La journée 2017 de la Régionale

jeudi 21 décembre 2017, par Mélusine Kummer

Sommaire

La journée de la Régionale

Le 7 octobre dernier l'IHP accueillait à nouveau les membres de l'APMEP Île-de-France pour la journée de la Régionale.

Une fois n'est pas coutume, celle-ci a débuté par l'Assemblée générale annuelle au cours de laquelle rapport d'activités et rapport financier de l'année passée ainsi que liste du comité régional 2017-2018 ont été votés.

Après un repas convivial organisé par le comité, Daniel Perrin nous a rejoint pour la conférence de l'après-midi.

L'article qui suit ne reprend que les grandes lignes de l'intervention de Daniel Perrin. Pour avoir davantage de détails et d'explications, ainsi que les énoncés des exemples présentés, le lecteur intéressé pourra consulter la page web de Daniel Perrin, en particulier les rubriques « Sur la géométrie », « Livre de géométrie projective (dont la postface sur l'enseignement de la géométrie) » et « Conférences ». Citons aussi son ouvrage « Mathématiques d'école : nombres, mesures et géométrie ».

Par ailleurs, le groupe IREM Géométrie, piloté par Daniel Perrin, s'est constitué en janvier 2017. Les membres y mènent un travail de réflexion sur l'enseignement de la géométrie au cycle 4 avec comme objectif la rédaction d'une brochure ainsi que la préparation d'un stage de formation. De nouveaux membres seront les bienvenus aux réunions du groupe.

La parole à Daniel Perrin

La géométrie dans les nouveaux programmes du collège

Le point de départ de cette intervention est la rédaction des nouveaux programmes du cycle 4 (novembre 2015), et plus particulièrement des points suivants :

- Comprendre l'effet d'une translation, d'une symétrie (axiale et centrale), d'une rotation, d'une homothétie sur une figure.
- Triangle : somme des angles, inégalité triangulaire, cas d'égalité des triangles, triangles semblables.

1. Les cas d'isométrie et les transformations

Les cas d'isométrie, « vieux comme le monde », apparaissent dès le début des Éléments d'Euclide (propositions 4, 7, 8 du Livre I) et ils y sont fréquemment utilisés. Leur réintroduction dans les programmes du collège a été une bonne surprise pour tous ceux qui prônaient leur retour depuis 20 ou 30 ans, et la position de Daniel Perrin est très claire à ce sujet : il faut absolument s'emparer de ces nouveaux programmes.

Le vocabulaire

Une des réflexions du groupe IREM a été de se demander « Comment doit-on dire ? »

Autrefois, depuis Euclide, on parlait de triangles « égaux ». Mais de nos jours le mot « égal » a pris une autre signification : égal veut dire identique. Il serait alors préférable de ne plus utiliser ce terme mais de parler plutôt de triangles isométriques ou de triangles superposables. Mais peu importe le mot, ce qui est important c'est de savoir ce qu'on y met derrière.

Quelle définition pour des triangles isométriques ?

Dans certains manuels il est écrit que deux triangles sont isométriques (ou égaux) si ils ont leurs trois côtés de même longueur. Or d'un point de vue mathématique, « isométriques » signifie qu'il existe une isométrie qui emmène un triangle sur l'autre. Les deux triangles ont donc non seulement leurs trois côtés de même longueur, mais aussi leurs trois angles égaux.

Pour donner une définition en collège qui ne fasse pas référence aux isométries, il est nécessaire de mentionner les trois longueurs égales ainsi que les trois angles égaux (sinon le 3^e^ cas d'égalité revient à la définition). Les trois cas d'égalité sont alors trois théorèmes.

Remarque : vous trouverez, sur le site de Daniel Perrin, une proposition de système d'axiomes pour la géométrie du collège auquel s'est intéressé le groupe IREM Géométrie.

Histoire de l'enseignement des cas d'isométrie et des transformations

De même que « les bons ouvriers ont toujours de bons outils », quand on fait de la géométrie on a besoin d'outils. Et le mot outil est un mot important.
On peut en répertorier quatre sortes :

- L'usage des invariants (les longueurs, les angles et les aires)
- Les cas d'égalité et de similitude
- Les transformations
- Le calcul (qui est l'outil principal au lycée pour la géométrie avec le calcul vectoriel ou analytique)

Pendant plus de 2000 ans (jusque dans les années 1970) les cas d'égalité des triangles ont été l'outil essentiel à la fois des géomètres, des professionnels, mais aussi de tous les élèves dans les collèges et lycées (Les auteurs des manuels actuels semblent avoir oublié cela. Dans les nouveaux manuels - à une exception près - les cas d'égalité ne sont pas utilisés comme outils pour démontrer : il s'agit en général uniquement de montrer que deux triangles sont égaux, ce qui présente peu d'intérêt).

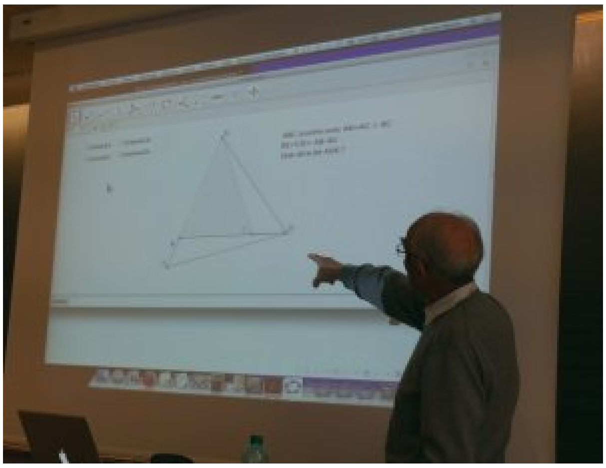
Dans les années 70, avec la réforme des maths modernes, les cas d'égalité ont été bannis des programmes. On préférait alors à l'axiomatique euclidienne celle des espaces vectoriels et affines, et aux cas d'égalités les transformations. Les cas d'isométrie ont ainsi disparu, ont fait une brève réapparition à la fin des années 90 en 2^e^ puis ont à nouveau disparu. Les professeurs ne s'en étaient d'ailleurs pas emparés entre temps : les personnes qui n'avaient pas été formées pour s'en servir ne s'en sont pas servies eux-mêmes avec leurs élèves.

Il est ainsi à craindre que nombre de professeurs actuels n'ayant pas -ou presque pas - été formés ne s'en emparent pas eux non plus. En effet, comment peut-on se rendre compte que c'est un outil important si on ne l'a pas appris ?

Pourquoi les cas d'égalité sont à utiliser ?

Il existe pourtant de solides arguments, à la fois mathématiques et didactiques, en faveur de l'utilisation des cas d'égalité des triangles au collège et qui sont explicités de façon claire et détaillée dans plusieurs documents consultables sur la page web de Daniel Perrin.

On les retrouve en particulier dans un document qui comprend l'analyse d'un exercice avec sa résolution avec les cas d'égalité des triangles ainsi qu'avec les transformations, transformations qui sont ici un outil plus complexe pour des collégiens.



Plusieurs types d'exercices sont possibles avec les élèves, dès la 5e. Et les cas d'isométrie - une fois qu'on les a démontrés (avec la démonstration d'Euclide par superposition) - permettent de démontrer de nombreux résultats déjà connus des élèves ou qu'ils découvriront au cours de l'année.

Un 1er exemple est la caractérisation d'équidistance des points de la médiatrice d'un segment qui se démontre facilement avec les cas d'isométrie.

Un autre exemple en 5e est la démonstration des résultats concernant le parallélogramme (en démontrant ou admettant les propriétés des angles alternes-internes) : on peut démontrer, avec les cas d'égalité, tout ce qu'on démontre habituellement avec la symétrie centrale.

Un bel exemple où les cas d'égalité des triangles sont utilisés est la mesure de la méridienne par Méchain et Delambre, exemple détaillé dans le livre de Denis Guedj « La Méridienne » et qu'on retrouve de façon plus succincte accompagnée d'exercices sur le site de Daniel Perrin.

De nombreux autres exercices utilisant les cas d'égalité de triangles sont aussi disponibles sur le site de Daniel Perrin.

Pour conclure cette partie, il est important de répéter que les cas d'égalité des triangles sont à considérer comme des outils pour faire de la géométrie et résoudre des problèmes, et cela dès le début du cycle 4.

Et les transformations ?

Il ne s'agit pas non plus de négliger les transformations : il est naturel de les utiliser lorsqu'elles sont visibles par les élèves et qu'ils sont capables de montrer leurs effets. Autres exemples où celles-ci sont fondamentales : les problèmes de construction et les problèmes de lieux géométriques.

2. Les cas de similitude

De même que les cas d'isométrie peuvent servir à justifier un certain nombre de résultats du cours, de même les cas de similitude sont indispensables pour justifier les formules trigonométriques dans un triangle rectangle. Et de même que les cas d'égalité, ils sont un puissant outil de démonstration.

Citons quelques exemples de leur usage :

- les relations métriques dans le triangle rectangle avec les trois formules de moyennes et en particulier le théorème de la hauteur
- le triangle 36, 72, 72 : utilisé par Euclide pour construire un construire le pentagone régulier
- un exemple historique : la construction du tunnel de Samos selon Héron d'Alexandrie

3. Quelle progression ?

La proposition qui suit est le fruit du travail du groupe IREM Géométrie, encore en discussion. Elle repose sur deux principes :

- une introduction précoce des cas d'isométrie (dès la 5^{e})
- l'emploi de ces résultats comme outils (ce qui ne se résume pas à la justification de la construction d'un triangle, exemple apparaissant dans les documents d'accompagnement)

En 5^{e}
- Inégalité triangulaire
- Introduction des cas d'égalité (en lien avec la construction de triangles)
- Utilisation des cas d'égalité (médiatrice, …)
- Angles et parallèles, somme des angles du triangle
- Symétrie centrale

En 4^{e}
- Théorème de la droite des milieux et sa réciproque
- Théorème de Pythagore et sa réciproque
- Utilisation des cas d'égalité pour montrer des propriétés
- Première approche de la translation et de la rotation
- Une première approche de la trigonométrie : la question se pose

En 3^{e}
- Théorème de Thalès et sa réciproque (deux configurations ; démonstration avec les aires)
- Notion d'homothétie (en lien avec le théorème de Thalès)
- Triangles semblables
- Rapports trigonométriques dans le triangle rectangle.

article suivant

retour au sommaire

Les chantiers de pédagogie mathématique n°175 décembre 2017
La Régionale Île-de-France APMEP, 26 rue Duméril, 75013 PARIS