élèves des cartes et des plans simplifiés, ignorant échelle et orientation, mais respectant les relations topologiques proprement dites (notamment intérieur-extérieur) et les relations d'ordre : le chemin passe par A, puis par B, puis par C, etc.

A peu près aux mêmes âges, peuvent être introduites des activités faisant intervenir la *géométrie projective* — parfois appelée « *géométrie des ombres* » — ainsi que la *perspective.* Il faut pour cela que les enfants aient maîtrisé l'ensemble des rapports spatiaux qui leur permettent de construire concrètement la ligne droite (alignement d'objets semi-ponctuels, tracé de ligne droite entre deux points sans le concours de la règle). Nous avons vu que cela devient possible aux environs de 6 ans.

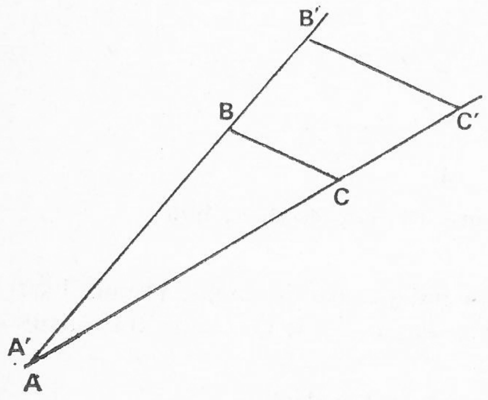
A cet âge, les enfants ayant à classer des figures dont certaines sont faites d'un assemblage de segments de droite et d'autres de lignes courbes les placent assez systématiquement dans des classes distinctes. Ceci confirme que la présence de lignes droites joue un rôle important dans la *reconnaissance des formes.* C'est également par référence à la ligne droite et au plan que peuvent se constituer avec quelque précision les notions de droite-gauche, d'avant-arrière et de haut-bas. La vie de tous les jours fournit de très nombreuses occasions à l'enfant de développer ces notions. L'école ne joue dans ce domaine qu'un rôle d'appoint, surtout nécessaire si le maître constate une carence. Quand elles sont acquises elles permettent à l'enfant d'améliorer beaucoup ses possibilités d'orientation dans l'espace et de repérage des objets les uns par rapport aux autres ou par rapport au sujet lui-même.

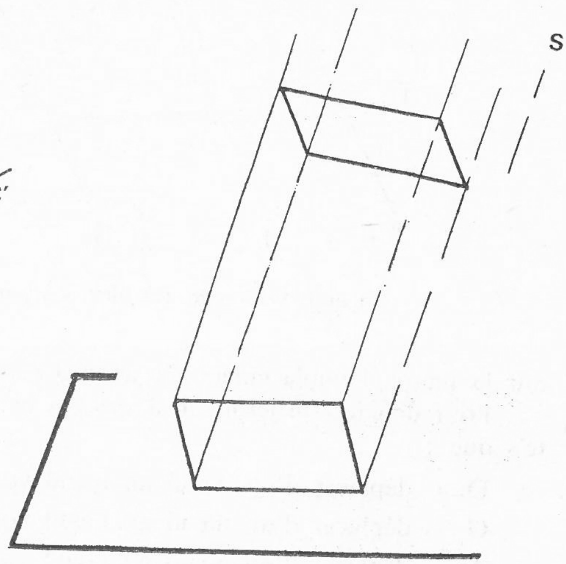
Un excellent exercice d'entraînement à la communication consiste à demander aux élèves de décrire des situations où il faut préciser la disposition respective de personnages et d'objets (ex. : telle voiture x est en avant et à gauche de telle autre y — dans le sens de la marche —, elle n'est pas encore arrivée au niveau du pont A sur lequel se trouve le personnage P, etc.). On pourra notamment constater à cette occasion la plus ou moins grande facilité qu'a l'élève de se décentrer, de changer de perspective, de coordonner les points de vue.

La « géométrie des ombres » proprement dite consiste à projeter l'ombre de figures découpées dans du carton sur une surface plane (table, plancher, cloison, écran...), la source de lumière étant un projecteur ou une ampoule unique assez forte. La transformation de la figure en son ombre conserve les droites si bien qu'un triangle a pour ombre une figure triangulaire, un quadrilatère a pour ombre un quadrilatère, etc. Par contre, ni les longueurs ni les angles ne sont conservés en général. Preuve en est fournie expérimentalement quand, ayant dessiné sur un calque l'ombre portée par une figure, on essaye de superposer les deux figures en cause.

(1) Cette partie de la géométrie est parfois appelée « géométrie de la membrane de caoutchouc » parce qu'elle ne se soucie ni des formes, ni des distances, ni de l'orientation.

Cette « géométrie des ombres » permet de faire prendre aux élèves un premier contact avec la propriété de *similitude*. Quand le plan de la figure projetée et le plan de projection sont parallèles on constate que la déformation due à la projection est moins affirmée que lorsque les plans en cause sont inclinés l'un sur l'autre. Si on essaye de superposer une figure et sa transformée (reportée sur un calque) on constate que l'on peut faire coïncider deux à deux les directions portant deux côtés adjacents (voir *figure*).

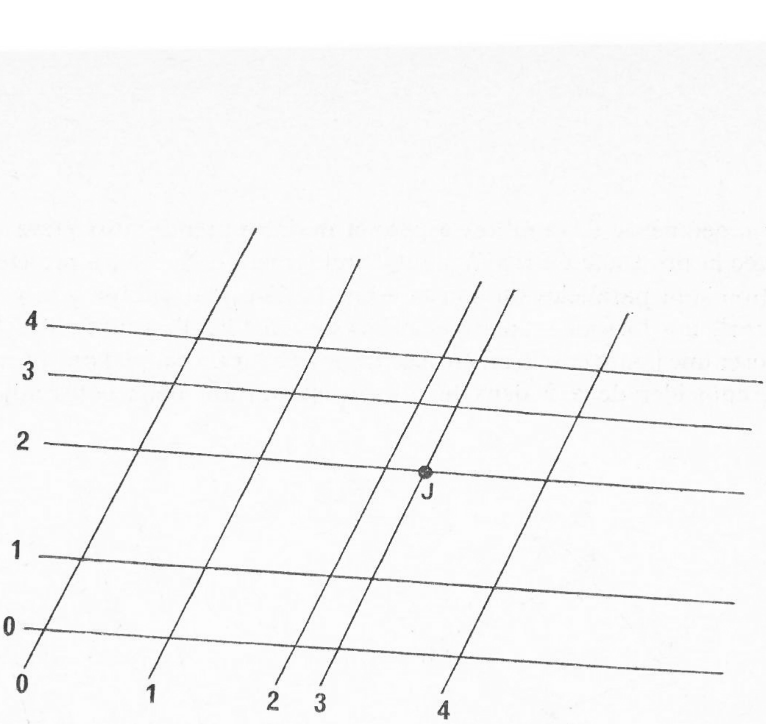




D'autres découvertes du même ordre seront faites en prenant comme source de lumière le Soleil qui permet de réaliser des ombres très franches. Les élèves découvriront que la transformée d'un rectangle est un parallélogramme. Bien qu'à l'âge de 7-8 ans ils ne soient pas encore familiarisés avec la notion de parallélisme, ils savent plus ou moins confusément — ne serait-ce que par les lignes de leurs cahiers ou les rails du chemin de fer — ce que sont des parallèles et ils verront que la transformation en question — appelée *transformation affine* — conserve le parallélisme.

Notons au passage que l'intérêt de ces exercices dépasse largement l'étude de la géométrie. Ils fournissent en effet aux enfants l'occasion de pratiquer des *transformations* de natures diverses. Or, la transformation est l'un des outils majeurs au service de la connaissance. La transformation en effet permet de progresser du connu vers l'inconnu en laissant certains éléments invariants — sorte d'enracinement dans l'expérience antérieure — et en autorisant la novation. C'est bien ce qui se passe quand, partant d'une certaine figure, on réalise par projection sa transformée. Celle-ci rappelle par certains de ses traits la figure dont elle est issue, alors qu'elle en diffère par d'autres.

En même temps que sont pratiqués les exercices ci-dessus qui familiarisent les enfants avec les droites parallèles on peut commencer à introduire la « géométrie du repérage » qui se trouve à la charnière de la géométrie projective et de la géométrie euclidienne. Les exercices correspondants se pratiquent à l'aide d'un matériel très simple constitué par un quadrillage droit ou oblique dont les lignes de couleur sont disposées comme l'indique la *figure*. Les nœuds du quadrillage se trouvent tout naturellement désignés par l'indication des deux couleurs des lignes qui s'y croisent.



(0) noir, (1) rouge, (2) bleu, (3) jaune, (4) vert, (J) jaune, bleu

Sur la figure, l'emplacement du jeton J sera indiqué par le couple (jaune, bleu).

Pour déplacer le jeton on a recours à un ensemble de consignes (opérateurs) tels que :

D = déplacer d'un nœud au nœud voisin situé à droite.

G = déplacer d'un nœud au nœud voisin situé à gauche.

Av = déplacer d'un nœud au nœud voisin vers le joueur.

Ar = déplacer d'un nœud au nœud voisin en s'éloignant du joueur.

En partant de (rouge, rouge) les consignes D, puis Ar, puis D, permettent d'atteindre l'objectif (jaune, bleu). Quand les enfants sont bien familiarisés avec les règles et la façon de procéder, on peut substituer aux « coordonnées couleurs » des coordonnées numériques abscisse-ordonnée (application du code : noir → 0, rouge → 1, bleu → 2, jaune → 3, vert → 4).

(A suivre.)

Jean Sauvy

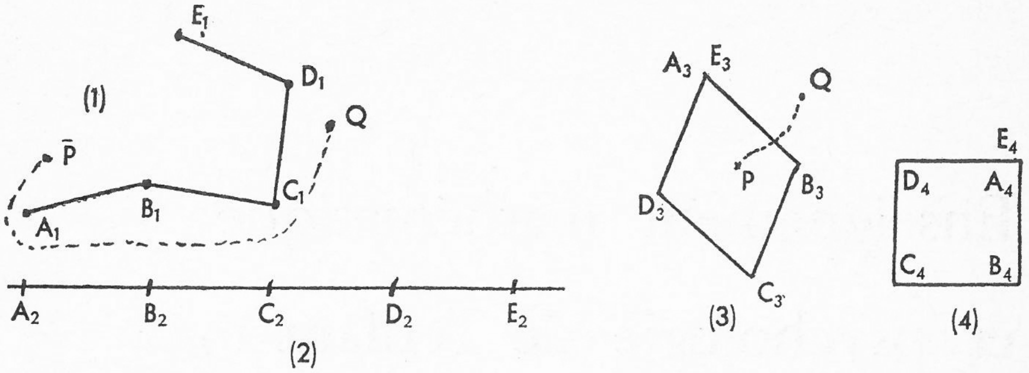
Enseignement mathématique et psychologie de l'enfant (*)

Vers 8-9 ans les enfants franchissent un nouveau pas dans leur façon d'appréhender l'espace. Bâtissant désormais sur le soubassement que leur offre l'ensemble des notions topologiques et projectives mises en place au cours des années précédentes, utilisant d'autre part les possibilités que leur ouvre l'usage des opérations concrètes (reversibilité, transitivité, etc.), ils reconnaissent aux solides indéformables des *dimensions invariantes*, ils sont capables de reconnaître que des segments ou des distances ont même longueur, ils deviennent aptes à la mesure de ces longueurs. Grâce à la mesure, le quantitatif s'ajoute au qualitatif. C'est l'époque où l'enseignement élémentaire peut commencer à introduire la *géométrie métrique*. Celle-ci comprend l'étude classique des solides géométriques simples (cube, pavé, pyramide, cylindre, boule...) et des figures géométriques usuelles (parallélogramme, triangle, cercle, etc.).

Cette étude sera spécialement enrichissante pour l'enfant si elle est traitée dans un esprit *global*, *comparatif* et *dynamique*. L'esprit en sera *global* si on s'attache, en plus des propriétés métriques, aux propriétés affines et topologiques. Il sera *comparatif* si on n'étudie pas un objet géométrique isolé, mais des classes d'objets entretenant entre elles certains liens. Il sera *dynamique* si on s'intéresse aux transformations que peut subir l'objet géométrique étudié sans qu'il perde pour autant toutes ses caractéristiques, ce qui en ferait un objet « étranger ».

Donnons un exemple pour nous faire comprendre. Étudions l'assemblage obtenu en joignant bout à bout quatre tiges de *meccano* d'égale longueur. Quand les écrous sont serrés, l'assemblage devient indéformable. Prenons plusieurs de tels assemblages de façon à pouvoir les comparer entre eux. Les réalisations que nous obtenons sont multiples. Si nous ne « fermons » pas l'assemblage, nous obtenons un chemin brisé du genre de celui de la *figure 1*. Posé sur une table, nous notons qu'il ne constitue pas une frontière pour les points de la table : on pourra toujours se rendre d'un point P à un point Q quelconques du plan par un chemin (dont l'un d'eux est indiqué en pointillés sur la figure) qui évite la barrière interposée entre eux. Si nous fermons l'assemblage, A_3 et E_3 venant coïncider, nous réalisons une frontière qui délimite sur le plan un « intérieur » et un « extérieur » : pour aller de P en Q, il faut obligatoirement franchir la frontière que forment les tiges assemblées. Toutes ces considérations se situent au niveau de la *topologie*.

(*) Les précédents chapitres de cette étude ont été publiés dans les cahiers n^{os} 9, 10, 11-12, 14, 15 et 16.



Revenons à notre ligne brisée $A_1B_1C_1D_1E_1$ (*fig. 1*). Nous nous proposons d'en reproduire le tracé sur une feuille de papier en supposant, par exemple, qu'il s'agit d'un itinéraire qu'on doit reporter sur un plan. Mais nous interdisons de prendre la réalisation matérielle comme « patron ». Comment faire? La mesure devient nécessaire, non seulement mesure des longueurs mais aussi mesure des angles. L'orientation de la « constellation » interviendra aussi, ce qui fera apparaître la nécessité d'un système de repérage et soulèvera de nouveaux problèmes (rose des vents).

Fabriquons un second assemblage où les tiges sont alignées (*fig. 2*). Peut-on encore parler d'angle en B_2, C_2, D_2? Superposons (1) et (2) en faisant coïncider A_1 et A_2 et en nous arrangeant pour que E_1 se trouve sur la droite A_2E_2. Nous constatons que E_1 prend place entre A_2 et E_2, autrement dit que segment $A_1E_1 <$ segment A_2E_2.

Fabriquons maintenant deux assemblages fermés (quadrilatères) et donnons à l'un la forme $A_3B_3C_3D_3$ (losange) et à l'autre la forme $A_4B_4C_4D_4$ (carré). En quoi ces deux figures se ressemblent-elles? En quoi se distinguent-elles? C'est la comparaison des angles qui va nous aider.

Nous pouvons poursuivre l'étude en recourant aux symétries et aux rotations. Pour cela nous traçons sur une feuille de papier quadrillé l'empreinte de $A_3B_3C_3D_3$ par exemple. Nous constatons que nous pouvons faire coïncider avec cette empreinte l'assemblage étudié quand nous le retournons autour de l'axe B_3D_3, C_3 venant prendre la place de A_3 et A_3 celle de C_3, etc.

Nous pouvons également examiner les ombres que l'on obtient quand on projette les quadrilatères (3) et (4) sur une surface plane. On envisagera les différentes possibilités correspondant aux quatre branches de l'arbre dichotomique ci-joint.

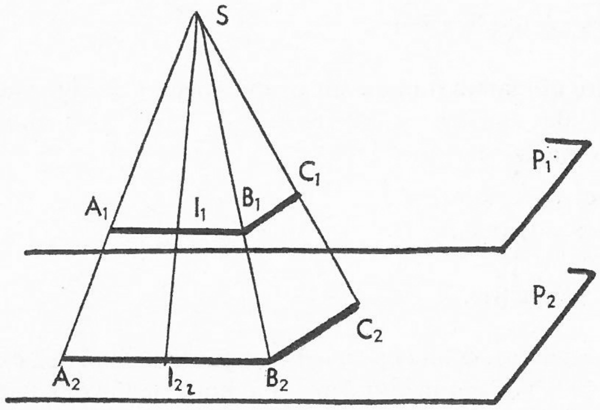
Source ponctuelle	proche	plan	incliné
			parallèle
	éloignée		incliné
			parallèle

Nous arrêterons là l'exposé succinct de cet exemple qui pourrait conduire très loin si on le développait en détail.

Il est deux autres voies importantes sur lesquelles les élèves pourront progresser au cours de la période considérée (8-12 ans).

La première a trait aux *proportions* telles que l'œil les saisit quand il s'en trouve qui sont matérialisées dans l'espace (repère partageant une longueur en deux parties égales, par exemple, ou repère partageant une longueur en deux parties dont l'une est le double de l'autre, etc.). Cette étude aura avantage à être reliée à celle des *fractions*.

L'étude des *projections*, dans le cas où la source de lumière est proche et où le plan de projection P_2 est parallèle au plan P_1 de la figure, peut fournir une base expérimentale ou une introduction à cet important domaine. On constatera par exemple que si A_2B_2 est double de A_1B_1, B_2C_2 est également double de B_1C_1. On



constatera de même que si I_2 est au tiers du segment A_1B_1, I_2 est au tiers du segment A_2B_2 (conservation des proportions). Naturellement, à ce niveau, il ne s'agit ni d'énoncer des propriétés, ni, *a fortiori*, de les démontrer. Il s'agit de donner l'occasion à l'enfant d'explorer lui-même les particularités des figures que la vie quotidienne et la vie scolaire proposent à son attention, de l'habituer à mettre en relation et à classer ses observations, à rechercher les équivalences et les invariants, bref, à pratiquer les premiers pas d'une démarche scientifique.

La seconde voie, étroitement dépendante de la précédente, est celle de la réalisation de plans, de cartes et de modèles réduits établis à l'échelle, c'est-à-dire en respectant les proportions linéaires.

Insistons sur le fait que tout ce qui précède a trait essentiellement aux éléments linéaires rectilignes des figures. C'est une partie importante de la géométrie élémentaire. Ce n'est pas toute celle-ci. Traditionnellement, on réserve une place dans l'enseignement élémentaire à la mesure des surfaces délimitées par des contours simples (rectangle, carré, triangle rectangle) et à la mesure des volumes des solides géométriques réguliers tels que le cube ou le pavé. Nous appellerons ces mesures « mesures multidimensionnelles ». Les expériences faites à ce propos par Piaget (*La géométrie spontanée de l'enfant*, chap. XII, p. 383 et suivantes) montrent que ce domaine n'est guère accessible à l'enfant tant qu'il est au niveau des opérations concrètes. Autrement dit, avant 11-12 ans, âge charnière entre le stade des opérations concrètes et le stade des opérations formelles (pensée hypothético-déductive), la mesure des surfaces et des volumes ne peut guère être abordée avec fruit. Piaget explique pourquoi dans les termes suivants « une surface, écrit-il, étant simplement pour l'enfant une partie de l'espace enveloppée par une ligne, il n'arrive pas à comprendre comment on peut procéder de la ligne à la surface, par exemple des côtés du carré à sa superficie, tant qu'il ne conçoit pas la surface elle-même comme réductible à des lignes, autrement dit tant qu'il ne conçoit pas le continu à deux dimensions comme un réseau sans lacune de continus à une dimension » (ouvrage cité p. 442). Il en va de même pour la mesure du volume qui nécessite la « capacité de la décomposition et de la recomposition des continus seulement acquise au niveau des opérations formelles » (*id.* p. 482).

Concluons donc que les mesures multidimensionnelles ne devraient être introduites dans l'enseignement qu'au cours des dernières années de la scolarité élémentaire (CM_1 et CM_2).

E. — Opérateurs et applications

Envisageant les domaines où pouvait trouver place l'enseignement mathématique au cours du stade des opérations concrètes (6-7, 11-13 ans), nous avons examiné tour à tour les domaines suivants :

— relations et ensembles,
— logique des attributs,
— nombres naturels,
— espace et géométrie.

Ce faisant, nous avons débité en tranches, pour la facilité de l'exposé, une matière qui est beaucoup plus liée, en profondeur, que nous ne l'avons fait apparaître. Pour atténuer ce défaut nous nous proposons de consacrer un court chapitre à ce qu'on pourrait appeler la « structure profonde » commune aux divers domaines particuliers entre lesquels nous avons partagé le sujet à traiter.

Sur le plan psychologique, avons-nous vu, la structure commune sous-jacente aux activités de classement, de sériation, de mise en correspondance numérique, d'orientation et de repérage, est l'*opération* au sens où l'école de Genève utilise ce terme. Peut-on trouver l'équivalent au niveau mathématique?

Il semble que oui sous la forme de ce que nous avons nommé avec beaucoup de mathématiciens « les opérateurs » ou encore avec ce que la mathématique actuelle nomme volontiers « applications ».

Projetons sur un écran les lettres *a*, *b*, *c* tracées sur des diapositives. A chaque lettre X correspond une image X′ et une seule. Chaque image a même apparence que son antécédent, seule sa taille diffère. La projection agit comme un transformateur qui *conserve* certaines caractéristiques de l'objet auquel elle s'applique et qui en *modifie* une ou plusieurs autres. Mais cette modification n'est pas variable : la projection *agit de la même façon* sur les différents objets projetés. Elle apparaît donc elle-même comme possédant une spécificité et une invariance et elle peut devenir à son tour objet d'étude.

Si, délaissant le dispositif matériel utilisé, nous nous intéressons aux figures géométriques sur lesquelles nous avons travaillé, nous sommes conduits à distinguer l'ensemble E des figures antécédentes, l'ensemble E′ des figures images et l'*opérateur* K qui assure le passage d'une figure antécédente à son image. Utilisant une autre terminologie, nous pouvons aussi bien dire que nous réalisons une *application*, notée K, de l'ensemble E sur l'ensemble E′, ce que nous symbolisons de la façon suivante :

$$K : a \mapsto a'$$
$$K : b \mapsto b'$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$K : E \to E'$$

Nous retrouvons exactement le même schéma quand nous multiplions des nombres, par exemple 2, 5, 8, par un nombre 3 par exemple.

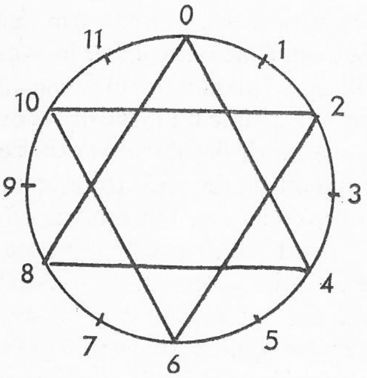
L'opérateur $(\times 3)$ fait correspondre :

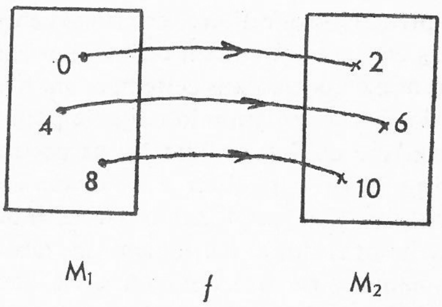
— à l'antécédent 2 l'image 6,
— à l'antécédent 5 l'image 15,
— à l'antécédent 8 l'image 24,

et l'on peut écrire, par exemple, $(\times 3) : 2 \mapsto 6$.

Si nous appliquons $H = (\times 3)$ aux mesures des côtés d'un triangle T, soit en centimètres (par exemple) $F = (2, 5, 8)$, nous obtenons un nouveau triplet ordonné de mesures $F' = (6, 15, 24)$ correspondant aux côtés d'un triangle T′, image du précédent. Ce nouveau triangle T′ est différent de T (il est plus grand); néanmoins, comme l'opérateur a agi *uniformément* sur les longueurs des trois côtés, la figure obtenue ressemble à la précédente (similitude). Sous cet angle géométrique l'opérateur H est un opérateur d'homothétie.

Ce même schéma « états-opérateur-états » est encore applicable à la situation suivante :





Considérons un triangle équilatéral en carton ABC pouvant tourner autour du point de concours des médianes. Ses sommets balayent une circonférence portant une graduation duodécimale (cadran de montre). Au début de l'expérience le triangle mobile occupe une certaine position (état n° 1) telle que les sommets A, B, C correspondent aux repères 0, 4, 8. Faisons tourner le triangle de 2/12ᵉ de tour. A vient en A′ (graduation n° 2), B vient en B′ (graduation n° 6), C vient en C′ (graduation n° 10). Le triplet ordonné (2, 6, 10) définit une nouvelle position du triangle (état n° 2).

Envisagée en termes mathématiques cette manipulation s'analyse comme une *rotation* caractérisable par un opérateur (opérateur de rotation) qui modifie la position de la figure mais ne modifie pas ses caractéristiques métriques. Si on s'intéresse de façon privilégiée à la correspondance réalisée entre les positions des sommets, on peut considérer qu'on a affaire à une application f de M_1 sur M_2.

Passons à un autre domaine, celui du langage. Considérons les trois phrases suivantes :

(*a*) « Le vent balaye la cour. »
(*b*) « Le garçon astique sa moto. »
(*c*) « Le contribuable paye l'impôt. »

Nous pouvons les transformer en les mettant au passif de façon à obtenir les nouvelles phrases :

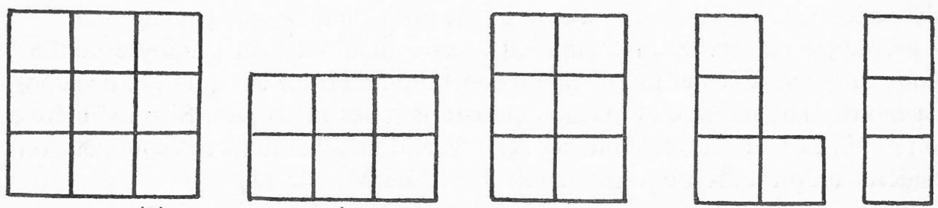
(*a'*) « La cour est balayée par le vent. »
(*b'*) « La moto est astiquée par le garçon. »
(*c'*) « L'impôt est payé par le contribuable. »

Cette transformation présente les caractéristiques mises en lumière dans les exemples précédents : elle laisse inchangé le sens général mais modifie la forme des phrases et la perspective selon laquelle le rapport entre sujet et objet est considéré. Cette transformation agit de la même façon sur les diverses phrases envisagées. On pourrait donc parler d'un « opérateur passif ». C'est d'ailleurs bien l'esprit dans lequel la grammaire générative (Chomsky) traite les problèmes du langage.

Les quelques indications qui précèdent montrent que les opérateurs interviennent dans des situations mathématisables d'apparences très variées. C'est bien là le rôle de la mathématique : dégager, sous la diversité des apparences, les mécanismes invisibles qui rendent intelligibles les situations auxquelles est confrontée la réflexion.

Examinons un moment ce point qui est capital pour notre propos. Imaginons une maison où toutes les portes s'ouvriraient de façon différente : devant la première il faudrait tirer le battant vers soi, pour la seconde le pousser, pour la troisième le faire pivoter autour d'un axe vertical central, pour la quatrième faire glisser le panneau de bas en haut comme on ouvre une fenêtre à guillotine. Imaginons un jeune enfant ayant à se déplacer dans cette maison. Il est clair que l'ensemble du dispositif d'ouverture des portes restera inintelligible pour lui, puisque à partir des diverses expériences d'ouverture qu'il aura faites, il ne pourra dégager aucun mode opératoire commun. Il ne pourra « capitaliser » les divers acquis de son expérience. Un schème efficace d'action ne naît que lorsque, en répétant certaines conduites, l'enfant constate leur efficacité opératoire. Autrement dit, des actes isolés, ou des actes qui ne relèvent pas de quelque structure commune, ne sont pas éducatifs au niveau sensori-moteur.

Il en va de même au niveau intellectuel. L'enfant qui se trouve en présence d'une situation isolée et singulière ne peut guère tirer de son étude quelque chose qui s'apparente à une découverte. Par contre, si l'occasion lui est donnée d'explorer des situations présentant à un certain niveau un fonds commun, il aura la possibilité de découvrir celui-ci. Dès lors, en présence d'une situation isolée, il pourra la mettre par la pensée en relation avec la quintessence de ce qu'il avait précédemment tiré de situations analogues. Même s'il ne sait ni localiser exactement la similitude ni l'expliciter, il saura la mettre en œuvre.



a (9) *b* *c* *d* *e* (3)

Proposons à nouveau un exemple. Présentons à un enfant dont l'âge se situe au début des opérations concrètes, c'est-à-dire âgé de 7-8 ans (niveau Cours Élémentaire), un jeu de jetons et la série de dessins ci-dessus, les cases délimitées étant assez grandes pour qu'il puisse placer dans chacune d'elles *un* jeton. Disposons des jetons sur le dessin de gauche (*a*) et inscrivons 9 sur l'étiquette prévue à cet effet. Faisons de même avec (*e*). Sans ajouter de consigne verbale, laissons l'enfant aux prises avec cette « situation ». Entraîné par l'imitation, assez souvent il y a chance qu'il prolonge ce qui a été amorcé par l'adulte. Il place des jetons dans les 6 cases de (*b*), dans les 6 cases de (*c*), dans les 4 cases de (*d*).

Comme il sait compter, il remarque que ce qui a été inscrit par l'adulte sur les étiquettes de (*a*) et de (*e*) est précisément le nombre de jetons placés sur le dessin correspondant. Il va faire de même et inscrire les cardinaux qui conviennent sur les étiquettes encore vierges.

Les choses peuvent en rester là. L'enfant peut considérer sa tâche comme terminée et rendre au maître la fiche qu'il a faite. Supposons que ce soit le cas. Il est clair que nous sommes ici en présence de ce que l'on appelle une « situation mathématisable », c'est-à-dire en présence d'une situation que l'éclairage d'un traitement mathématique rend plus intelligible. Elle a été conçue de façon suffisamment simple pour être à la portée de l'enfant, suffisamment complexe pour susciter son intérêt à moins qu'il ne soit déjà en possession des mécanismes nécessaires à sa maîtrise, auquel cas il faudra envisager autre chose.

Ici « l'éclairage par la mathématique » c'est cet éclairage très ancien, qui remonte à la Babylone du 1er millénaire avant J.-C. et peut-être plus loin encore et qui consiste à quantifier, à dénombrer. L'enfant réalise une application d'un ensemble de jetons sur un ensemble de cases; le nombre de jetons est égal au nombre de cases; le décompte des jetons permet le décompte des cases; on peut inscrire un nombre sur l'étiquette du dessin. L'exercice ne présente un intérêt que parce qu'il y a, dans le champ du regard de l'enfant, plusieurs variantes d'une même situation de base (l'application de jetons sur un casier).

Notons immédiatement qu'en éclairant de cette façon la situation, l'enfant ignore de nombreuses particularités du dessin. Que les cases soient plus ou moins grandes, qu'elles soient disposées en un dessin symétrique ou non, peu importe. Tout cela n'est pas pris en considération. Comprendre, à ce niveau, c'est schématiser, c'est prendre une vue suivant un axe privilégié, c'est ignorer tout ce qui n'est pas pertinent par rapport à ce point de vue, c'est recourir à l'abstraction.

On pourrait arrêter là l'exercice. On peut également essayer de le prolonger. Supprimons les jetons et remplaçons-les par une série de bandes de carton toutes semblables ayant la forme de (*e*). Nous les présentons à l'élève en même temps que la planche précédente. Devant l'élève, nous disposons deux bandes côte à côte de façon à constituer une configuration qui soit la réplique de (*b*). Observons la suite.

L'enfant étant engagé par nos soins sur une piste, la poursuit. Il va successivement, avec les bandes disponibles, constituer des configurations répliques de (*a*) et de (*c*). Par contre, impossible de réaliser la réplique de (*d*) avec le matériel disponible. Cette impossibilité suscitera, suivant les enfants, des réactions diverses. Tel d'entre eux pourra s'estimer satisfait et ne pas chercher plus avant, tel autre fera part au maître de la difficulté à laquelle il se heurte, tel autre encore s'interrogera. Sans doute verra-t-il alors qu'il y a quelque chose de semblable dans les schémas (*a*), (*b*) et (*c*) car ils ont été justiciables du même traitement par les bandes à 3 cases longitudinales. Par contre, il y a une différence entre cette classe de schémas et le schéma (*d*) qu'il ne peut reproduire avec les bandes à 3 cases disponibles.

Rien ne nous permet de dire que tous les enfants découvriront avec ce matériel que 6 et 9 sont des multiples de 3 alors que 4 ne l'est pas. Mais peu importe. Ils auront fait une expérience qui prendra place dans tout un patrimoine sans cesse s'enrichissant d'expériences multiples d'où, le moment venu, ils pourront tirer le « quelque chose » qui est commun à certaines d'entre elles, le « quelque chose » qu'ils seront dès lors capables de déceler dans telle ou telle situation nouvelle et qu'ils mettront au service de leur compréhension de cette nouvelle situation à maîtriser.

Ainsi en est-il des opérateurs. Ce sont des êtres mathématiques sans support sensible. Pourtant les enfants sont très tôt capables de les mettre en œuvre correctement, c'est-à-dire de les utiliser en respectant les *règles* et les *particularités* des *systèmes* auxquels ils appartiennent. Ces règles et ces particularités, les mathématiciens les ont explicitées. Si les opérateurs sont, au sens mathématique, élément d'un groupe commutatif pour l'opération de composition, ces règles et particularités portent le nom d'associativité, de commutativité, d'existence d'un opérateur neutre, d'existence d'un symétrique pour tout opérateur du groupe.

Naturellement l'enfant âgé de moins de 11-12 ans n'aura pas conscience, quand il met en œuvre des groupes, qu'il respecte ces règles. Il les aura pourtant incorporées dans ses mécanismes de raisonnement comme il a incorporé dans ses mécanismes linguistiques les règles élémentaires du langage. De même qu'il sait que pour s'élever de deux marches sur l'escalier il peut indifféremment faire deux fois un pas ou une fois un double pas, de même qu'il sait que pour aller d'un coin d'une pièce à un coin opposé il peut indifféremment suivre les deux parois à angle droit qui y conduisent ou traverser la pièce en diagonale, de même saura-t-il que pour multiplier un nombre par vingt il peut soit le faire directement soit en multipliant par dix, puis en doublant le résultat obtenu (ou vice versa).

F. — Conclusions

Concluons ce long chapitre en répétant une fois de plus qu'au stade des opérations concrètes, c'est-à-dire au stade où se trouvent les enfants âgés de 6-7 à 12-13 ans, les deux clefs de l'enseignement des mathématiques sont contenues dans les deux mots « opérations » et « concrètes ».

Le mot « opération » nous indique qu'un rôle essentiel doit être dévolu au *maniement intellectuel des opérateurs mathématiques ou des applications* (au sens mathématique du terme).

Le qualificatif « concrètes » nous indique qu'on doit prendre obligatoirement appui sur la perception et sur l'expérience sensori-motrice des enfants à travers la manipulation et la réalisation de schémas. Il nous indique que l'on doit réduire le plus possible l'explication verbale car « le mot n'est pas la chose » et ne peut être maîtrisé que si la chose l'a préalablement été. Le qualificatif « concrètes » veut dire cela et rien d'autre. Il ne veut surtout pas dire que l'abstrait doit être ignoré car toute activité intellectuelle, *a fortiori* toute activité relevant de la mathématique, travaille dans l'abstraction. Cela est vrai dès le stade des opérations concrètes.

Et pourtant, malgré cette présence de l'abstrait, on ne peut pas dire que les enfants des âges considérés fassent de la mathématique. Ils font de la « pré-mathématique », de l'apprentissage mathématique. Car, dans le discours mathématique des mathématiciens, et cela depuis les Grecs de l'époque de Pythagore comme se plaît à le rappeler le Pr LICHNEROWICZ, les règles du jeu sont explicitées et occupent le devant de la scène. Elles sont étudiées en elles-mêmes en tant que parties des systèmes auxquelles elles appartiennent. Si les concepts de la mathématique portent souvent encore la trace de quelque lien avec le monde sensible, si le discours mathématique utilise les mots « espace », « corps », « anneau », « vecteur », etc., qui ne sont pas étrangers au profane, ce n'est là qu'une sorte de résidu d'une situation antérieure dépassée.

Visant les structures profondes, comme le psychanalyste vise l'inconscient des sujets qu'il traite, le mathématicien s'écarte forcément du monde quotidien, de ce qui se voit et de ce qui se touche. Très vite cette mathématique-là s'oriente vers ce qui ne se laisse pas représenter, vers ce qui ne se laisse pas dire par les mots de tous les jours, parce que cela dépasse l'expérience du monde sensible. La mathématique est ascèse, comme le dit très heureusement le Pr Georges GUILBAUD, une ascèse à la recherche d'un certain « au-delà » ou d'un certain « en-deçà ».

Ce n'est pas, bien sûr, de cette mathématique-là dont il a été question dans la présente étude. Celle-ci ne commence à être accessible que lorsque l'intelligence, dépassant vers 12-13 ans le stade des opérations concrètes, atteint le stade final de son développement que PIAGET appelle le *stade des opérations formelles* ou *stade hypothético-déductif.*

A ce moment-là et à ce moment-là seulement la pensée est capable de se détacher de la perception immédiate, du contact avec le monde sensible. Elle s'ouvre aux hypothèses. Il ne lui apparaît pas anormal de dire : « Je suppose que ces deux droites sont parallèles », alors que rien ne l'indique *a priori*, et de poursuivre le raisonnement déductif sur cette base hypothétique jusqu'au moment où un élément viendra, par exemple, indiquer que l'hypothèse provisoirement adoptée doit être rejetée comme contradictoire avec tel ou tel autre élément du problème.

De ce stade nous n'en dirons pas davantage ici puisqu'il se situe pour l'essentiel au-delà de l'enseignement élémentaire, objet exclusif de la présente étude.

J. S.

Les séminaires de l'I.R.E.M. de Paris

Chacun des séminaires organisés par l'IREM de Paris aux dates ci-après se tiendra dans les locaux de l'IREM, tour 56, 3e étage, 9, quai Saint-Bernard, Paris-5e (ou dans un local dont l'adresse sera affichée dans le couloir de l'IREM). L'objectif est de préparer pendant ces séances au travail d'expérimentation à effectuer en classe, puis de confronter les conclusions des divers membres de l'équipe.

Analyse : 18 octobre, 22 novembre, 20 décembre (14 h 30).

Logique : 25 octobre, 29 novembre (14 h 30).

Algèbre : 15 novembre, 13 décembre (14 h 30).

Enseignement en 4e et 3e : 22 novembre, 20 décembre (14 h 30).

Méthodes d'enseignement : 15 novembre, 13 décembre (14 h 30).

Informatique : tous les vendredis après-midi (14 h).

Enseignement primaire : 8 novembre, 6 décembre (14 h).

Séminaire de Mme Picard : tous les lundis (17 h 30).